第 60 卷 第 12 期/2023 年 6 月/激光与光电子学进展 研究论文

激光与光电子学进展 先进成像

基于凸非凸有限元全变差正则的扩散光学层析成像

李金兰[1]，谢朝阳[1]，刘国奇[2]，邹健[1*]

[1]长江大学信息与数学学院，湖北 荆州 434020；

[2]河南师范大学计算机与信息工程学院，河南 新乡 453007

摘要 为避免扩散光学层析成像中 L_1 正则项带来的有偏估计问题，提出一种基于凸非凸有限元的全变差（CNC-FETV）正则重构模型。首先，应用有限元方法将求解域剖分为有限个三角形，用一个连续分段多项式函数逼近每个三角形上的吸收系数值，再对导出的差分矩阵进行逐个单元组装，得到有限元的全变差（FETV）正则表示。然后，利用基于凸非凸稀疏正则的构造方法得到凸非凸有限元全变差正则项，并在理论上证明该非凸正则项在一定条件下可保持目标函数的整体凸性。最后，利用交替方向乘子法求解所提模型。数值实验表明，所提 CNC-FETV 模型在扩散光学层析成像重构的视觉效果和评价指标值上都要优于已有的 Tikhonov 和 FETV 正则模型。

关键词 扩散光学层析成像术；凸非凸稀疏正则；有限元法；交替方向乘子法

中图分类号 TP751 **文献标志码** A **DOI**: 10.3788/LOP221095

Diffusion Optical Tomography Based on Convex-Nonconvex Finite Element Total Variation Regularization

Li Jinlan[1], Xie Zhaoyang[1], Liu Guoqi[2], Zou Jian[1*]

[1]*School of Information and Mathematics, Yangtze University, Jingzhou* 434020, *Hubei, China*;

[2]*College of Computer and Information Engineering, Henan Normal University, Xinxiang* 453007, *Henan, China*

Abstract A reconstruction model based on convex-nonconvex finite element total variation (CNC-FETV) regularization is proposed to avoid the biased estimation of L_1 regularization in diffuse optical tomography. First, the finite element method was used to divide the computational domain into a finite number of triangles, after which a continuous piecewise polynomial function was used to approximate the absorption coefficient value in each triangle. Then, the derived difference matrix was assembled element by element to obtain a representation of the FETV regularization. Subsequently, the CNC-FETV regularization was obtained by the construction method based on convex-nonconvex sparse regularization. Results theoretically proved that the nonconvex regularization term could maintain the overall convexity of the objective function under certain conditions. Finally, the alternating direction multiplier method was used to solve the proposed model. Numerical experiments show that compared with the Tikhonov and FETV regularization models, the proposed CNC-FETV regularization model has superior performances in both numerical criteria and visual effects for diffusion optical tomography reconstructions.

Key words diffuse optical tomography; convex-nonconvex sparse regularization; finite element method; alternating direction multiplier method

1 引 言

扩散光学层析成像（DOT）由于低成本、无创性的优点被广泛应用于临床医学领域，如脑功能检测和乳腺癌诊断[1-3]。DOT 逆问题的工作原理是：当近红外光（650～900 nm）进入组织体后，组织体内部会对光进行不同程度的吸收和散射，组织体表面因此呈现不同的光强分布，利用这些光强分布就可以恢复组织体内部的光学属性 $\boldsymbol{\mu}$（通常包括吸收系数 $\boldsymbol{\mu}_a$ 和散射系数 $\boldsymbol{\mu}_s$）[4-6]。由于成像设备的局限性，成像过程中所采集到的边界测量数据量是远远少于组织体内部真实数据的，因此 DOT 逆问题是欠定的，引入图像的先验信息

收稿日期：2022-03-23；**修回日期**：2022-05-23；**录用日期**：2022-06-13；**网络首发日期**：2022-06-23

基金项目：国家自然科学基金（61901160）

通信作者：*zoujian@yangtzeu.edu.cn

项可有效地求解DOT逆问题，常用的凸正则包括Tikhonov正则[7]、L_1正则[8-9]和全变差正则[10-11]。Tikhonov正则作为先验信息项可有效平滑高强度噪声，L_1正则的优点在于可有效地诱导稀疏性，全变差正则可看作图像梯度的L_1范数，可以很好地保留图像细节纹理。

值得注意的是，上述的正则化方法只适用于均匀组织体，其元素可以看作笛卡儿坐标下的像素。但在DOT中，被检测组织体往往是非均匀介质，对应的拓扑结构为更复杂的几何体，不能简单地在笛卡儿坐标系下表示[8]。Lu等[12]用有限元网格来表示复杂几何体，即表示为一系列不相交的三角形构成的多边形，并提出了基于有限元的全变差(FETV)正则模型，该正则可表示为有限元梯度的L_1正则。但是，L_1正则是一个有偏估计，对幅度值较大的系数会欠估计[13]。非凸正则，如$L_p(0<p<1)$正则，能有效地减小重构偏差，但是非凸正则所对应的目标函数整体是非凸的，容易产生局部最优解[14]。近年来，Selesnick[15]提出了一种凸非凸稀疏正则构造方法，该方法通过从凸正则项中减去其Moreau包络函数来构造非凸正则，同时新的非凸正则项能在一定条件下保持目标函数的整体凸性。凸非凸稀疏正则既能克服凸正则有偏估计的缺点，又能保证目标函数的整体凸性，避免局部最优解的出现，因此在核磁共振图像重构[16]、故障检测[17]等领域得到了广泛的应用。

基于凸非凸策略[18]，本文提出一种凸非凸有限元全变差(CNC-FETV)正则模型。首先将伽辽金有限元方法应用到DOT的求解域中，对复杂几何体进行有限元表示，进而得到有限元全变差正则模型。然后通过从L_1范数中减去其Moreau包络函数构造一个凸非凸有限元全变差正则项，并从理论上证明了通过调节非凸参数可以保证模型中目标函数的整体凸性的结论。最后，利用交替方向乘子法(ADMM)求解新模型。

2　基本模型

2.1　一般模型

一般地，DOT成像分为两个阶段。第一个阶段为正向问题，给定组织体的内部光学属性$\boldsymbol{\mu}$，根据光在组织中的传播模型，得到边界测量值$\boldsymbol{\Phi}$[19]。当组织体内散射系数不变且吸收系数变化量$\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}$足够小时，此时散射系数变化量$\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{s}}=\mathbf{0}$[20]。考虑测量中噪声的影响，边界测量值变化量$\delta\boldsymbol{\Phi}$和吸收系数的变化量$\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}$满足：

$$\delta\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{J}\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}+\boldsymbol{n},\tag{1}$$

式中：$\delta\boldsymbol{\Phi}\in\mathbf{R}^{M\times 1}$；雅可比矩阵$\boldsymbol{J}=\delta\boldsymbol{\Phi}/\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}$，$\boldsymbol{J}\in\mathbf{R}^{M\times N}$表示$\delta\boldsymbol{\Phi}$对$\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}$的敏感度，$M$和$N$分别是边界测量值的数量和有限元剖分节点的个数；$\boldsymbol{n}$是高斯随机噪声。

第二个阶段为逆向问题，通过求解逆问题来重构图像。由于光在组织体内的散射传播以及有限的可用边界测量值等，重构$\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}$是一个欠定的病态逆问题，可通过带正则项的最优化问题进行重构：

$$\min_{\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}}\left\{\frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{J}\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}-\delta\boldsymbol{\Phi}\right\|_2^2+\lambda\phi\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)\right\},\tag{2}$$

式中：数据拟合项$\left\|\boldsymbol{J}\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}-\delta\boldsymbol{\Phi}\right\|_2^2$用来度量重构图像与边界测量改变量$\delta\boldsymbol{\Phi}$的匹配程度；$\phi\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)$是正则项，用来对解施加约束，使其获得某些先验信息(稀疏性或平滑性)；λ为非负正则化参数。使用不同网格对复杂几何图形建模的结果如图1所示。

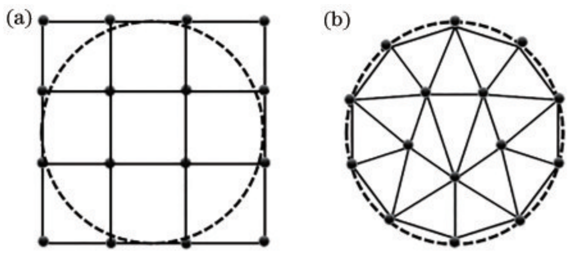

图1　使用不同网格对复杂几何图形建模。(a)笛卡儿网格；(b)有限元网格

Fig. 1　Modeling complex geometries using different meshes. (a) Cartesian mesh; (b) finite element mesh

2.2　有限元表示

Lu等[12]首先应用伽辽金有限元方法离散化求解域Ω，将求解域剖分为具有N_{N}个节点和N_{M}个三角形的有限元网格，$V=\left\{V_1,V_2,\cdots,V_{N_{\mathrm{N}}}\right\}$表示有限元节点的集合，$\left\{\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}i}\right\}_{i=1}^{N_{\mathrm{N}}}$表示有限元网格中每个节点$i$上的吸收系数的集合。求解域上的吸收系数可通过连续分段线性函数$U\left(x,y\right)$得到，形式为

$$U=\sum_{i=1}^{N_{\mathrm{N}}}\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}i}\boldsymbol{\psi}_i,\tag{3}$$

式中：$\{\boldsymbol{\psi}_i\}_{i=1}^{N_{\mathrm{N}}}$为线性基函数。其定义为

$$\psi_j(V_i)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}。\tag{4}$$

式(3)意味着三角形内的吸收系数值和网格中所有节点上的吸收系数值相关联。

基于以上有限元表示，可将近似于求解域的连续函数用连续分段多项式线性函数逼近，从而得到FETV正则，即

$$\int_{\Omega}\left(\left|\partial_x U\right|+\left|\partial_y U\right|\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left\|\mathrm{D}_x\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right\|_1+\left\|\mathrm{D}_y\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right\|_1,\tag{5}$$

式中：∂_x，∂_y分别表示x，y方向上的连续偏导数；$\boldsymbol{D}_x\in\mathbf{R}^{N_{\mathrm{N}}\times N_{\mathrm{M}}}$，$\boldsymbol{D}_y\in\mathbf{R}^{N_{\mathrm{N}}\times N_{\mathrm{M}}}$均为差分矩阵，$\mathrm{D}_x\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}$，$\mathrm{D}_y\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}$分别表示$\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}$在$x$，$y$方向上的一阶差分。

将式(5)代入式(2)，得到关于FETV正则的极小化问题：

$$\min_{\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}}\left\{\frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{J}\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}-\delta\boldsymbol{\Phi}\right\|_2^2+\lambda\left\|\mathrm{D}_x\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)\right\|_1+\lambda\left\|\mathrm{D}_y\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)\right\|_1\right\}。\tag{6}$$

2.3 凸非凸有限元全变差正则模型

式(5)的FETV正则可看作是不同方向上的一阶差分的L_1正则，L_1正则虽然能有效地诱导解的稀疏性，但会对大系数解产生有偏估计[21]。为了提高解的重构精度，基于凸非凸稀疏正则的构造方法，提出了凸非凸有限元全变差(CNC-FETV)正则模型。该模型表示为

$$\min_{\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}}\left\{\frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{J}\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}-\delta\boldsymbol{\Phi}\right\|_2^2+\lambda\phi_\beta\left[\mathrm{D}_x\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)\right]+\lambda\phi_\beta\left[\mathrm{D}_y\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)\right]\right\},\tag{7}$$

式中：$\phi_\beta\left[\mathrm{D}_x\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)\right]$和$\phi_\beta\left[\mathrm{D}_y\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)\right]$分别是关于$\mathrm{D}_x\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)$和$\mathrm{D}_y\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)$的非凸正则。其具体表达式为

$$\phi_\beta(\boldsymbol{u})=\|\boldsymbol{u}\|_1-\min_{\boldsymbol{t}}\left\{\frac{\beta^2}{2}\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{t}\|_2^2+\|\boldsymbol{t}\|_1\right\},\tag{8}$$

式中：$S_\beta(\boldsymbol{u})=\min_{\boldsymbol{t}}\left\{\frac{\beta^2}{2}\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{t}\|_2^2+\|\boldsymbol{t}\|_1\right\}$是关于$\|\cdot\|_1$的Moreau包络函数；非负参数$\beta$用于控制$\phi_\beta(\boldsymbol{u})$的非凸程度。式(7)中的目标函数整体凸性可由定理1得到。

定理1 记$H_\beta\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)=\frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{J}\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}-\delta\boldsymbol{\Phi}\right\|_2^2+\lambda\phi_\beta\left[\mathrm{D}_x\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)\right]+\lambda\phi_\beta\left[\mathrm{D}_y\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)\right]$，当$\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}-\lambda\beta^2\boldsymbol{D}_x{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_x-\lambda\beta^2\boldsymbol{D}_y{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_y\geqslant 0$时，$H_\beta\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)$是凸函数，当$\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}-\lambda\beta^2\boldsymbol{D}_x{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_x-\lambda\beta^2\boldsymbol{D}_y{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_y>0$时，$H_\beta\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)$是严格凸函数。

证明：

$$\begin{aligned}&H_\beta\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)=\frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{J}\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}-\delta\boldsymbol{\Phi}\right\|_2^2+\lambda\phi_\beta\left[\mathrm{D}_x\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)\right]+\lambda\phi_\beta\left[\mathrm{D}_y\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)\right]=\frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{J}\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}-\delta\boldsymbol{\Phi}\right\|_2^2+\\&\lambda\left\{\left\|\mathrm{D}_x\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)\right\|_1-\min_{\boldsymbol{t}_x}\left[\frac{\beta^2}{2}\left\|\mathrm{D}_x\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)-\boldsymbol{t}_x\right\|_2^2+\left\|\boldsymbol{t}_x\right\|_1\right]\right\}+\lambda\left\{\left\|\mathrm{D}_y\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)\right\|_1-\min_{\boldsymbol{t}_y}\left[\frac{\beta^2}{2}\left\|\mathrm{D}_y\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)-\boldsymbol{t}_y\right\|_2^2+\left\|\boldsymbol{t}_y\right\|_1\right]\right\}=\\&\frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{J}\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}-\delta\boldsymbol{\Phi}\right\|_2^2+\lambda\left\|\mathrm{D}_x\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)\right\|_1-\lambda\min_{\boldsymbol{t}_x}\left[\frac{\beta^2}{2}\left\|\mathrm{D}_x\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)-\boldsymbol{t}_x\right\|_2^2+\left\|\boldsymbol{t}_x\right\|_1\right]+\lambda\left\|\mathrm{D}_y\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)\right\|_1-\\&\lambda\min_{\boldsymbol{t}_y}\left[\frac{\beta^2}{2}\left\|\mathrm{D}_y\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)-\boldsymbol{t}_y\right\|_2^2+\left\|\boldsymbol{t}_y\right\|_1\right]=\max_{\boldsymbol{t}_x,\boldsymbol{t}_y}\left\{\frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{J}\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}-\delta\boldsymbol{\Phi}\right\|_2^2+\lambda\left\|\mathrm{D}_x\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)\right\|_1-\frac{\lambda\beta^2}{2}\left\|\mathrm{D}_x\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)-\boldsymbol{t}_x\right\|_2^2-\lambda\left\|\boldsymbol{t}_x\right\|_1+\right.\\&\left.\lambda\left\|\mathrm{D}_y\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)\right\|_1-\frac{\lambda\beta^2}{2}\left\|\mathrm{D}_y\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)-\boldsymbol{t}_y\right\|_2^2-\lambda\left\|\boldsymbol{t}_y\right\|_1\right\}=\max_{\boldsymbol{t}_x,\boldsymbol{t}_y}\left[\frac{1}{2}\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}-\lambda\beta^2\boldsymbol{D}_x{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_x-\lambda\beta^2\boldsymbol{D}_y{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_y\right)\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}+\lambda\left\|\boldsymbol{D}_x\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)\right\|_1+\right.\\&\left.\lambda\left\|\boldsymbol{D}_y\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)\right\|_1+g\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}},\boldsymbol{t}_x,\boldsymbol{t}_y\right)\right]=\frac{1}{2}\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}-\lambda\beta^2\boldsymbol{D}_x{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_x-\lambda\beta^2\boldsymbol{D}_y{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_y\right)\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}+\lambda\left\|\mathrm{D}_x\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)\right\|_1+\lambda\left\|\mathrm{D}_y\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)\right\|_1+\\&\max_{\boldsymbol{t}_x,\boldsymbol{t}_y}g\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}},\boldsymbol{t}_x,\boldsymbol{t}_y\right),\end{aligned}\tag{9}$$

式中：$g\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}},\boldsymbol{t}_x,\boldsymbol{t}_y\right)=-\left(\boldsymbol{J}\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{\Phi}+\frac{1}{2}\|\delta\boldsymbol{\Phi}\|_2^2+\frac{\lambda\beta^2}{2}\left[\mathrm{D}_x\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)\right]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}_x-\frac{\lambda\beta^2}{2}\left\|\boldsymbol{t}_x\right\|_2^2+\frac{\lambda\beta^2}{2}\left[\mathrm{D}_y\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)\right]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}_y-\lambda\left\|\boldsymbol{t}_x\right\|_1-\frac{\lambda\beta^2}{2}\left\|\boldsymbol{t}_y\right\|_2^2-\lambda\left\|\boldsymbol{t}_y\right\|_1$是关于$\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}$的仿射函数，$\max_{\boldsymbol{t}_x,\boldsymbol{t}_y}g\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}},\boldsymbol{t}_x,\boldsymbol{t}_y\right)$是关于$\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}$的仿射函数的逐点最大值，因此$\max_{\boldsymbol{t}_x,\boldsymbol{t}_y}g\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}},\boldsymbol{t}_x,\boldsymbol{t}_y\right)$是凸函数。$\left\|\mathrm{D}_x\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)\right\|_1$和$\left\|\mathrm{D}_y\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)\right\|_1$是关于$\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}$的$L_1$范数，故也是凸函数。

故要使$H_\beta\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)$是凸函数，只需保证式(9)中第一项是凸函数，即只需$\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}-\lambda\beta^2\boldsymbol{D}_x{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_x-\lambda\beta^2\boldsymbol{D}_y{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_y\geqslant 0$。进而，要使$H_\beta\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)$是严格凸函数，只需保证式(9)中第一项是严格凸函数，即只需$\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}-\lambda\beta^2\boldsymbol{D}_x{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_x-\lambda\beta^2\boldsymbol{D}_y{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_y>0$。

3 ADMM

ADMM[22-23]的思路是通过引入中间变量，将原目标函数分解成几个简单的局部子问题，然后通过交替更新子问题的解得到原目标函数的全局解。对于CNC-FETV正则模型式(7)，引入中间变量$\boldsymbol{v}_x=\mathrm{D}_x\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)$，$\boldsymbol{v}_y=\mathrm{D}_y\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)$，式(7)可转换为增广拉格朗日问题：

$$\begin{aligned}L\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}^n,\boldsymbol{v}_x^n,\boldsymbol{v}_y^n,\boldsymbol{b}_x^n,\boldsymbol{b}_y^n\right)=&\frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{J}\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}-\delta\boldsymbol{\Phi}\right\|_2^2+\lambda\phi_\beta\left(\boldsymbol{v}_x\right)+\left(\boldsymbol{b}_x^{n-1}\right)^{\mathrm{T}}\left[\mathrm{D}_x\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)-\boldsymbol{v}_x^{n-1}\right]+\frac{\theta}{2}\left\|\boldsymbol{v}_x^{n-1}-\mathrm{D}_x\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)\right\|_2^2+\\&\lambda\phi_\beta\left(\boldsymbol{v}_y\right)+\left(\boldsymbol{b}_y^{n-1}\right)^{\mathrm{T}}\left[\mathrm{D}_y\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)-\boldsymbol{v}_y^{n-1}\right]+\frac{\theta}{2}\left\|\boldsymbol{v}_y^{n-1}-\mathrm{D}_y\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)\right\|_2^2,\end{aligned}\tag{10}$$

式中：$\boldsymbol{b}$是拉格朗日乘子；θ是惩罚因子。交替更新$\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}^{n}$，$\boldsymbol{v}_{x}^{n}$，$\boldsymbol{v}_{y}^{n}$，$\boldsymbol{b}_{x}^{n}$，$\boldsymbol{b}_{y}^{n}$可得到式(10)的最优解。

第一步，更新$\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}^{n}$。

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}^{n}=&\arg\min_{\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}}\left[\frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{J}\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}-\delta\boldsymbol{\Phi}\right\|_{2}^{2}+\left(\boldsymbol{b}_{x}^{n-1}\right)^{\mathrm{T}}\mathrm{D}_{x}\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)+\left(\boldsymbol{b}_{y}^{n-1}\right)^{\mathrm{T}}\mathrm{D}_{y}\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)+\frac{\theta}{2}\left\|\boldsymbol{v}_{x}^{n-1}-\mathrm{D}_{x}\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)\right\|_{2}^{2}+\right.\\&\left.\frac{\theta}{2}\left\|\boldsymbol{v}_{y}^{n-1}-\mathrm{D}_{y}\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)\right\|_{2}^{2}\right]=\arg\min_{\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}}\left[\frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{J}\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}-\delta\boldsymbol{\Phi}\right\|_{2}^{2}+\frac{\theta}{2}\left\|\boldsymbol{v}_{x}^{n-1}-\mathrm{D}_{x}\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)-\frac{1}{\theta}\boldsymbol{b}_{x}^{n-1}\right\|_{2}^{2}+\right.\\&\left.\frac{\theta}{2}\left\|\boldsymbol{v}_{y}^{n-1}-\mathrm{D}_{y}\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}\right)-\frac{1}{\theta}\boldsymbol{b}_{y}^{n-1}\right\|_{2}^{2}\right]=\left[\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}+\theta\left(\boldsymbol{D}_{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{x}+\boldsymbol{D}_{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{y}\right)\right]^{-1}\times\\&\left[\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{\Phi}-\theta\boldsymbol{D}_{x}^{\mathrm{T}}\left(\frac{1}{\theta}\boldsymbol{b}_{x}^{n-1}-\boldsymbol{v}_{x}^{n-1}\right)-\theta\boldsymbol{D}_{y}^{\mathrm{T}}\left(\frac{1}{\theta}\boldsymbol{b}_{y}^{n-1}-\boldsymbol{v}_{y}^{n-1}\right)\right]。\end{aligned}\tag{11}$$

第二步，更新$\boldsymbol{v}_{x}^{n}$，$\boldsymbol{v}_{y}^{n}$。

$$\boldsymbol{v}_{x}^{n}=\arg\min_{\boldsymbol{v}_{x}}\left[\lambda\phi_{\beta}\left(\boldsymbol{v}_{x}\right)-\left(\boldsymbol{b}_{x}^{n-1}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_{x}+\frac{\theta}{2}\left\|\boldsymbol{v}_{x}-\mathrm{D}_{x}\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}^{n}\right)\right\|_{2}^{2}\right]=\arg\min_{\boldsymbol{v}_{x}}\left\{\lambda\phi_{\beta}\left(\boldsymbol{v}_{x}\right)+\frac{\theta}{2}\left\|\boldsymbol{v}_{x}-\left[\mathrm{D}_{x}\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}^{n}\right)+\frac{1}{\theta}\boldsymbol{b}_{x}^{n-1}\right]\right\|_{2}^{2}\right\},\tag{12}$$

$$\boldsymbol{v}_{y}^{n}=\arg\min_{\boldsymbol{v}_{y}}\left[\lambda\phi_{\beta}\left(\boldsymbol{v}_{y}\right)-\left(\boldsymbol{b}_{y}^{n-1}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_{y}+\frac{\theta}{2}\left\|\boldsymbol{v}_{y}-\mathrm{D}_{y}\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}^{n}\right)\right\|_{2}^{2}\right]=\arg\min_{\boldsymbol{v}_{y}}\left\{\lambda\phi_{\beta}\left(\boldsymbol{v}_{y}\right)+\frac{\theta}{2}\left\|\boldsymbol{v}_{y}-\left[\mathrm{D}_{y}\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}^{n}\right)+\frac{1}{\theta}\boldsymbol{b}_{y}^{n-1}\right]\right\|_{2}^{2}\right\},\tag{13}$$

式(12)和式(13)的解可看作是凸非凸正则ϕ_{β}的近似点算子，文献[24]给出了近似点算子的迭代解。$\boldsymbol{v}_{x}^{n}$和$\boldsymbol{v}_{y}^{n}$的更新结果分别为

$$\boldsymbol{v}_{x}^{n}=\operatorname{prox}_{\frac{\lambda}{\theta}\phi_{\beta}}\left[\mathrm{D}_{x}\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}^{n}\right)+\frac{1}{\theta}\boldsymbol{b}_{x}^{n-1}\right]=\operatorname{prox}_{\frac{\alpha\lambda}{\theta}\|\cdot\|_{1}}\left\{\left(1-\alpha\right)\boldsymbol{v}_{x}+\alpha\left[\mathrm{D}_{x}\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}^{n}\right)+\frac{1}{\theta}\boldsymbol{b}_{x}^{n-1}\right]+\frac{\alpha\lambda\beta^{2}}{\theta}\left[\boldsymbol{v}_{x}-\operatorname{prox}_{\frac{1}{\beta^{2}}\|\cdot\|_{1}}\left(\boldsymbol{v}_{x}\right)\right]\right\},\tag{14}$$

$$\boldsymbol{v}_{y}^{n}=\operatorname{prox}_{\frac{\lambda}{\theta}\phi_{\beta}}\left[\mathrm{D}_{y}\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}^{n}\right)+\frac{1}{\theta}\boldsymbol{b}_{y}^{n-1}\right]=\operatorname{prox}_{\frac{\alpha\lambda}{\theta}\|\cdot\|_{1}}\left\{\left(1-\alpha\right)\boldsymbol{v}_{y}+\alpha\left[\mathrm{D}_{y}\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}^{n}\right)+\frac{1}{\theta}\boldsymbol{b}_{y}^{n-1}\right]+\frac{\alpha\lambda\beta^{2}}{\theta}\left[\boldsymbol{v}_{y}-\operatorname{prox}_{\frac{1}{\beta^{2}}\|\cdot\|_{1}}\left(\boldsymbol{v}_{y}\right)\right]\right\},\tag{15}$$

式中：α是迭代步长；$\operatorname{prox}_{\lambda\|\cdot\|_{1}}(\boldsymbol{z})=\arg\min_{\boldsymbol{m}}\left\{\frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{m}\right\|_{2}^{2}+\lambda\left\|\boldsymbol{m}\right\|_{1}\right\}=\max\left\{\left\|\boldsymbol{z}\right\|_{1}-\lambda,0\right\}\cdot\frac{\boldsymbol{z}}{|\boldsymbol{z}|}$是$\mathrm{L}_{1}$范数的近似点算子。

最后，更新$\boldsymbol{b}_{x}^{n}$和$\boldsymbol{b}_{y}^{n}$。

$$\boldsymbol{b}_{x}^{n}=\boldsymbol{b}_{x}^{n-1}+\theta\left[\mathrm{D}_{x}\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}^{n}\right)-\boldsymbol{v}_{x}^{n}\right],\tag{16}$$

$$\boldsymbol{b}_{y}^{n}=\boldsymbol{b}_{y}^{n-1}+\theta\left[\mathrm{D}_{y}\left(\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}^{n}\right)-\boldsymbol{v}_{y}^{n}\right]。\tag{17}$$

综上可得，CNC-FETV的ADMM求解算法的流程为

1）输入$\delta\boldsymbol{\Phi}$，$\boldsymbol{J}$，$\boldsymbol{y}$，ε，$\theta>0$，$\alpha>0$，$\lambda>0$，inner_loop；

2）初始化$\boldsymbol{v}_{x}^{0}=\boldsymbol{v}_{y}^{0}=\boldsymbol{b}_{x}^{0}=\boldsymbol{b}_{y}^{0}=\mathbf{0}$；

3）For $n=1$: inner_loop do；

4）通过(11)式对$\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}^{n}$进行更新；

5）通过式(12)～(15)分别对$\boldsymbol{v}_{x}^{n}$和$\boldsymbol{v}_{y}^{n}$进行更新；

6）通过式(16)～(17)分别对$\boldsymbol{b}_{x}^{n}$和$\boldsymbol{b}_{y}^{n}$进行更新；

7）End for，满足迭代停止准则，$n=1$: inner_loop 或$\frac{\left\|\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}^{n}-\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}^{n-1}\right\|_{1}}{\left\|\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}^{n-1}\right\|_{1}}\leqslant\varepsilon$；

8）输出$\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}^{*}=\delta\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{a}}^{n}$。

4 数值实验

为了验证所提模型的重构效果，对CNC-FETV模型进行二维圆形模拟实验。本实验的设置和文献[12]中一样。所模拟的二维圆形半径为43 mm，背景吸收系数$\mu_{\mathrm{a}}=0.01\ \mathrm{mm}^{-1}$，散射系数$\mu_{\mathrm{s}}=1\ \mathrm{mm}^{-1}$。16个光源被均匀地放置在二维圆形的表面，如图2(a)所示，对其中一个光源施加激励时，剩余的15个光源作为探测器返回对应的边界测量数据。依次轮流对剩余的15个光源施加激励，则可得到240(16×15)个边界测量数据。在二维圆形中加入一个中心节点坐标为(−10 mm，10 mm)、半径为10 mm的异质体，其吸收系数为$\mu_{\mathrm{a}}'=0.03\ \mathrm{mm}^{-1}$。将二维圆形剖分成包含1785个节点和3418个线性三角形的有限元网格，其真实分布如图2(b)所示，白色的部分为异质体，黑色的部分为正常的组织体(即背景组织体)。为了模拟真实的实验数据，与参考文献[3]、[6]、[12]类似，对模拟的数据分别加入0%、1%、2%、3%的高斯随机噪声。

为了比较不同重构模型的性能，以定位误差、峰值信噪比、平均对比度、结构相似性、相对恢复面积作为评价指标，对CNC-FETV正则模型与Tikhonov正则

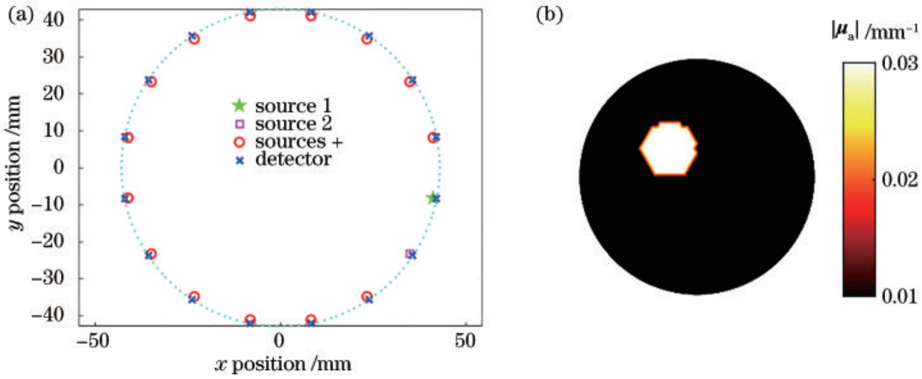

图 2 边界测量数据采集系统与原始目标(异质体)分布。(a)成像区域光源与探测器的放置位置;(b)真实图像

Fig. 2 Boundary measurement data acquisition system and original target (heteroplast) distribution. (a) Location of light source and detector in imaging area; (b) truth image

模型、FETV 正则模型进行比较。

定位误差(L_E)定义为

$$L_E = \| \boldsymbol{X}_t - \boldsymbol{X}_r \|_2, \tag{18}$$

式中:$\boldsymbol{X}_t$和$\boldsymbol{X}_r$分别是真实异质体与重构异质体的中心节点。

平均对比度(A_C)定义为

$$A_C = \left(\sum_{i=1}^{N_n} \boldsymbol{\mu}_{ar,i} / N_n \right) / \boldsymbol{\mu}_{at}, \tag{19}$$

式中:$\boldsymbol{\mu}_{ar,i}$是有限元节点i处恢复的吸收系数值;N_n是重构异质体的节点数;$\boldsymbol{\mu}_{at}$是重构异质体吸收系数的真实值。

峰值信噪比(P_{SNR})定义为

$$P_{SNR} = 10 \cdot \log_{10} \left\{ \frac{\left[\max(\boldsymbol{\mu}_a) \right]^2}{M_{SE}} \right\}, \tag{20}$$

式中:$\max(\boldsymbol{\mu}_a)$是$\boldsymbol{\mu}_a$的最大像素值;M_{SE}是真实图像与重构图像之间的均方误差,定义为$M_{SE} = \sum_{i=1}^{N_n} (\boldsymbol{\mu}_{ar,i} - \boldsymbol{\mu}_{at,i})^2 / N_n$。

结构相似性(S_{SIM})定义为

$$S_{SIM} = \frac{(2\boldsymbol{\mu}_{arm}\boldsymbol{\mu}_{atm} + c_1)(2\sigma_{r,t} + c_2)}{(\boldsymbol{\mu}_{arm}^2 + \boldsymbol{\mu}_{atm}^2 + c_1)(\sigma_r^2 + \sigma_t^2 + c_2)}, \tag{21}$$

式中:$\boldsymbol{\mu}_{arm}$和$\boldsymbol{\mu}_{atm}$分别是$\boldsymbol{\mu}_{ar}$和$\boldsymbol{\mu}_{at}$的均值;σ_r和σ_t分别表示$\boldsymbol{\mu}_{ar}$和$\boldsymbol{\mu}_{at}$的方差;$\sigma_{r,t}$是$\boldsymbol{\mu}_{ar}$和$\boldsymbol{\mu}_{at}$之间的协方差;c_1和c_2是用来维持稳定的常数。

相对恢复面积(R_{RA})定义为

$$R_{RA} = \frac{S_r}{S_t} \times 100\%, \tag{22}$$

式中:S_t和S_r分别表示真实异质体和重构异质体的面积。定位误差等于0,平均对比度和相对恢复面积等于1时,重构图像和真实图像一样。峰值信噪比和结构相似性越大,重构图像和真实图像越相似。

三种模型的重构效果如图3所示。Tikhonov 正则

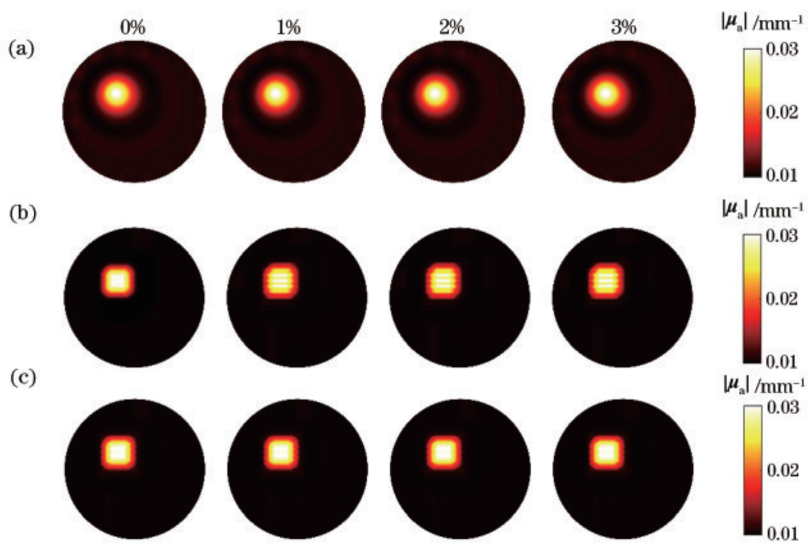

图 3 三种模型在0%~3%噪声水平下的重构效果。(a) Tikhonov 正则模型;(b) FETV 正则模型;(c) CNC-FETV 正则模型

Fig. 3 Reconstruction results of the three models at 0%-3% noise level. (a) Tikhonov regularization model; (b) FETV regularization model; (c) CNC-FETV regularization model

模型虽然能正确地重构异质体的位置，但是得到的图像过度平滑；FETV 正则模型在无噪声情况下不断地重构边界与坐标轴一致的目标，但在1%~3%噪声水平下，其重构的几何体内部会出现与横轴平行的‘折痕’；相比 Tikhonov 正则模型，CNC-FETV 正则模型恢复的背景颜色更接近于黑色，视觉效果优于FETV 正则模型。

为进一步比较三种重构模型的性能，针对不同噪声水平进行了10次重复实验，并将评价指标值用箱线图表示。如图4所示，箱线图中每个框的上边界和下边界分别表示每种评价指标值的上四分位数 Q_3 和下四分位数 Q_1，框的中心线表示中位数，‘+’表示异常值，框外延伸的尾长表示箱线图的上限和下限，对应非异常范围内的最大值和最小值。从图4可以看出，在无噪声情况下，三种重构模型进行10次重复实验得到的评价指标值都没有发生变化。在噪声的影响下，三种模型的 P_{SNR}、A_C、S_{SIM}、L_E 和 R_{RA} 值在一定范围内波动。相比于 Tikhonov 正则模型，FETV 正则模型和 CNC-FETV 正则模型的表现更好，尤其是定位和恢复异质体面积的能力更出色；相比于FETV 正则模型，CNC-

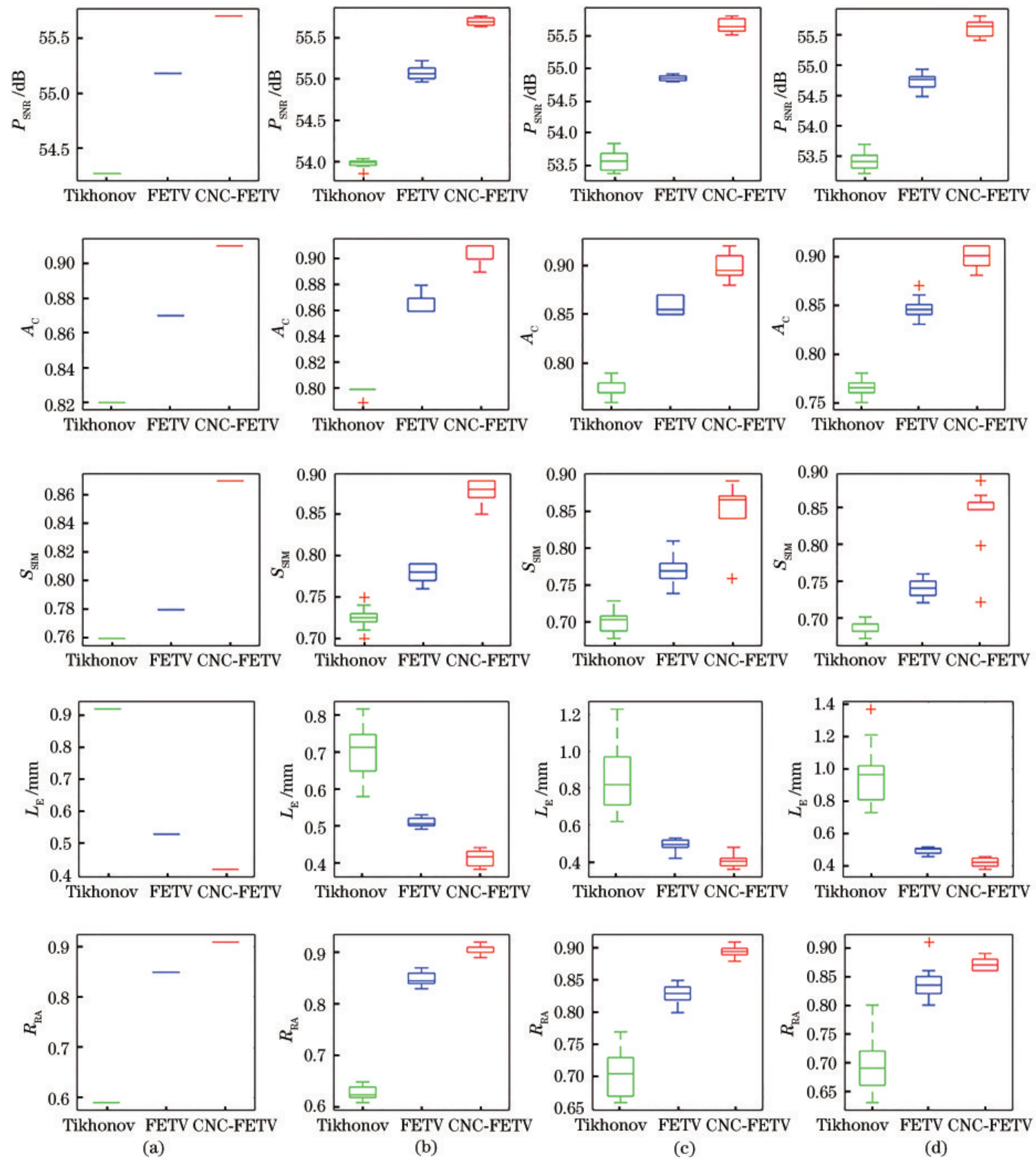

图4 三种模型评价指标值的箱线图。(a) 0%噪声水平；(b) 1%噪声水平；(c) 2%噪声水平；(d) 3%噪声水平
Fig.4 Boxplots of the evaluation criteria values of the three models. (a) 0% noise level; (b) 1% noise level; (c) 2% noise level; (d) 3% noise level

FETV 正则模型重构图像的平均对比度更高，失真更少，结构与真实图像更相似，定位能力更强，在恢复异质体面积时更出色，这和图 3 的重构图像结果相一致。

5 结　论

提出了一种凸非凸有限元全变差正则重构模型。利用有限元方法离散化求解域，得到有限元表示下的全变差正则，进而基于凸非凸策略构造该非凸有限元全变差正则项。并从理论上证明了该非凸正则项能保持目标函数的整体凸性，避免陷入局部最优解，减小重构偏差的结论。为了验证所提新模型的重构效果，与 Tikhonov 正则模型和 FETV 正则模型进行比较，从图像和数值的结果比较得出：无论噪声水平的高或低，CNC-FETV 正则模型在 P_{SNR}、A_{C}、S_{SIM}、L_{E}、R_{RA} 值上均有所提高，也具有更好的视觉效果。所提模型对 DOT 的求解域利用有限元进行表示，但是对于更为复杂的 DOT 模型，如三维 DOT 重构，有限元表示可能没有图表示灵活[25]，今后将进一步开展基于图表示的 DOT 重构。

参 考 文 献

[1] Douiri A, Schweiger M, Riley J, et al. Local diffusion regularization method for optical tomography reconstruction by using robust statistics[J]. Optics Letters, 2005, 30(18): 2439-2441.

[2] Feng J C, Sun Q W, Li Z, et al. Back-propagation neural network-based reconstruction algorithm for diffuse optical tomography[J]. Journal of Biomedical Optics, 2018, 24(5): 051407.

[3] 陈兴稣, 王雪峰, 王元庆. 多小波有限元法在扩散光层析图像重建中的应用研究[J]. 激光杂志, 2016, 37(12): 48-51.
Chen X S, Wang X F, Wang Y Q. Diffuse optical tomography reconstruction algorithm based on multi-wavelet finite element method[J]. Laser Journal, 2016, 37(12): 48-51.

[4] Althobaiti M, Vavadi H, Zhu Q. Diffuse optical tomography reconstruction method using ultrasound images as prior for regularization matrix[J]. Journal of Biomedical Optics, 2017, 22(2): 026002.

[5] Chen C, Tian F H, Liu H L, et al. Diffuse optical tomography enhanced by clustered sparsity for functional brain imaging[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2014, 33(12): 2323-2331.

[6] 田文旭, 杨丹, 魏竹林, 等. 基于改进栈式自编码器的扩散光学层析成像逆问题求解方法研究[J]. 生物医学工程学杂志, 2021, 38(4): 774-782.
Tian W X, Yang D, Wei Z L, et al. Study on the inverse problem of diffuse optical tomography based on improved stacked auto-encoder[J]. Journal of Biomedical Engineering, 2021, 38(4): 774-782.

[7] Kavuri V C, Lin Z J, Liu H L. Comparison of L1 and L2 regularizations in diffuse optical tomography[C]//Biomedical Optics and 3-D Imaging 2012, April 28-May 2, 2012, Miami, Florida. Washington, D. C.: Optica Publishing Group, 2012: BTu3A.22.

[8] Douiri A, Schweiger M, Riley J, et al. Anisotropic diffusion regularization methods for diffuse optical tomography using edge prior information[J]. Measurement Science and Technology, 2007, 18(1): 87-95.

[9] Kavuri V C, Lin Z J, Tian F H, et al. Sparsity enhanced spatial resolution and depth localization in diffuse optical tomography[J]. Biomedical Optics Express, 2012, 3(5): 943-957.

[10] Paulsen K D, Jiang H. Enhanced frequency-domain optical image reconstruction in tissues through total-variation minimization[J]. Applied Optics, 1996, 35(19): 3447-3458.

[11] Konovalov A B, Vlasov V V. Total variation based reconstruction of scattering inhomogeneities in tissue from time-resolved optical projections[J]. Proceedings of SPIE, 2016, 9917: 99170S.

[12] Lu W Q, Duan J M, Orive-Miguel D, et al. Graph- and finite element-based total variation models for the inverse problem in diffuse optical tomography[J]. Biomedical Optics Express, 2019, 10(6): 2684-2707.

[13] Zhang X J, Bai M R, Ng M. Nonconvex-TV based image restoration with impulse noise removal[J]. SIAM Journal on Imaging Sciences, 2017, 10(3): 1627-1667.

[14] Okawa S, Hoshi Y, Yamada Y. Improvement of image quality of time-domain diffuse optical tomography with l_p sparsity regularization[J]. Biomedical Optics Express, 2011, 2(12): 3334-3348.

[15] Selesnick I. Sparse regularization via convex analysis[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2017, 65(17): 4481-4494.

[16] 沈马锐, 李金城, 张亚, 等. 基于非凸全变差正则的核磁共振图像重构算法[J]. 计算机应用, 2020, 40(8): 2358-2364.
Shen M R, Li J C, Zhang Y, et al. Magnetic resonance image reconstruction algorithm via non-convex total variation regularization[J]. Journal of Computer Applications, 2020, 40(8): 2358-2364.

[17] 张方晨, 卢威, 宋浏阳, 等. 基于ADMM的非凸正则化轴承故障诊断方法研究[J]. 矿山机械, 2021, 49(2): 49-55.
Zhang F C, Lu W, Song L Y, et al. Research on non-convex regularization bearing fault diagnosis method based on ADMM[J]. Mining & Processing Equipment, 2021, 49(2): 49-55.

[18] Selesnick I, Lanza A, Morigi S, et al. Non-convex total variation regularization for convex denoising of signals[J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2020, 62(6): 825-841.

[19] 毕波. 扩散光学层析成像重构算法的研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2015.
Bi B. Research on reconstruction methods for diffuse optical tomography[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2015.

[20] 王兵元, 陈玮婷, 马文娟, 等. 基于非负约束 L_1-范数正则化的乳腺扩散光学层析成像重建方法[J]. 光学学报,

2016, 36(11): 1117002.
Wang B Y, Chen W T, Ma W J, et al. Reconstruction method of breast diffuse optical tomography based on non-negative-constraint L_1-norm regularization[J]. Acta Optica Sinica, 2016, 36(11): 1117002.

[21] Selesnick I W, Bayram İ. Enhanced sparsity by non-separable regularization[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2016, 64(9): 2298-2313.

[22] Guo J C, Chen Q H. Image denoising based on non-convex anisotropic total-variation regularization[J]. Signal Processing, 2021, 186: 108124.

[23] Liu J J, Ni A Q, Ni G X. A non-convex $l_1(l_1-l_2)$ model for image restoration with impulse noise[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2020, 378: 112934.

[24] Li J C, Li J L, Xie Z Y, et al. Plug-and-play ADMM for MRI reconstruction with convex non-convex sparse regularization[J]. IEEE Access, 2021, 9: 148315-148324.

[25] 王保云, 李沛. 分析大数据: 非规则结构与图信号[J]. 南京邮电大学学报(自然科学版), 2020, 40(5): 112-116.
Wang B Y, Li P. Understanding big data: irregular structure and graph signal[J]. Journal of Nanjing University of Posts and Telecommunications (Natural Science Edition), 2020, 40(5): 112-116.