

## 激光与光电子学进展

## 基于光学参量放大器反馈的非线性干涉仪

符婧<sup>1</sup>, 王绪彤<sup>1</sup>, 刘胜帅<sup>1,5\*\*</sup>, 荆杰泰<sup>1,2,3,4\*</sup><sup>1</sup>华东师范大学物理与电子科学学院精密光谱科学与技术国家重点实验室, 上海 200062;<sup>2</sup>中国科学院超强激光科学卓越创新中心, 上海 201800;<sup>3</sup>山西大学极端光学协同创新中心, 山西 太原 030006;<sup>4</sup>南京大学固体微结构国家实验室, 江苏 南京 210093;<sup>5</sup>华东师范大学重庆研究所重庆精密光学重点实验室, 重庆 401120

**摘要** 高精度的干涉仪在精密测量领域有着非常重要的作用。相位估计的不确定度通常用来判定一个干涉仪测量的精密程度, 相位估计的不确定度越小意味着相位灵敏度越高。在理论上提出了由光学参量放大器 and 线性光学分束器(BS)组成的非线性干涉仪。基于热<sup>85</sup>Rb原子系综四波混频(FWM)过程的光学参量放大器用来实现干涉仪中光束的合成与分离。BS作为反馈控制器, 通过控制器件的反射率, 来控制FWM过程的出射光返回到入射光端口的比例。与传统干涉仪的相位灵敏度相比, 通过理论计算证明了基于光学参量放大器反馈的非线性干涉仪相位灵敏度更高。本研究结果在量子精密测量领域有着潜在的研究价值。

**关键词** 量子精密测量; 非线性干涉仪; 光学参量放大器; 四波混频; 反馈控制

中图分类号 O436

文献标志码 A

DOI: 10.3788/LOP230743

## Nonlinear Interferometer Based on Optical Parametric Amplifier Feedback

Fu Jing<sup>1</sup>, Wang Xutong<sup>1</sup>, Liu Shengshuai<sup>1,5\*\*</sup>, Jing Jietai<sup>1,2,3,4\*</sup><sup>1</sup>State Key Laboratory of Precision Spectroscopy, Joint Institute of Advanced Science and Technology, School of Physics and Electronic Science, East China Normal University, Shanghai 200062, China;<sup>2</sup>CAS Center for Excellence in Ultra-Intense Laser Science, Shanghai 201800, China;<sup>3</sup>Collaborative Innovation Center of Extreme Optics, Shanxi University, Taiyuan 030006, Shanxi, China;<sup>4</sup>National Laboratory of Solid State Microstructures, Nanjing University, Nanjing 210093, Jiangsu, China;<sup>5</sup>Chongqing Key Laboratory of Precision Optics, Chongqing Institute of East China Normal University, Chongqing 401120, China

**Abstract** High-precision interferometers play a critical role in the field of metrology. The uncertainty of phase estimation can be used to evaluate the precision of an interferometer. The lower the uncertainty of phase estimation, the higher the phase sensitivity. We theoretically propose a nonlinear interferometer composed of an optical parametric amplifier and a linear optical beam splitter (BS). An optical parametric amplifier based on the hot rubidium-85 atomic ensemble four-wave mixing (FWM) process is used to combine and separate the beams in the interferometer. As a feedback controller, the BS controls the proportion of the output light returning to the input light port in the FWM process by controlling the reflectivity of the device. Through theoretical calculations, it is proved that the phase sensitivity of a nonlinear interferometer based on optical parametric amplifier feedback is enhanced compared with that of traditional interferometers. Our research results are expected to have potential applications in the field of quantum metrology.

**Key words** quantum metrology; nonlinear interferometer; optical parametric amplifier; four-wave mixing; feedback control

收稿日期: 2023-02-28; 修回日期: 2023-04-13; 录用日期: 2023-04-20; 网络首发日期: 2023-04-30

**基金项目:** 国家自然科学基金 (12225404, 11874155, 91436211, 11374104, 12174110)、上海市教育委员会创新计划 (2021-01-07-00-08-E00100)、上海市学术研究带头人项目 (22XD1400700)、上海市科学技术委员会基础研究项目 (20JC1416100)、上海市自然科学基金 (17ZR1442900)、闵行领军人才 (201971)、上海市青年科技英才扬帆计划 (21YF1410800)、重庆市自然科学基金 (CSTB2022NSCQ-MSX0893)、上海市政科学与技术重大项目 (2019SHZDZX01)、高等学校学科创新引智计划 (B12024)

通信作者: \*jtjing@phy.ecnu.edu.cn; \*\*ssliu@lps.ecnu.edu.cn

# 1 引言

精密测量是利用先进的技术和方法去追求较高的测量精度<sup>[1-2]</sup>,在现代科学社会中有着重要的作用。量子精密测量是利用量子资源来提高相关物理参数测量的灵敏度<sup>[3-6]</sup>,并突破了用经典资源所能达到的灵敏度<sup>[7]</sup>,在相位估计、量子传感<sup>[8]</sup>和引力波探测<sup>[9-12]</sup>等方面都有着重要应用。干涉仪具有较好的稳定性和较高的精密精度,其在量子精密测量领域有着很重要的作用。经典光学干涉仪的相位灵敏度将会受到散粒噪声 $1/\sqrt{N}$ 的限制, $N$ 为干涉仪内部的平均光子数<sup>[13-14]</sup>,此限制也被称为散粒噪声极限(SNL),马赫-曾德尔干涉仪(MZI)是一个典型例子。随着科技不断发展,测量精度也需要进一步提高,打破SNL变成一个值得深入研究的方向。Caves<sup>[13]</sup>最早提出了在不增加输入激光功率的情况下,采用量子态注入的MZI来打破经典极限的可能。Yurke等<sup>[15]</sup>最早在1986年提出SU(1,1)干涉仪,是在MZI的基础上对硬件结构部分进行优化,用参量过程来替代线性光学分束器,使得相位灵敏度打破SNL。

反馈系统通常被用在动力学系统<sup>[16-17]</sup>和量子系统<sup>[18-19]</sup>。为使系统达到理想的效果,反馈系统是通过调控系统的输出端口信号返回到输入端口,进而增强系统的稳定性和减少额外噪声的输入<sup>[20-22]</sup>。本研究基于光学参量放大器反馈模型的非线性干涉仪<sup>[23]</sup>,将光学参量放大器和反馈系统结合起来,使用基于热<sup>85</sup>Rb原子系综中的四波混频(FWM)过程作为非简并光学参量放大器,使其中一束出射光通过线性光学分束器(BS),调节反射率使出射光原路返回到入射光端口,实现反馈效果。基于热<sup>85</sup>Rb原子系综中的FWM作为一种非线性过程,在反应过程中,强泵浦光单次通过铷原子池就足以产生较强的非线性效应,装置简化且稳定,有着很好的优势。通过理论计算,该种模型的相位灵敏度能够打破SNL,在精密测量领域有着潜在的研究和应用价值。

## 2 基本原理

### 2.1 马赫-曾德尔干涉仪

传统的MZI原理图如图1所示,两个BS实现干涉仪内部光束的合成与分离,明亮光 $a_1$ 和真空光 $v_1$ 作为输入光,整个过程可表示为

$$\begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{c}_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \exp(-i\phi) & -1 - \exp(-i\phi) \\ 1 + \exp(-i\phi) & -1 + \exp(-i\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{a}_1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

式中: $\hat{b}_1$ 为光束 $b_1$ 的湮灭算符; $\hat{c}_1$ 为光束 $c_1$ 的湮灭算符; $\hat{v}_1$ 为光束 $v_1$ 的湮灭算符; $\hat{a}_1$ 为光束 $a_1$ 的湮灭算符; $\phi$ 为光束 $a_1$ 在光路中发生相应的相位延迟; $i$ 为虚数。计算结果发现输出光场 $b_1$ 和 $c_1$ 受到物理量 $\phi$ 的影响。

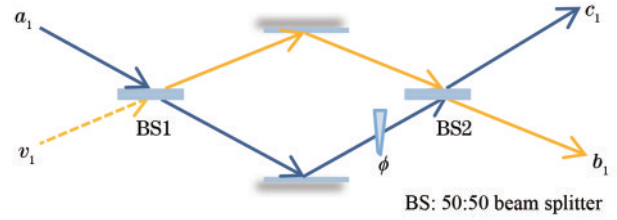


图1 MZI原理图

Fig. 1 Schematic diagram of MZI

### 2.2 基于光学参量放大器反馈的非线性干涉仪

如图2所示,基于光学参量放大器反馈的非线性干涉仪是由FWM过程和一个BS组成,FWM过程作为参量放大器。在此放大过程中,通过向热<sup>85</sup>Rb原子系综中注入一束强泵浦光 $p$ 和一束种子光,种子光被放大,产生一对共轭光。图2中相干光 $a_1$ 作为种子光,通过BS,一部分透射形成光束 $a_3$ ,另外一部分反射形成光束 $c_1$ ,透射光和反射光的比例通过调节BS的反射率实现。通过BS过程的输入输出关系可表示为

$$\begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{k} & \sqrt{1-k} \\ \sqrt{1-k} & -\sqrt{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

式中:光束 $b_2$ 为该BS输入的另外一个端口的入射光; $k$ 为BS的反射率; $\hat{c}_1$ 为光束 $c_1$ 的湮灭算符, $\hat{a}_3$ 为光束 $a_3$ 的湮灭算符, $\hat{a}_1$ 为光束 $a_1$ 的湮灭算符, $\hat{b}_2$ 为光束 $b_2$ 的湮灭算符。光束 $a_3$ 传播过程中发生相应的相位延迟 $\phi$ ,用等式可表示为

$$\hat{a}_2 = \exp(-i\phi)\hat{a}_3, \quad (3)$$

式中: $\hat{a}_2$ 为光束 $a_2$ 的湮灭算符。

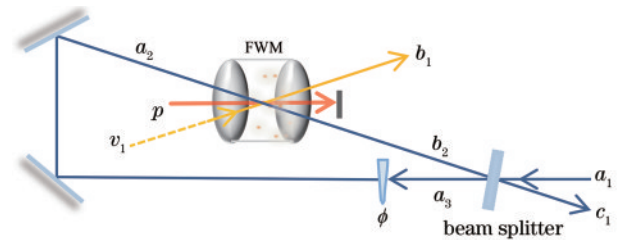


图2 基于光学参量放大器反馈的非线性干涉仪原理图

Fig. 2 Schematic diagram of nonlinear interferometer with feedback model of optical parametric amplifier

相干光 $a_1$ 通过BS后的输出光 $a_2$ 和真空光 $v_1$ 作为参量放大器的输入光,在热<sup>85</sup>Rb原子系综中发生FWM反应,输出光为 $b_1$ 和 $b_2$ 。此参量过程可表示为

$$\begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2^\dagger \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{G} & \sqrt{G-1} \\ \sqrt{G-1} & \sqrt{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{a}_2^\dagger \end{bmatrix}, \quad (4)$$

式中: $G$ 为FWM过程的增益; $\hat{b}_1$ 为光束 $b_1$ 的湮灭算符; $\hat{b}_2^\dagger$ 为光束 $b_2$ 的产生算符; $\hat{v}_1$ 为光束 $v_1$ 的湮灭算符, $\hat{a}_2^\dagger$ 为光束 $a_2$ 的产生算符,输出态 $(\hat{b}_1, \hat{b}_2)$ 取决于 $G$ 。

联立式(2)~式(4),消除中间的湮灭算符  $\hat{a}_3$ 、 $\hat{a}_2$ 、 $\hat{b}_2$ ,得到基于光学参量放大器反馈的干涉仪的输出光场的表达式

$$\begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{c}_1^\dagger \end{bmatrix} = \frac{1}{1 + \sqrt{Gk} \exp(-i\phi)} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_1^\dagger \\ \hat{v}_1 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

式中: $\hat{c}_1^\dagger$ 为光束  $c_1$  的产生算符; $\hat{a}_1^\dagger$ 为光束  $a_1$  的产生算符; $A_{11} = \sqrt{(G-1)(1-k)} \exp(-i\phi)$ ;  $A_{12} = \sqrt{G} + \sqrt{k} \exp(-i\phi)$ ;  $A_{21} = \sqrt{k} + \sqrt{G} \exp(-i\phi)$ ;  $A_{22} = \sqrt{(G-1)(1-k)}$ 。输出光束  $b_1$  和  $c_1$  受到  $k$ 、 $G$ 、 $\phi$  等 3 个变量的影响。

### 2.3 相位灵敏度

一般来讲,测量干涉仪估计内部相位差的效果需要去计算相应的相位灵敏度。计算干涉仪的相位灵敏度是测量通过该仪器光场的输出端口的粒子数。若需要测量某物理量  $o$ ,可以通过误差传播分析,得到干涉仪内部相位估计的不确定度为

$$\Delta\phi^2 = \frac{\langle(\Delta\hat{o})^2\rangle}{|\partial\langle\hat{o}\rangle/\partial\phi|^2}. \quad (6)$$

通过计算得到的相位估计不确定度  $\Delta\phi^2$  越小,意味着该干涉仪的相位灵敏度越高,即测量精度越高。由式(6)可知,被测变量的噪声、相对于干涉仪相位的变化率影响着相位估计不确定度。

## 3 分析与讨论

为了分析基于光学参量放大器反馈模型的非线性干涉仪在测量方面的优势,对其相位不确定度进行探测和分析。通过调节 BS 的透射率,实现对干涉仪反馈的控制。强泵浦光  $p$ ,光子数为  $N$  的相干光  $a_1$  通过 BS,真空光  $v_1$  作为输入态,注入参量放大器中。光束  $a_1$  在传播过程中携带相位信息  $\phi$ ,因此测量干涉仪输出端口  $c_1(\hat{o} = \hat{c}_1^\dagger \hat{c}_1)$ ,并联立式(5)、式(6),计算得基于光学参量放大器反馈的非线性干涉仪内部相位估计的不确定度为

$$\Delta\phi^2 = \frac{\left(1 + 2\sqrt{Gk} \cos\phi + Gk\right)^2 \left[\left(k + 2\sqrt{Gk} \cos\phi + G\right)^2 N + \left(k + 2\sqrt{Gk} \cos\phi + G\right)(1-k)(G-1)(N+1)\right]}{4Gk|\sin\phi|^2(1-k)^2(G-1)^2(N+1)^2}. \quad (7)$$

该干涉仪的相位估计不确定度受到  $k$ 、 $G$ 、 $\phi$  等 3 个变量的影响。

采用同样的方法,测量传统的 MZI 输出端口  $c_1(\hat{o} = \hat{c}_1^\dagger \hat{c}_1)$ ,计算得相位估计的不确定度为

$$\Delta\phi^2 = \frac{2(1 - \cos\phi)}{N|\sin\phi|^2}. \quad (8)$$

由式(8)可知,MZI相位估计的不确定度受到相位延迟  $\phi$  的影响。通过数学计算得  $\Delta\phi^2$  最小为  $1/N$ ,  $\Delta\phi = 1/\sqrt{N}$ ,即 MZI 最好的情况下相位不确定度可以达到 SNL,此时相位灵敏度最高。

进一步分析变量  $k$ 、 $G$ 、 $\phi$  对相位灵敏度的影响,如图 3~图 5 所示。横坐标表示  $\phi$  的连续变化,纵坐标表示相位估计不确定度。将纵坐标  $\Delta\phi^2$  缩放成  $10\lg\Delta\phi^2$ ,使数据更明显直观。在本次研究中,取  $N=100$ 。

由图 3 可知,当  $G=2$  时,在  $k=0.3$ ,  $0.75\pi < \phi < 0.98\pi$ 、 $1.02\pi < \phi < 1.25\pi$  和  $k=0.5$ ,  $0.76\pi < \phi < 1.24\pi$  的范围内,干涉仪的相位灵敏度突破 SNL。由图 4 可知,当  $G=3$  时,在  $k=0.3$ ,  $0.71\pi < \phi < 0.99\pi$ 、 $1.01\pi < \phi < 1.29\pi$  和  $k=0.5$ ,  $0.75\pi < \phi < 0.99\pi$ 、 $1.01\pi < \phi < 1.25\pi$  的范围内,干涉仪的相位灵敏度突破 SNL。由图 5 可知,当  $G=4$  时,在  $k=0.3$ ,  $0.69\pi < \phi < 0.99\pi$ 、 $1.01\pi < \phi < 1.31\pi$  和  $k=0.5$ ,  $0.76\pi < \phi < 0.97\pi$ 、 $1.03\pi < \phi < 1.24\pi$  的范围内,干涉仪的相位灵敏度突破 SNL。通过理论计算,

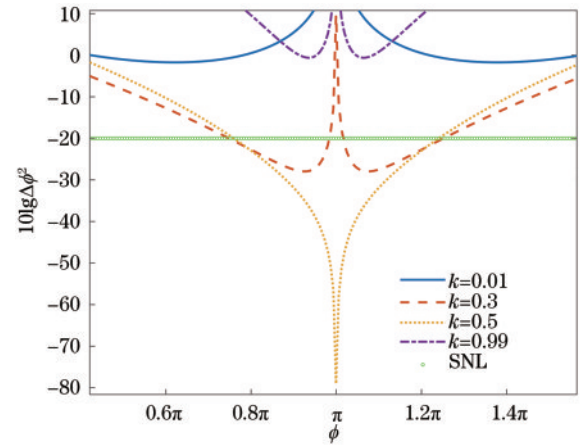


图 3 当  $G=2$  时,相位估计不确定度  $10\lg\Delta\phi^2$  随相位  $\phi$  的变化图  
Fig. 3 Variation of phase estimation uncertainty  $10\lg\Delta\phi^2$  with phase  $\phi$  when  $G=2$

当变量  $G$  一定时,不同的  $k$  有着相应的相位变化范围,在这个范围内基于光学参量放大器反馈模型的干涉仪可以突破 SNL。反馈的效果达到最大或最小时,相位灵敏度不一定最好。取  $k=0.01$ ,即当  $k$  接近于 0 时,表示光束  $a_1$  几乎完全透过 BS,达到完全反馈的状态,此时的相位灵敏度并没有打破 SNL;取  $k=0.99$ ,即当  $k$  接近于 1 时,意味着输入光  $a_1$  几乎都被反射,在没有反馈效果的情况下,相位灵敏度也没有突破 SNL。

通过式(1)计算可知,MZI的输出光场强度  $I_{\text{MZI}}$  为



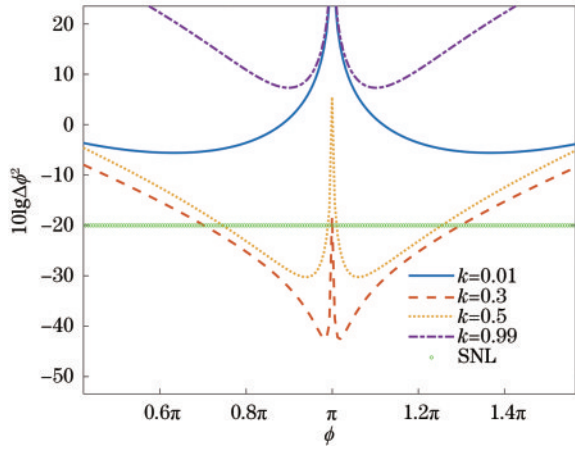


图 4 当  $G = 3$  时, 相位估计不确定度  $10\lg\Delta\phi^2$  随相位  $\phi$  的变化图  
Fig. 4 Variation of phase estimation uncertainty  $10\lg\Delta\phi^2$  with phase when  $G = 3$

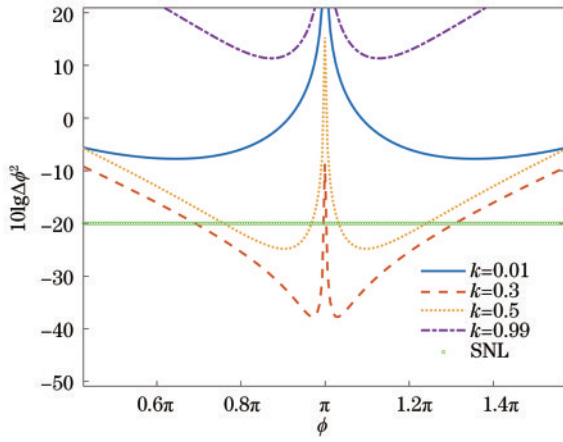


图 5 当  $G = 4$  时, 相位估计不确定度  $10\lg\Delta\phi^2$  随相位  $\phi$  的变化图  
Fig. 5 Variation of phase estimation uncertainty  $10\lg\Delta\phi^2$  with phase  $\phi$  when  $G = 4$

$$I_{\text{MZI}} = 50(1 - \cos\phi). \quad (9)$$

由式(9)可知, 干涉对比度为 1。当使用基于热  $^{85}\text{Rb}$  原子系综中的 FWM 过程作为非简并光学参量放大器时, 通过式(5)计算该干涉仪的输出光场强度为

$$I_{\text{FWM}} = \frac{202\sqrt{Gk} \sin\phi(1-k)(G-1)}{(1+Gk+2\sqrt{Gk} \cos\phi)^2}. \quad (10)$$

随着 BS 反射率  $k$  的变化, 该干涉仪输出光的干涉对比度如图 6 所示。在不同增益大小的情况下, 随着  $k$  值的变化, 基于光学参量放大器反馈模型的非线性干涉仪有着不同的干涉对比度。

在反馈系统中, 循环注入的光束会增强参量放大器输出光束的量子关联, 但 BS 其他注入端口同时会引入真空态噪声, 破坏了 FWM 产生的关联光束的量子属性<sup>[23]</sup>。每一个  $G$  会达到相应的反馈平衡, 在该平衡下不同的  $k$  值对应着不同的相位延迟范围, 在这个范围内基于光学参量放大器反馈模型的干涉仪相位灵敏度高于 MZI 的相位灵敏度, 打破了 SNL。

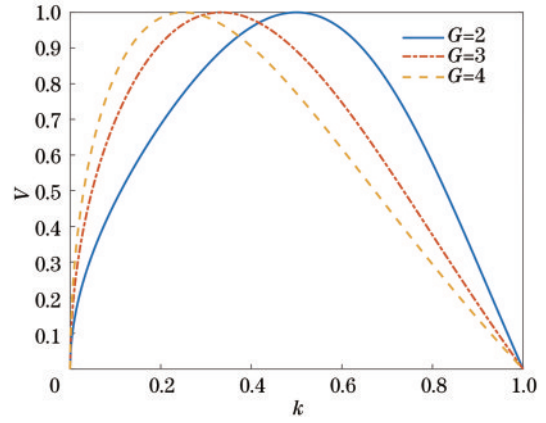


图 6 当  $G = 2, G = 3, G = 4$  时, 基于光学参量放大器反馈模型的非线性干涉仪输出光场的干涉对比度  $V$  随  $k$  的变化图  
Fig. 6 Variation of the interference contrast  $V$  of the output light field of a nonlinear interferometer based on the feedback model of an optical parametric amplifier with  $k$  when  $G = 2, G = 3, G = 4$

## 4 结 论

基于光学参量放大器反馈模型的干涉仪是一种非线性干涉仪, 与传统的 MZI 相比, 在输入端口和硬件结构处进行了优化。该干涉仪使用种子光和强泵浦作为输入光, 用 FWM 过程作为光学参量放大器, 增强了量子属性, 从而突破了 SNL。但该干涉仪也存在一定的局限性, 例如需要找到相应的反馈平衡和参数范围, 不能无限制地反馈输入态来提高相位灵敏度。干涉仪在测量领域扮演着重要的角色, 提高相位灵敏度是一项需要不断攻破的难题。所提的基于光学参量放大器反馈模型的干涉仪与传统干涉仪的相位灵敏度相比实现了增强, 在测量方面有着一定的优势, 其在今后的研究中有潜在的价值。

## 参 考 文 献

- [1] Zhan M S, Xie X C. Precision measurement physics: physics that precision matters[J]. National Science Review, 2020, 7(12): 1795.
- [2] 谈宜东, 徐欣, 张书练. 激光干涉精密测量与应用[J]. 中国激光, 2021, 48(15): 1504001.  
Tan Y D, Xu X, Zhang S L. Precision measurement and applications of laser interferometry[J]. Chinese Journal of Lasers, 2021, 48(15): 1504001.
- [3] Giovannetti V, Lloyd S, Maccone L. Advances in quantum metrology[J]. Nature Photonics, 2011, 5(4): 222-229.
- [4] 刘翔翎, 左小杰, 闫智辉, 等. 基于光学参量放大器的量子干涉仪的分析[J]. 光学学报, 2022, 42(3): 0327013.  
Liu Y Z, Zuo X J, Yan Z H, et al. Analysis of quantum interferometer based on optical parametric amplifier[J]. Acta Optica Sinica, 2022, 42(3): 0327013.
- [5] 秦忠忠, 王美红, 马荣, 等. 压缩态光场及其应用研究进展[J]. 激光与光电子学进展, 2022, 59(11): 1100001.

- Qin Z Z, Wang M H, Ma R, et al. Progress of the squeezed states of light and their application[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2022, 59(11): 1100001.
- [6] 李文奎, 李治, 郭辉, 等. 基于无噪声放大的精密测量增强[J]. *量子光学学报*, 2021, 27(2): 102-108.
- Li W K, Li Z, Guo H, et al. Precision measurement enhancement based on noiseless linear amplification[J]. *Journal of Quantum Optics*, 2021, 27(2): 102-108.
- [7] Giovannetti V, Lloyd S, Maccone L. Quantum-enhanced measurements: beating the standard quantum limit[J]. *Science*, 2004, 306(5700): 1330-1336.
- [8] Pezzé L, Smerzi A. Entanglement, nonlinear dynamics, and the Heisenberg limit[J]. *Physical Review Letters*, 2009, 102(10): 100401.
- [9] Tse M, Yu H C, Kijbunchoo N, et al. Quantum-enhanced advanced LIGO detectors in the era of gravitational-wave astronomy[J]. *Physical Review Letters*, 2019, 123(23): 231107.
- [10] Goda K, Miyakawa O, Mikhailov E E, et al. A quantum-enhanced prototype gravitational-wave detector [J]. *Nature Physics*, 2008, 4(6): 472-476.
- [11] Abadie J, Abbott B P, Abbott R, et al. A gravitational wave observatory operating beyond the quantum shot-noise limit[J]. *Nature Physics*, 2011, 7(12): 962-965.
- [12] Harry G M, Collaboration T L S. Advanced LIGO: the next generation of gravitational wave detectors[J]. *Classical and Quantum Gravity*, 2010, 27(8): 084006.
- [13] Caves C M. Quantum-mechanical noise in an interferometer [J]. *Physical Review D*, 1981, 23(8): 1693-1708.
- [14] Braunstein S L. Quantum limits on precision measurements of phase[J]. *Physical Review Letters*, 1992, 69(25): 3598-3601.
- [15] Yurke B, McCall S L, Klauder J R. SU(2) and SU(1, 1) interferometers[J]. *Physical Review A*, 1986, 33(6): 4033-4054.
- [16] Bechhoefer J. Feedback for physicists: a tutorial essay on control[J]. *Reviews of Modern Physics*, 2005, 77(3): 783-836.
- [17] Doyle J. Robust and optimal control[C]//Proceedings of 35th IEEE Conference on Decision and Control, December 13-13, 1996, Kobe, Japan. New York: IEEE Press, 2002: 1595-1598.
- [18] Lloyd S. Coherent quantum feedback[J]. *Physical Review A*, 2000, 62(2): 022108.
- [19] Yamamoto N. Coherent versus measurement feedback: linear systems theory for quantum information[J]. *Physical Review X*, 2014, 4(4): 041029.
- [20] Belavkin V P. Quantum stochastic calculus and quantum nonlinear filtering[J]. *Journal of Multivariate Analysis*, 1992, 42(2): 171-201.
- [21] Bouten L, Van Handel R, James M R. An introduction to quantum filtering[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2007, 46(6): 2199-2241.
- [22] Engelkemeier M, Lorz L, De S, et al. Quantum photonics with active feedback loops[J]. *Physical Review A*, 2020, 102(2): 023712.
- [23] Pan X Z, Chen H, Wei T X, et al. Experimental realization of a feedback optical parametric amplifier with four-wave mixing[J]. *Physical Review B*, 2018, 97(16): 161115.