

# 量子衍生图像变换与阈值去噪算法研究

王彪, 林少军\*, 赵微微

长安大学电子与控制工程学院, 陕西 西安 710054

**摘要** 为了充分利用图像信息,同时有效地去除图像中的高斯噪声与泊松噪声,提出一种基于薛定谔方程的量子衍生图像变换与阈值去噪算法。将图像看作离散薛定谔方程中的势场,求解定态薛定谔方程,得到的特征函数构成了自适应基。将图像投影到自适应基上,由于噪声主要由高能量对应的高阶特征函数表示,所以采用软阈值函数对投影系数在能量上进行阈值处理,实现去噪。为了减弱量子系统存在的安德森局域化现象对去噪的影响,采用高斯滤波器对图像进行预处理。实验结果验证了所提算法在高斯噪声和泊松噪声场景中均具有良好的去噪效果。

**关键词** 图像处理; 自适应基; 薛定谔方程; 软阈值函数; 安德森局域化

中图分类号 TP391 文献标志码 A

DOI: 10.3788/LOP221059

## Quantum Derived Image Transformation and Threshold Denoising Algorithm

Wang Biao, Lin Shaojun\*, Zhao Weiwei

School of Electronics and Control Engineering, Chang'an University, Xi'an 710054, Shaanxi, China

**Abstract** A quantum derived image transformation and threshold denoising algorithm based on the Schrödinger equation is proposed to make full use of image information and effectively remove Gaussian noise and Poisson noise from the image. In the discrete Schrödinger equation, the image is regarded as the potential field, and the characteristic function obtained by solving the stationary Schrödinger equation constitutes the adaptive basis. The image is then projected onto the adaptive basis. Since the noise is mainly represented by the high-order characteristic function corresponding to the high energy, the soft threshold function is used to deal with the projection coefficient in terms of energy to achieve denoising. To reduce the influence of Anderson localization in the quantum system on denoising, the image is preprocessed with a Gaussian filter. The proposed algorithm has a good denoising effect in Gaussian noise and Poisson noise scenes, according to experimental results.

**Key words** image processing; adaptive basis; Schrödinger equation; soft threshold function; Anderson localization

## 1 引言

由于图像在生成或采集过程中容易受到噪声的干扰,噪声会降低图像质量,对图像处理结果产生很大的影响。作为图像预处理手段,图像去噪能够提高图像后处理的精度与效果。目前,图像去噪广泛应用于生物医学工程<sup>[1]</sup>、航空航天<sup>[2]</sup>及智能交通<sup>[3]</sup>等领域。

空域去噪方法直接对图像的像素进行处理,主要包括维纳滤波<sup>[4]</sup>、均值滤波<sup>[5]</sup>、中值滤波<sup>[6]</sup>和双边滤波<sup>[7]</sup>等。非局部均值(NLM)滤波考虑了图像局部自适应性,去噪效果良好,实时性较差<sup>[8]</sup>。变换域去噪方法将图像从空域转换到变换域,然后在变换域内分离噪声

与有效信息,主要包括离散余弦变换<sup>[9]</sup>、傅里叶变换<sup>[10]</sup>、小波变换<sup>[5]</sup>等方法。其中,小波硬阈值去噪(WHT)与小波软阈值去噪(WST)算法实现简单,去噪效果较好,但是小波算法根据图像特性选取固定基,缺少对图像信息的利用<sup>[11]</sup>。全变分(TV)模型去噪算法利用梯度下降流建立各向异性扩散模型,在去噪的同时保持了良好的图像边缘细节,但存在阶梯效应<sup>[12]</sup>。

考虑自然图像的稀疏性特点,稀疏表示理论利用过完备字典对图像进行表征<sup>[13]</sup>。K-SVD解决了生成和使用过完备字典问题,为图像提供最佳的稀疏表示<sup>[14]</sup>。但是基于稀疏表示的去噪方法需要从样本中学习字典,运算量大<sup>[13-14]</sup>。近年来,学者们利用卷积神经

收稿日期: 2022-03-21; 修回日期: 2022-05-16; 录用日期: 2022-06-07; 网络首发日期: 2022-06-18

基金项目: 陕西省自然科学基金(2019JLZ-06)

通信作者: \*3207954651@qq.com

网络<sup>[15]</sup>、残差网络<sup>[16]</sup>、生成对抗网络<sup>[17]</sup>等研究了基于深度学习的去噪算法,该类算法学习能力强大,去噪效果良好,但是需要根据不同强度的噪声训练相对应的网络模型,灵活性较差。

现有的图像去噪算法主要针对高斯噪声进行研究,相关成果较为成熟。而对于以光子探测为成像基础的医学成像与天文成像系统,图像中经常出现泊松噪声<sup>[18]</sup>。因此,研究泊松去噪算法也很有必要。现有的泊松去噪算法可以分为两种。第一种方法通过方差稳定变换(VST)将泊松噪声转换为高斯噪声进行处理<sup>[18]</sup>。VST中应用较多的是Anscombe变换,文献[19]提出了一种基于Anscombe变换的WHT(AWHT)算法,使传统WHT算法能够应用于泊松去噪。Makitalo等<sup>[20]</sup>将Anscombe变换与传统NLM算法结合,提出了基于Anscombe变换的NLM算法(ANLM),该算法去除泊松噪声较彻底。但是上述基于VST的泊松去噪算法在高强度泊松噪声情况下的去噪效果一般。第二种方法直接针对泊松噪声进行处理。Chowdhury等<sup>[21]</sup>提出了一种基于分数阶全变分(FOTV)的泊松去噪算法,该算法保留了良好的图像边缘细节,而且改善了阶梯效应。文献[22]提出了一种基于泊松无偏风险估计的小波阈值去噪算法(PURE-LET),该算法无需结合VST即可实现去噪,但对高强度泊松噪声的去噪表现欠佳。

近年来,交叉学科的发展促进了量子力学与经典图像处理算法的结合,量子衍生图像处理算法飞速发展<sup>[23-24]</sup>。其中,半经典信号分析(SCSA)将图像视为半经典薛定谔算子的离散势场,利用与负特征值相关的 $L^2$ 归一化特征函数来表示图像,但是SCSA通过采取较大 $\hbar$ 值实现去噪,噪声去除并不彻底<sup>[24]</sup>。本文将借鉴SCSA的思想,提出一种基于定态薛定谔方程(SSE)的量子衍生图像变换与阈值去噪算法。先采用高斯滤波器对含噪图像进行处理,以实现去局域化,然后将处理后的图像视作SSE中的离散势场,通过构建含噪图像的哈密顿矩阵求解SSE的特征值(能量)与特征函数(波函数)。对特征函数按照特征值的大小进行降序排列,得到自适应基,图像在自适应基上进行投影变换,由于噪声主要对应于高阶特征函数,结合经典去噪算法中的软阈值函数处理收缩高阶特征函数上的

投影系数,即可实现去噪。实验结果验证了所提算法在高斯噪声与泊松噪声两种场景下去噪的有效性。

## 2 基础知识

当粒子在势场 $V(\mathbf{r}, t)$ 中运动时,一般情况下的含时薛定谔方程为

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}, t) \right] \psi(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

式中: $\psi(\mathbf{r}, t)$ 为波函数; $m$ 为粒子的质量; $\hbar$ 为普朗克常量; $\nabla$ 为 $\psi(\mathbf{r}, t)$ 的梯度算子。 $V(\mathbf{r}, t)$ 不同,描述粒子运动状态的波函数 $\psi(\mathbf{r}, t)$ 也不相同。当势场 $V(\mathbf{r}, t)$ 不含时间 $t$ 时,有

$$V(\mathbf{r}, t) = V(\mathbf{r}), \quad (2)$$

式中: $V(\mathbf{r})$ 是一个正实值函数。不含时薛定谔方程为

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi_E(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r}) \psi_E(\mathbf{r}) = E \psi_E(\mathbf{r}), \quad \mathbf{H}^n(\mathbb{R}), \quad (3)$$

式中: $E$ 为能量算符; $\psi_E(\mathbf{r})$ 为粒子能量为 $E$ 的波函数; $\mathbf{H}^n(\mathbb{R})$ 表示 $n$ 维Hilbert空间。式(3)也称为 $V(\mathbf{r})$ 中粒子的能量本征方程, $E$ 值为能量本征值,波函数 $\psi_E(\mathbf{r})$ 为能量本征函数。值得注意的是,对于式(3),只有在束缚态边界条件、周期性边界条件和散射态边界条件等情况下所解得的 $\psi_E(\mathbf{r})$ 具有实际的物理意义。

波函数 $\psi_E(\mathbf{r})$ 又称概率幅,波函数的平方代表自由粒子在空间某处出现的概率。根据波函数的统计诠释,粒子出现在空间各点的概率总和应等于1:

$$\int dx dy dz |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 = 1, \quad (4)$$

式中: $|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 dx dy dz$ 代表着 $t$ 时刻在 $\mathbf{r}$ 点附近的体积元 $dx dy dz$ 内找到粒子的概率。

## 3 基于定态薛定谔方程的图像表示与去噪算法研究

### 3.1 基于定态薛定谔方程的自适应基

将图像 $I$ 考虑成在离散薛定谔方程中的势场 $V(I)$ ,并假设有一量子粒子在该势场 $V(I)$ 上进行探索。图1给出了图像的三维曲面图,曲面上的势场强

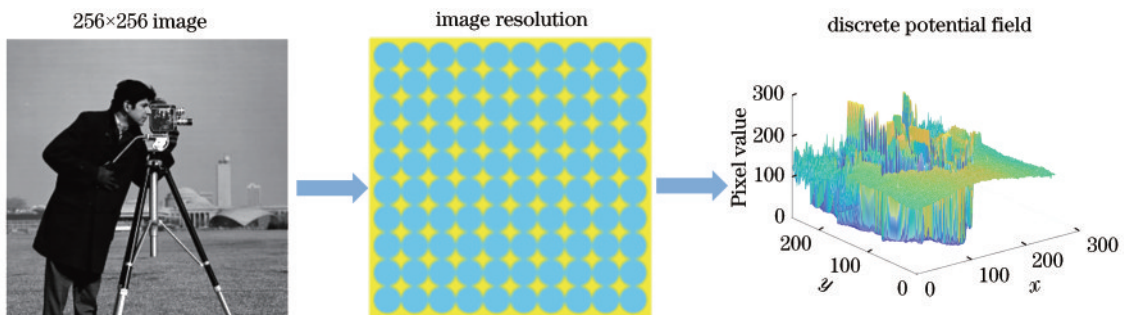


图1 图像作为离散势场的示意图

Fig. 1 Schematic of image as discrete potential field

度为像素值( $z$ 轴),其中的波峰和波谷分别对应高像素值和低像素值。由于图像上噪声的振荡频率与图像上粒子信息的振荡频率相比更高,因此,可以通过上述思想进行图像分解与去噪。

对于图像的离散势场  $V(\mathbf{I})$ ,具有能量  $E$  的粒子在随时间演化的过程中始终处在同一个能量本征态,此时的式(3)称为定态薛定谔方程。本文假设图像系统的波函数满足周期边界性条件  $\psi(y) = \psi(y + L)$ 。利用定态薛定谔方程求解图像变换需要的自适应基。式(3)更一般地表达为

$$\hat{H}\psi_E(\mathbf{r}) = E\psi_E(\mathbf{r}), \quad (5)$$

式中: $\hat{H}$ 为Hamilton算符。

$$\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}). \quad (6)$$

式(5)的解构成了波函数所属的希尔伯特空间的一组完备正交基。在离散势场的情况下,Hamilton算子为一个有限矩阵。

### 3.1.1 Hamilton矩阵的构建

若  $V(\mathbf{r})$  对应于长度为  $N$  的一维信号,Hamilton矩阵  $\mathbf{H}$  的维度为  $N \times N$ ;若  $V(\mathbf{r})$  对应于尺寸为  $N \times N$  的二维图像,则此时 Hamilton 矩阵  $\mathbf{H}$  的维度为  $N^2 \times N^2$ 。

首先考虑一维信号  $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^{N \times 1}$ ,波函数的微分算子与拉普拉斯算子为

$$\begin{cases} (D\psi)_i = \psi(i+1) - \psi(i) \\ (\nabla^2\psi)_i = \psi(i+1) - 2\psi(i) + \psi(i-1) \end{cases}, \quad (7)$$

可得

$$\begin{aligned} (H\psi)_i &= -\frac{\hbar^2}{2m} [\psi(i+1) - 2\psi(i) + \psi(i-1)] + \\ & y(i)\psi(i) = \left[ y(i) + 2\frac{\hbar^2}{2m} \right] \psi(i) - \\ & \frac{\hbar^2}{2m} \psi(i+1) - \frac{\hbar^2}{2m} \psi(i-1), \end{aligned} \quad (8)$$

整理式(8),可得

$$(H\psi)_i = \sum_{j=i-1}^{i+1} H(i,j)\psi(j), \quad i = 1, 2, 3, \dots, N, \quad (9)$$

其中,

$$H(i,j) = \begin{cases} y(i) + 2\frac{\hbar^2}{2m}, & j = i \\ -\frac{\hbar^2}{2m}, & j = i \pm 1 \\ 0, & \text{other} \end{cases}, \quad (10)$$

式中: $y(i)$ 表示信号值的第  $i$  个分量; $H(i,j)$ 是Hamilton矩阵的第  $(i,j)$  个元素。

对于二维图像  $\mathbf{I} \in \mathbf{R}^{N \times N}$ ,波函数的一阶导数为

$$\begin{cases} (\partial_h\psi)(i,j) = \psi(i+1,j) - \psi(i,j), & i < N \\ (\partial_v\psi)(i,j) = \psi(i,j+1) - \psi(i,j), & j < N \end{cases}, \quad (11)$$

式中: $\partial_h$ 和 $\partial_v$ 为水平梯度和垂直梯度。图像边界采用

零填充。则式(6)的 $\nabla^2$ 为

$$\begin{aligned} (\nabla^2\psi)(i,j) &= [\psi(i+1,j) - 2\psi(i,j) + \psi(i-1,j)] + \\ & [\psi(i,j+1) - 2\psi(i,j) + \psi(i,j-1)] = \psi(i+1,j) + \\ & \psi(i-1,j) + \psi(i,j+1) + \psi(i,j-1) - 4\psi(i,j), \end{aligned} \quad (12)$$

可得

$$\begin{aligned} (H\psi)_{i,j} &= -\frac{\hbar^2}{2m} [\psi(i+1,j) + \psi(i-1,j) + \psi(i,j+1) + \\ & \psi(i,j-1) - 4\psi(i,j)] + I(i,j)\psi(i,j) = \\ & \left[ I(i,j) + 4\frac{\hbar^2}{2m} \right] \psi(i,j) - \frac{\hbar^2}{2m} [\psi(i+1,j) + \psi(i-1,j)] - \\ & \frac{\hbar^2}{2m} [\psi(i,j+1) + \psi(i,j-1)]. \end{aligned} \quad (13)$$

将图像转换为一维列向量,假设  $I(i,j)$  对应于图像第  $n$  个元素,  $\psi(i,j)$  为相应的波函数分量,可得

$$\begin{cases} \psi(i+1,j) = \psi(n+N) \\ \psi(i-1,j) = \psi(n-N) \end{cases}, \quad (14)$$

同样,可得

$$\begin{cases} \psi(i,j+1) = \psi(n+1) \\ \psi(i,j-1) = \psi(n-1) \end{cases}, \quad (15)$$

将式(14)与式(15)代入式(13),可得

$$\begin{aligned} (H\psi)_{i,j} &= \left[ I(n) + 4\frac{\hbar^2}{2m} \right] \psi(n) - \frac{\hbar^2}{2m} [\psi(n+N) + \\ & \psi(n-N)] - \frac{\hbar^2}{2m} [\psi(n+1) + \psi(n-1)], \end{aligned} \quad (16)$$

得到的图像的离散Hamilton矩阵为

$$H(i,j) = \begin{cases} I(n) + 4\frac{\hbar^2}{2m}, & i = j \\ -\frac{\hbar^2}{2m}, & i = j \pm 1 \\ -\frac{\hbar^2}{2m}, & i = j \pm N \\ 0, & \text{other} \end{cases}, \quad (17)$$

式中: $I(n)$ 表示图像的第  $n$  个像素; $\mathbf{H} \in \mathbf{R}^{N^2 \times N^2}$ 。上述方法采用有限差分方法,图像边界采用零填充。

将式(17)的离散Hamilton矩阵代入式(5),即可求得特征值  $E$  与特征函数  $\psi_E(\mathbf{r})$ 。为了方便后续的阈值去噪,需要对特征函数  $\psi_E(\mathbf{r})$  按照特征值  $E$  的大小进行降序排列。假设排序后  $E = [E_1, E_2, \dots, E_i, \dots, E_{N^2}]$ ,对应的  $\psi_E(\mathbf{r}) = [\psi_{E_1}, \psi_{E_2}, \dots, \psi_{E_i}, \dots, \psi_{E_{N^2}}]$ ,其中  $E_1$  为最大能量,  $E_{N^2}$  为最小能量。 $\psi_E(\mathbf{r})$  构成了希尔伯特空间的一组完备正交基,即自适应基。

### 3.1.2 自适应基的性质

首先,考虑  $V(\mathbf{r})$  为一维常数势场,式(5)的解具有以下形式:



$$\psi_E(\mathbf{y}) = A \cdot \exp\left[i \frac{\sqrt{2m(E - V)}}{\hbar} \mathbf{y}\right], \quad (18)$$

式中:  $A$  是振幅;  $V$  为常数势场的势值, 且存在  $E > V$  的关系。在不均匀的一维势场的情况下(势场不随时间变化),  $\psi_E(\mathbf{y})$  是局部振荡函数, 其振荡频率与  $\sqrt{E - V}$  成正比。

图 2 给出了两种势场下波函数示意图。对于常数

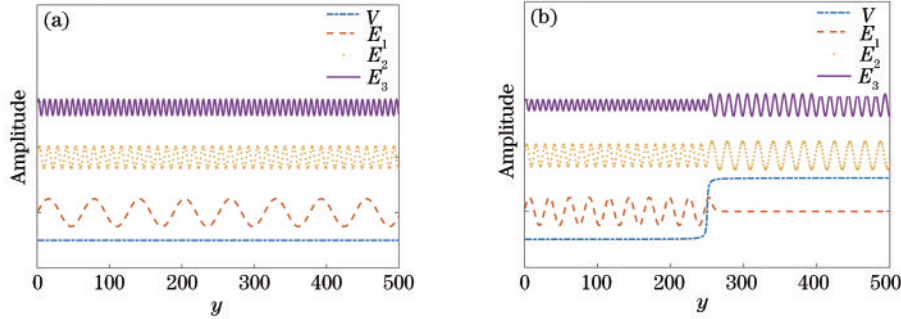


图 2 波函数的特性示意图。(a)常数势场的波函数;(b)不均匀势场的波函数

Fig. 2 Characteristic diagram of wave function. (a) Wave function of constant potential field; (b) wave function of inhomogeneous potential field

对于图像系统, 波函数不满足式(18), 但其仍具有与  $\sqrt{E - V}$  成正比的振荡频率。因此, 对一维势场下波函数的特性分析依然适用于二维势场情况。对自适应基的特性进行总结:

1) 波函数的全局振荡频率与能量  $E$  有关, 其随着能量  $E$  的增加而增加;

2) 波函数的局部振荡频率与  $\sqrt{E - V}$  成正比, 当能量  $E$  给定时, 波函数在高势值区域的振荡频率较低, 而在低势值区域的振荡频率较高。

### 3.2 去局域化

安德森局域化现象为无相互作用的粒子在随机无序势中出现的波在无序介质中不能传播的现象。对于

势场, 如图 2(a) 所示,  $\psi_E(\mathbf{y})$  只随能量  $E$  的变化而变化, 即能量  $E$  越大,  $\psi_E(\mathbf{y})$  的振荡频率越高。对于不均匀势场, 如图 2(b) 所示,  $\psi_E(\mathbf{y})$  的振荡频率仍随能量  $E$  增加而增加, 但在某一固定能量下, 波函数也根据  $V$  的局部值不同而具有不同的振荡频率。因此, 波函数的全局频率随着  $E$  的增加而增加, 但同时也会随着  $V$  的局部值进行局部振荡。当  $E < V$  (无实际的物理意义), 波函数很快趋于 0。

本文的量子系统, 图像中的噪声使图像出现了不同程度的无序, 从而导致安德森局域化现象。该现象会使波函数大多在噪声附近振荡, 在其他位置呈现指数衰减。

为了减弱安德森局域化现象对去噪性能的影响, 在构建自适应基之前, 采用高斯滤波器对含噪图像进行平滑来减弱系统的无序程度, 表达式为

$$G_\sigma = \frac{1}{2\pi\sigma} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right). \quad (19)$$

为验证安德森局域化现象与高斯平滑的作用, 选用  $256 \times 256$  的 cameraman 图像, 加入峰值为 10 的泊松噪声, 然后对图像进行  $\sigma^2 = 6.74$  的高斯平滑, 图 3

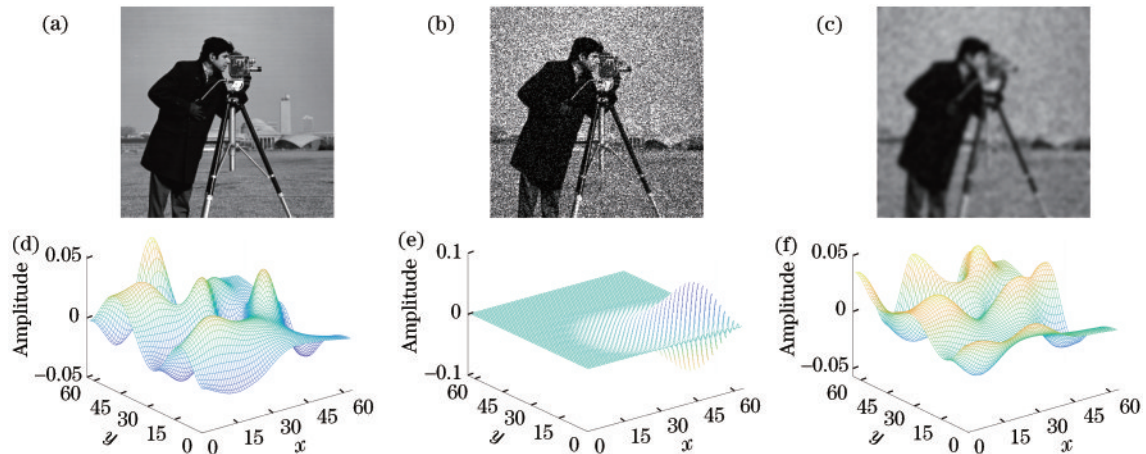


图 3 含噪图像与相应的波函数  $\psi_{E_{20}}$ 。(a)原图像;(b)加入峰值为 10 的泊松噪声;(c)去局域化处理;(d)~(f)对应的波函数  $\psi_{E_{20}}$ 。

Fig. 3 Noisy image and corresponding wave function  $\psi_{E_{20}}$ . (a) Original image; (b) Poisson noise with peak of 10; (c) delocalization; (d)-(f) corresponding wave functions  $\psi_{E_{20}}$ .

给出了自适应基分量  $\phi_{E_m}$  的对比。由图 3 可知,加入噪声后,波函数变成一种指数化衰减的局域化向量。经过高斯平滑处理后,粒子能够探索整个图像,实现了去局域化效果。需要注意,当  $\sigma^2$  过大时,自适应基对图像的表达能力变弱;当  $\sigma^2$  过小时,自适应基将仍保持强局域化,不能有效去除图像的噪声。因此,需要调整合适的参数  $\sigma^2$  以获得较好的去噪结果。

### 3.3 图像投影与阈值去噪

经过上述步骤得到自适应基  $\phi_E(\mathbf{I}) = [\phi_{E_1}, \phi_{E_2}, \dots, \phi_{E_i}, \dots, \phi_{E_{N^2}}] \in \mathbf{R}^{N^2 \times N^2}$ 。将图像  $\mathbf{I} \in \mathbf{R}^{N \times N}$  转换为列向量  $\mathbf{I} \in \mathbf{R}^{N^2 \times 1} = [I_1; I_2; \dots; I_{N^2-1}; I_{N^2}]$ 。在自适应基上进行图像投影,得

$$\mathbf{I} = \phi_E(\mathbf{I})\alpha = \sum_{i=1}^{N^2} \phi_{E_i} \alpha_i \quad (20)$$

经过自适应变换后,投影系数如图 4 所示,区域 A 对应噪声在高阶特征函数上的投影系数,区域 B 对应图像在低阶特征函数上的投影系数。

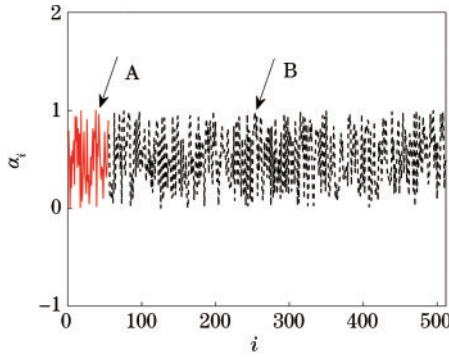
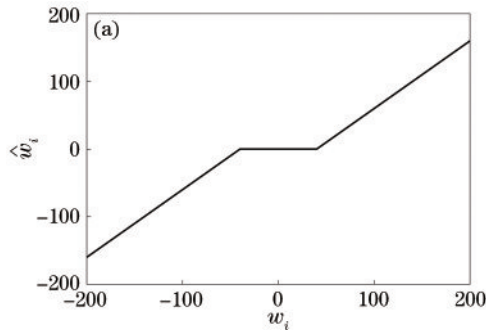


图 4 投影系数分布示意图

Fig. 4 Distribution diagram of projection coefficient

由于噪声主要由高阶特征函数构建,即较大特征值  $E$  对应的特征函数。因此,将区域 A 中的投影系数



置为 0 或收缩即可进行噪声与图像的分离。对于含噪图像  $\mathbf{I}$ ,对投影系数进行阈值处理,图像重建为

$$\hat{\mathbf{I}} = \sum_{i=1}^{N^2} \phi_i \tau_i(\alpha_i), \quad (21)$$

式中:  $\tau_i$  表示阈值操作。目前最经典的阈值函数为小波阈值去噪中的硬阈值函数与软阈值函数。硬阈值函数存在振铃效应,所以本文采取软阈值函数。小波软阈值函数将大于阈值的高频系数的绝对值减去阈值得到的结果作为新的高频系数,将小于阈值的高频系数置为 0,表达式为

$$\hat{w}_i(w_i) = \text{sgn}(w_i) \begin{cases} |w_i| - \lambda, & |w_i| \geq \lambda \\ 0, & |w_i| < \lambda \end{cases}, \quad (22)$$

式中:  $\lambda$  为阈值;  $w_i$  为处理前的小波系数;  $\hat{w}_i$  为阈值处理后的小波系数;  $\text{sgn}(\cdot)$  表示符号函数。软阈值函数曲线如图 5(a) 所示,取  $\lambda = 40$ 。

由于所提算法不是直接对投影系数的阈值,而是对高阶特征函数上的投影系数进行收缩处理,而高阶特征函数  $\phi_{E_i}$  对应于高能量值  $E_i$ ,因此,阈值的处理是以能量值  $E_i$  的大小为阈值准则的。对式(22)的软阈值函数进行处理,得到

$$k_i = \frac{\hat{w}_i(i)}{i} = \text{sgn}(i) \begin{cases} \frac{|i| - \lambda}{i}, & |i| \geq \lambda \\ 0, & |i| < \lambda \end{cases}, \quad (23)$$

$$\tau_i(\alpha_i) = \alpha_i \cdot k_i = \alpha_i \cdot \text{sgn}(i) \begin{cases} \frac{|i| - \lambda}{i}, & |i| \geq \lambda \\ 0, & |i| < \lambda \end{cases}, \quad (24)$$

式中:  $k_i$  为比例系数。式(24)包含  $\alpha_i$  与  $i$  两个变量,传统的阈值估计算法并不适用,所提算法通过经验调节阈值。  $k_i$  曲线如图 5(b) 所示,  $i$  为  $E_i$  的下标,  $i$  越大,能量  $E_i$  越大。由于本文的图像系统中  $E_i > V \geq 0$ ,所以图 5(b) 中仅给出了  $i > 0$  时的曲线。

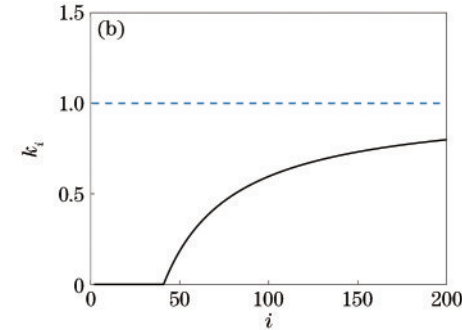


图 5 阈值函数曲线。(a)传统软阈值函数;(b)阈值比例因子

Fig. 5 Threshold function curve. (a) Traditional soft threshold function; (b) threshold scale factor

### 3.4 算法整体流程

结合上述内容,可得所提算法的基本流程如下:

- 1) 输入含噪图像  $\mathbf{I}$ ,选择  $\hbar^2/2m$  和  $\sigma^2$  参数;
- 2) 为了消除安德森局域化现象对去噪的影响,对图像进行高斯平滑,获得平滑图像  $\mathbf{I}_1$ ;

- 3) 通过式(17)构建图像的哈密顿矩阵,然后通过式(5)得到  $\mathbf{I}_1$  的特征值与特征函数,对特征函数按照特征值的大小进行降序排列,得到最终的自适应基  $\phi_E(\mathbf{I}_1)$ ;

- 4) 对图像  $\mathbf{I}$  在自适应基  $\phi_E(\mathbf{I}_1)$  上进行投影,通过



式(20)计算投影系数  $\alpha_i$ ;

5) 通过式(24)对  $\alpha_i$  在能量上进行软阈值处理;

6) 最后,通过式(21)进行图像重建,得到去噪后的图像  $\hat{I}$ 。

## 4 实验结果与分析

### 4.1 超参数 $\hbar^2/2m$ 对去噪的影响

薛定谔方程中的  $\hbar^2/2m$  为普朗克常数与粒子质量的比值,在所提算法中  $\hbar^2/2m$  是可调节的自由参数。研究不同  $\hbar^2/2m$  对图像去噪的影响。实验平台为 Intel Core i7-10750H, 2.60 GHz CPU, 16 GB 内存, 64 位 Win10 操作系统, NVIDIA C2050 GPU, 采用的仿真软件为 MATLAB 2018b。选取 Lena 图像,添加均值为 0、

方差为 0.01 的高斯噪声,不采取高斯平滑预处理。图 6 给出了  $\hbar^2/2m = 0.1, 1, 3, 15$  下的去噪效果对比。

从视觉效果上看:  $\hbar^2/2m = 0.1$  时,去噪效果较差;  $\hbar^2/2m = 15$  时,虽然噪声去除得较彻底,但是如局部放大图所示,眼部轮廓的模糊现象较严重;  $\hbar^2/2m = 1, 3$  时,去除噪声较彻底,同时不会严重地模糊图像细节。当  $\hbar^2/2m$  较小时,即使自适应基对应的特征值(也就是能量  $E$ )很低,局部频率也会变得非常高,在图像的高像素值处自适应基波函数的振荡频率变得很小,所以图像在经过自适应基的投影后会丢失很多高像素值区域的特征。当  $\hbar^2/2m$  较大时,大多数的自适应基对应的特征值比较大,远远大于图像的离散势值  $V$ ,自适应基不能有效地区分高像素值与低像素值。



图 6 不同  $\hbar^2/2m$  下的图像去噪效果(上)与局部放大图(下)

Fig. 6 Image denoising effect under different  $\hbar^2/2m$  (top) and details (bottom)

通过多次对  $\hbar^2/2m$  不同取值下的图像去噪性能的实验验证,  $\hbar^2/2m$  在某个范围内取值后均获得了较好的去噪性能。本文中  $\hbar^2/2m$  超参数的取值根据经验进行调节。

### 4.2 超参数 $\sigma^2$ 对去噪的影响

研究高斯滤波器参数  $\sigma^2$  对去噪性能的影响。以 cameraman 图像为例,加入峰值为 20 的泊松噪声,参数  $\hbar^2/2m$  取 2.5。首先对含噪图像加入  $\sigma^2 = 0, 5, 15, 25$  的高斯滤波,获得去局域化的自适应基,然后采用本文的阈值去噪过程。图 7 给出了不同  $\sigma^2$  下的去噪效果。

从视觉效果进行分析:  $\sigma^2 = 0$  (未加入高斯滤波器)时,图像中仍存在一定量的噪声;而  $\sigma^2 = 5$  与  $\sigma^2 = 15, 25$  时图像的去噪效果更彻底;但是在  $\sigma^2 = 15, 25$  时,去噪结果显示图像存在细节的模糊。因此,当  $\sigma^2$  选择太大时,自适应基对图像的表达能力变弱,导致去噪图像变得模糊;当  $\sigma^2$  太小时,自适应基将仍然保持强局域化,不能有效去除图像的噪声。因此,需要调整合适的参数  $\sigma^2$  以获得较好的去噪结果。

### 4.3 算法总体去噪性能实验

为验证所提算法的图像去噪效果,选取 Lena、



图 7 不同  $\sigma^2$  下的去噪效果(上)与局部放大图(下)

Fig. 7 Image denoising effect under different  $\sigma^2$  (top) and details (bottom)

cameraman 与 house 图像,对图像分别加入不同强度的高斯噪声与泊松噪声。从主观与客观两方面分析去噪效果,其中客观评价指标包括均方误差(MSE)、峰值信噪比(PSNR)、结构相似性(SSIM)。

所提算法可以看作图像的自适应变换与阈值去噪两部分。对于图像  $I \in \mathbf{R}^{N \times N}$ ,所提算法中自适应变换的运算复杂度为  $O(5N^4 + 9N^2)$ ,阈值去噪的复杂度为  $O(N^2 + N^4)$ ,所以所提算法的复杂度为  $O(6N^4 + 10N^2) = O(N^4)$ 。所提算法的主要运算量在于自适应变换过程的矩阵特征值求解与运算。一般情况下小波变换的复杂度为  $O(N^2 \log_2 N^2)$ ,所提算法的自适应变

换在运算复杂度上高于小波变换,本文在 MATLAB 中调用 GPU 的 CUDA9.1 加速矩阵运算。

#### 4.3.1 主观评价

对所提算法与 SCSA<sup>[24]</sup>、WHT<sup>[11]</sup>、WST<sup>[11]</sup>、TV1<sup>[12]</sup> 与 NLM<sup>[8]</sup> 进行对比,其中,WST 与 WHT 采用全局阈值法选取阈值,TV1 为文献[12]中针对高斯噪声的全变分去噪算法。图 8 给出了 cameraman 图像在均值为 0、方差为 0.01 的高斯噪声下的去噪效果,图 9 给出了 Lena 图像在均值为 0、方差为 0.005 的高斯噪声下的去噪效果。



图 8 均值为 0、方差为 0.01 的高斯噪声下的去噪效果。(a)原图像;(b)含噪图像;(c) SCSA;(d) WHT;(e) WST;(f) TV1;(g) NLM;(h)所提算法

Fig. 8 Denoising effect under Gaussian noise with mean value of 0 and variance of 0.01. (a) Original image; (b) noisy image; (c) SCSA; (d) WHT; (e) WST; (f) TV1; (g) NLM; (h) proposed algorithm



图 9 均值为 0、方差为 0.005 的高斯噪声下的去噪效果。(a)原图像;(b)含噪图像;(c) SCSA;(d) WHT;(e) WST;(f) TV1;(g) NLM;(h)所提算法

Fig. 9 Denoising effect under Gaussian noise with mean value of 0 and variance of 0.005. (a) Original image; (b) noisy image; (c) SCSA; (d) WHT; (e) WST; (f) TV1; (g) NLM; (h) proposed algorithm



由图 8 与图 9 可知:经过 SCSA 去噪后的图像仍存在大量噪声,去噪不彻底;NLM 对图像中的高斯噪声去除得最彻底,但是在高强度泊松噪声情况下存在较严重的细节模糊现象,如图 8(g)所示;TV1 不仅有效地去除了高斯噪声,而且保留了较好的图像细节;WHT 与 WST 均有效地去除了图像中的噪声,但是 WHT 中存在振铃效应,此外,WHT 与 WST 属于传统变换域阈值去噪算法,在去除噪声的同时会丢失部分图像细节;所提算法的去噪程度与 WHT 和 WST 相近,并且不存在振铃效应,所提算法在本质上属于变换域阈值去噪算法,同样需要在噪声去除与细节保持之间进行权衡。

泊松噪声为信号相关噪声,在图像高像素值区域

具有更高强度的泊松噪声(主要对应于最高阶特征函数)。图像的高像素信息主要对应于低阶特征函数,因此,阈值函数能够更有效地分离泊松噪声与图像信息。

图 10 为在峰值为 100 的泊松噪声下对 Lena 图像的去噪效果,图 11 为在峰值为 10 的泊松噪声下对 house 图像的去噪效果。对所提算法与 PURE-LET<sup>[22]</sup>、AWHT<sup>[19]</sup>、TV2<sup>[21]</sup>、FOTV<sup>[21]</sup>与 ANLM<sup>[20]</sup>算法进行对比,其中,TV2 为文献[21]中针对泊松噪声的 TV 算法。

由图 10 可知:在低强度泊松噪声情况(峰值为 100)时,FOTV 与 ANLM 获得的去噪效果最好;所提算法的去噪效果优于 TV2、PURE-LET 与 AWHT;此外,TV2 与 FOTV 对图像细节的保持程度最高,所提算法的细节保持程度优于 PURE-LET 和 AWHT。由



图 10 峰值为 100 的泊松噪声下的去噪效果。(a) Lena; (b) 含噪图像; (c) PURE-LET; (d) AWHT; (e) TV2; (f) FOTV; (g) ANLM; (h) 所提算法

Fig. 10 Denoising effect under Poisson noise with peak value of 100. (a) Lena; (b) noisy image; (c) PURE-LET; (d) AWHT; (e) TV2; (f) FOTV; (g) ANLM; (h) proposed algorithm

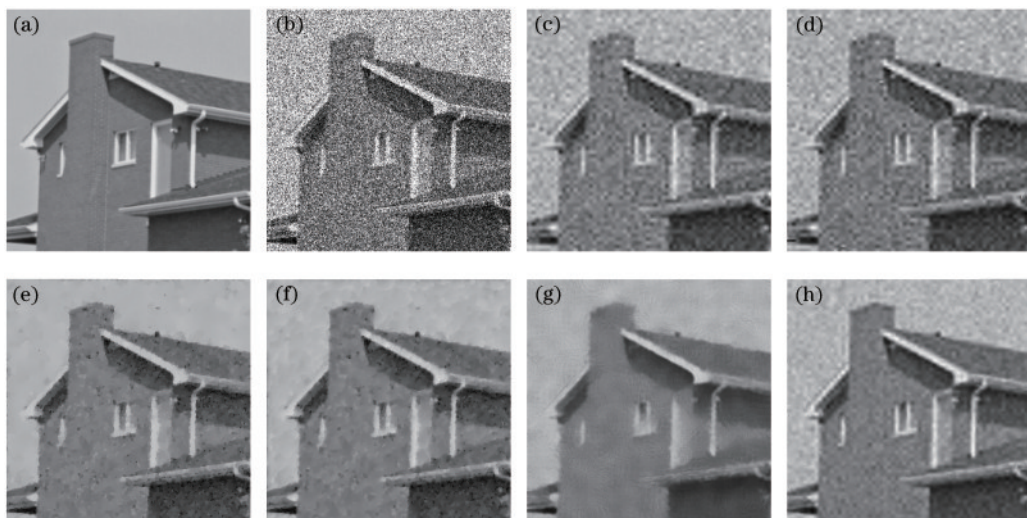


图 11 峰值为 10 的泊松噪声下的去噪效果。(a) house; (b) 含噪图像; (c) PURE-LET; (d) AWHT; (e) TV2; (f) FOTV; (g) ANLM; (h) 所提算法

Fig. 11 Denoising effect under Poisson noise with peak value of 10. (a) house; (b) noisy image; (c) PURE-LET; (d) AWHT; (e) TV2; (f) FOTV; (g) ANLM; (h) proposed algorithm



图 11 可知:在高强度泊松噪声情况(峰值为 10)时, FOTV 与所提算法获得的去噪效果最好;TV2 与 ANLM 的去噪效果一般;PURE-LET 与 AWHT 并不能有效地去噪,图像中依然存在大量噪声。可以看出,结合 VST 中 Anscombe 变换的 ANLM 与 AWHT 在高强度泊松噪声情况下的去噪表现变差,这是由于在泊松噪声强度较高时将其近似为高斯噪声来处理并不准确。此外,TV2 与 FOTV 对图像细节的保持程度最高,所提算法的细节保持程度优于 PURE-LET、AWHT 与 ANLM。

整体来说,可以看出所提算法在低强度泊松噪声情况下的去噪能力优于 PURE-LET、AWHT 与 TV2,在高强度泊松噪声情况下的去噪能力优于 PURE-LET、AWHT、ANLM 与 TV2。在图像细节的保持能力方面,所提算法与 TV2 与 FOTV 存在一定差距。结果表明所提算法在泊松去噪场景下获得了良好的去噪效果,尤其在高强度泊松噪声下,与结合了 VST 的 Anscombe 变换的 ANLM 与 AWHT 相比,所提算法去噪更彻底,并且保留了主要的图像特征。

#### 4.3.2 客观评价

表 1 给出了不同算法的运算时间。可以看出:

NLM 的运算时间最长,在 30 s 以上,算法实时性较差;高斯噪声下,WST 和 WHT 的运算时间在 0.1 s 内,算法实时性最好;所提算法在两种去噪场景下的运算时间均在 1 s 内,算法的实时性较好。

为了更客观地评价所提算法的去噪性能,表 2 与表 3 给出了高斯去噪与泊松去噪场景下不同算法处理后图像的 MSE、PSNR 与 SSIM 指标。MSE 的值越小或 PSNR 的值越大,说明图像的失真程度越小;SSIM 的值越大,说明去噪前后图像的相似性越高,视觉效果越好。

由表 2 可知:在均值为 0、方差为 0.005 的高斯噪声情况下,所提算法对两幅图像的平均 MSE 为 0.0015,平均 PSNR 为 28.11 dB,平均 SSIM 为 0.76;在均值为 0、方差为 0.01 的高斯噪声下,所提算法的平均 MSE 为 0.0025,平均 PSNR 为 26.20 dB,平均 SSIM 为 0.70。可以看出,所提算法的平均指标优于 SCSA,与 WHT 和 WST 接近,与 TV1 与 NLM 算法相比存在一定差距。综合主观与客观评价,所提算法能够有效地去除图像中的高斯噪声,去噪效果优于 SCSA,与 WHT 和 WST 相近,不存在阶梯效应,但与 TV1 和 NLM 存在差距。

表 1 不同算法的运算时间

Table 1 Operation time of different algorithms

unit: s

Noise type	Noise intensity	WHT	WST	SCSA	TV1	NLM	Proposed algorithm
Gaussian noise	0.005 variance	0.05	0.04	5.91	3.75	33.02	0.27
	0.01 variance	0.07	0.09	6.05	4.23	34.10	0.54
Poisson noise	$p_{\text{peak}}=10$	0.89	0.28	13.89	11.64	35.75	0.58
	$p_{\text{peak}}=100$	1.57	0.21	11.22	9.23	34.26	0.25

表 2 去噪效果对比(高斯噪声)

Table 2 Comparison of denoising effect (Gaussian noise)

Image	Algorithm	Gaussian noise (0.005 variance)			Gaussian noise (0.01 variance)		
		MSE	PSNR /dB	SSIM	MSE	PSNR /dB	SSIM
Lena	Noisy image	0.0050	23.03	0.46	0.0100	20.01	0.34
	WHT	0.0017	28.64	0.74	0.0026	25.84	0.72
	WST	0.0015	28.18	0.77	0.0025	26.01	0.71
	SCSA	0.0019	26.82	0.73	0.0031	24.90	0.60
	TV1	0.0010	29.10	0.80	0.0016	27.55	0.75
	NLM	0.0010	29.02	0.86	0.0014	28.25	0.81
	Proposed algorithm	0.0016	28.07	0.76	0.0025	26.25	0.71
cameraman	Noisy image	0.0050	23.34	0.44	0.0100	20.36	0.34
	WHT	0.0015	28.11	0.74	0.0024	25.86	0.68
	WST	0.0013	27.96	0.75	0.0023	25.76	0.67
	SCSA	0.0017	25.98	0.64	0.0028	24.18	0.57
	TV1	0.0014	28.52	0.80	0.0018	27.26	0.73
	NLM	0.0016	27.99	0.83	0.0020	27.01	0.76
	Proposed algorithm	0.0013	28.15	0.75	0.0024	26.15	0.69

表 3 去噪效果对比(泊松噪声)  
Table 3 Comparison of denoising effect (Poisson noise)

Image	Algorithm	Poisson noise ( $p_{\text{peak}}=10$ )			Poisson noise ( $p_{\text{peak}}=100$ )		
		MSE	PSNR /dB	SSIM	MSE	PSNR /dB	SSIM
house	Noisy image	0.0415	13.82	0.12	0.0050	18.13	0.39
	PURE-LET	0.0045	23.67	0.50	0.0010	29.13	0.72
	AWHT	0.0038	24.68	0.49	0.0009	29.43	0.73
	TV2	0.0033	24.76	0.58	0.0011	29.25	0.76
	FOTV	0.0027	25.51	0.63	0.0007	30.12	0.81
	ANLM	0.0034	24.47	0.64	0.0005	32.58	0.85
	Proposed algorithm	0.0029	25.37	0.60	0.0010	30.05	0.79
Lena	Noisy image	0.0398	13.99	0.17	0.0046	23.36	0.49
	PURE-LET	0.0049	23.15	0.53	0.0019	27.73	0.78
	AWHT	0.0045	23.79	0.53	0.0017	27.97	0.79
	TV2	0.0036	24.13	0.62	0.0014	29.27	0.80
	FOTV	0.0033	24.65	0.68	0.0010	30.11	0.85
	ANLM	0.0038	24.08	0.64	0.0009	30.19	0.87
	Proposed algorithm	0.0034	24.92	0.65	0.0012	29.63	0.83

由表 3 可知:在峰值为 10 的泊松噪声情况下, FOTV 与所提算法获得了高的 MSE 与 PSNR 指标,说明 FOTV 与所提算法具有更强的去噪能力,在高强度泊松去噪场景下,所提算法的平均指标优于 PURE-LET、AWHT 与 TV2;在峰值为 100 的泊松噪声情况下,所提算法的平均指标优于 PURE-LET、AWHT 与 TV2,而 FOTV 和 ANLM 算法的去噪指标更优。综合主观与客观评价,所提算法在泊松去噪场景下获得了良好的去噪效果,尤其在高强度泊松噪声情况下,所提算法的去噪表现优于 PURE-LET、AWHT、TV2 与 ANLM。

由上述实验可知:所提算法在高斯去噪场景的去噪效果优于 SCSA,与 WHT 与 WST 相近,并且不存在 WHT 中的振铃效应;在泊松去噪场景下的去噪效果优于 PURE-LET、AWHT 与 TV2,尤其在高强度泊松噪声情况下所提算法仍具有较强的去噪能力,去噪效果还优于结合了 Anscombe 变换的 ANLM。

## 5 结 论

提出了一种基于薛定谔方程的量子衍生图像变换与阈值去噪方法。借鉴 SCSA 的思想,将图像视作定态薛定谔方程中的离散势场,定态薛定谔方程的特征函数即为自适应基。与小波变换根据图像特征选择相应的固定基不同,所提算法利用图像自身信息获得自适应基。考虑安德森局域化现象,采用高斯滤波器对图像进行平滑预处理,提升了去噪性能。对图像在自适应基上进行投影后,对投影系数进行软阈值处理,实现去噪的目的。实验结果表明所提算法能够有效地去除图像中的高斯噪声与泊松噪声,并且无需结合方差稳定变换实现了良好的泊松去噪效果。

## 参 考 文 献

- [1] 吴京城,施露露,杜亚南,等. 基于双重高斯滤波的细胞图像快速分割方法[J]. 激光与光电子学进展, 2022, 59(2): 0210002.  
Wu J C, Shi L L, Du Y N, et al. Fast segmentation method of cell image based on dual-Gaussian filtering[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2022, 59(2): 0210002.
- [2] 谢志华,刘晶红,孙辉,等. 可见光图像与合成孔径雷达图像的快速配准[J]. 激光与光电子学进展, 2020, 57(6): 062803.  
Xie Z H, Liu J H, Sun H, et al. Fast registration of visible light and synthetic aperture radar images[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2020, 57(6): 062803.
- [3] 李维刚,樊响,梅洋,等. 基于车载激光点云的道路标线提取方法[J]. 中国激光, 2022, 49(7): 0710001.  
Li W G, Fan X, Mei Y, et al. Road marking extraction method based on vehicle laser point cloud[J]. Chinese Journal of Lasers, 2022, 49(7): 0710001.
- [4] Fan W Q, Xiao W S, Xiao W S. Image denoising based on wavelet thresholding and Wiener filtering in the wavelet domain[J]. The Journal of Engineering, 2019, 2019(19): 6012-6015.
- [5] 胡晋山,付昱凯,康建荣,等. 一种改进的小波域均值滤波算法[J]. 测绘科学, 2021, 46(9): 55-60.  
Hu J S, Fu Y K, Kang J R, et al. An improved wavelet domain mean filtering algorithm[J]. Science of Surveying and Mapping, 2021, 46(9): 55-60.
- [6] 黄文笔,战荫伟,陈家益,等. 改进的自适应中值滤波算法[J]. 计算机系统应用, 2018, 27(10): 183-188.  
Huang W B, Zhan Y W, Chen J Y, et al. Improved adaptive median filtering algorithm[J]. Computer Systems & Applications, 2018, 27(10): 183-188.
- [7] Gavaskar R G, Chaudhury K N. Fast adaptive bilateral filtering[J]. IEEE Transactions on Image Processing,



- 2019, 28(2): 779-790.
- [8] Arabi H, Zaidi H. Non-local mean denoising using multiple PET reconstructions[J]. *Annals of Nuclear Medicine*, 2021, 35(2): 176-186.
- [9] 叶蒙蒙, 胡晋滨, 王雪津, 等. 基于双目神经元响应的无参考立体图像质量评价[J]. *激光与光电子学进展*, 2021, 58(24): 2410007.  
Ye M M, Hu J B, Wang X J, et al. No-reference stereoscopic image quality assessment based on binocular neuron response[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2021, 58(24): 2410007.
- [10] Wahab M F, Gritti F, O'Haver T C. Discrete Fourier transform techniques for noise reduction and digital enhancement of analytical signals[J]. *TrAC Trends in Analytical Chemistry*, 2021, 143: 116354.
- [11] Koranga P, Singh G, Verma D, et al. Image denoising based on wavelet transform using visu thresholding technique[J]. *International Journal of Mathematical, Engineering and Management Sciences*, 2018, 3(4): 444-449.
- [12] Jalalzai K. Some remarks on the staircasing phenomenon in total variation-based image denoising[J]. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2016, 54(2): 256-268.
- [13] 张俊超, 陈溅来, 罗海波, 等. 基于张量非负稀疏分解的偏振图像插值算法[J]. *光学学报*, 2021, 41(14): 1411001.  
Zhang J C, Chen J L, Luo H B, et al. Polarization image interpolation algorithm via tensor non-negative sparse factorization[J]. *Acta Optica Sinica*, 2021, 41(14): 1411001.
- [14] Chen R, Pu D, Tong Y, et al. Image-denoising algorithm based on improved K-singular value decomposition and atom optimization[J]. *CAAI Transactions on Intelligence Technology*, 2022(1): 117-127.
- [15] 车颖, 冯焱, 郑宏亮. 基于卷积神经网络的超声造影图像去噪方法[J]. *吉林大学学报(理学版)*, 2021, 59(5): 1256-1259.  
Che Y, Feng X, Zheng H L. Denoising method of contrast-enhanced ultrasound image based on convolutional neural networks[J]. *Journal of Jilin University (Science Edition)*, 2021, 59(5): 1256-1259.
- [16] 申兴成, 杨学志, 董张玉, 等. 结合扩张卷积的残差网络 SAR 图像去噪[J]. *测绘科学*, 2021, 46(12): 106-114.  
Shen X C, Yang X Z, Dong Z Y, et al. Residual network combined with dilated convolution for SAR image denoising[J]. *Science of Surveying and Mapping*, 2021, 46(12): 106-114.
- [17] Vo D M, Nguyen D M, Le T P, et al. HI-GAN: a hierarchical generative adversarial network for blind denoising of real photographs[J]. *Information Sciences*, 2021, 570: 225-240.
- [18] Zhang M H, Zhang F Q, Liu Q G, et al. VST-Net: variance-stabilizing transformation inspired network for Poisson denoising[J]. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 2019, 62: 12-22.
- [19] Imoudene W, Boubchir L, Messali Z, et al. Performance evaluation of iterative denoising algorithm based on variance stabilizing transform and wavelet thresholding [C]//2019 International Conference on Advanced Electrical Engineering (ICAEE), November 19-21, 2019, Algiers, Algeria. New York: IEEE Press, 2019.
- [20] Makitalo M, Foi A. Optimal inversion of the Anscombe transformation in low-count Poisson image denoising[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2011, 20(1): 99-109.
- [21] Chowdhury M R, Zhang J, Qin J, et al. Poisson image denoising based on fractional-order total variation[J]. *Inverse Problems & Imaging*, 2020, 14(1): 77-96.
- [22] Ghazouani K, Ellouze N, Moussa I M. Comparative analysis between a variational method and wavelet method PURE-LET to remove poisson noise corrupting CT images[J]. *International Journal of Open Information Technologies*, 2018, 6(1): 25-34.
- [23] Chakraborty S, Shaikh S H, Chakrabarti A, et al. An image denoising technique using quantum wavelet transform[J]. *International Journal of Theoretical Physics*, 2020, 59(11): 3348-3371.
- [24] Kaisserli Z, Laleg-Kirati T M, Lahmar-Benbernou A. A novel algorithm for image representation using discrete spectrum of the Schrödinger operator[J]. *Digital Signal Processing*, 2015, 40: 80-87.