

激光与光电子学进展

量子增强时变参数估计研究进展

郑凯敏^{1,2,3,4}, 张利剑^{1,2,3,4*}¹南京大学固体微结构物理国家重点实验室, 江苏 南京 210023;²智能光传感与调控技术教育部重点实验室, 江苏 南京 210023;³人工微结构科学与技术协同创新中心, 江苏 南京 210023;⁴南京大学现代工程与应用科学学院, 江苏 南京 210023

摘要 量子精密测量可以提供超越传统测量方法极限的测量精度和分辨能力。在过去几十年里,固定参数的量子增强技术取得了长足的进展。时变参数估计是引力波探测、导航定位等实际工程应用中的关键问题之一。因此,设计有效的量子增强时变参数估计方案并完善时变参数估计理论也是量子精密测量中的重要研究内容。最近研究发现时变参数估计的精度极限与信号自身连续性质密切相关。同时,与固定信号测量类似,压缩态等非经典资源也可以提高时变参数估计的精度。介绍了几种时变参数估计的精度极限,并总结了国内外量子增强时变参数估计的相关研究进展。

关键词 卡尔曼滤波; Heisenberg 极限; Bayesian 估计; Ornstein-Uhlenbeck 随机信号; 光子通量

中图分类号 O436

文献标志码 A

DOI: 10.3788/LOP231285

Progress on Quantum-Enhanced Time-Varying Parameter Estimation

Zheng Kaimin^{1,2,3,4}, Zhang Lijian^{1,2,3,4*}¹National Laboratory of Solid State Microstructures, Nanjing University, Nanjing 210023, Jiangsu, China;²Key Laboratory of Intelligent Optical Sensing and Manipulation, Ministry of Education, Nanjing 210023, Jiangsu, China;³Collaborative Innovation Center of Advanced Microstructures, Nanjing 210023, Jiangsu, China;⁴College of Engineering and Applied Sciences, Nanjing University, Nanjing 210023, Jiangsu, China

Abstract The quantum precision measurement method achieves higher accuracy and resolution than conventional measurement methods. Over the past few decades, there is significant progress in the field of quantum-enhanced metrology with respect to the estimation of fixed parameters. However, estimating time-varying parameters is one of the key tasks in numerous practical engineering applications, such as gravitational wave detection, navigation, and positioning. Therefore, designing an effective quantum-enhanced time-varying parameter-estimation method and perfecting the time-varying parameter-estimation theory are important research components related to quantum precision measurement. Recent studies have demonstrated that the accuracy limits of time-varying parameter estimation are closely related to the continuous nature of the signal itself. Moreover, similar to fixed signal measurements, nonclassical sources such as squeezed states can improve the accuracy of time-varying parameter estimation. This review introduces several accuracy limits related to time-varying parameter estimation and summarizes the related research progress.

Key words Kalman filtering; Heisenberg limit; Bayesian estimation; Ornstein-Uhlenbeck stochastic signal; photon flux

1 引言

基于量子资源及其调控手段的量子度量技术可以提供超越传统测量方法极限的测量精度,有望为基础科学研究(如基本物理常数的测量)和实际工程应用

(如导航定位、资源勘探)带来变革性突破。量子度量过程主要可分为3个阶段:探测态的制备、与待测系统的交互作用、探测态的读取^[1]。量子度量研究中的一个核心问题是在限定测量资源的情况下设计具有最优精度的测量方案。如果每一次独立测量时用一个大小

收稿日期: 2023-05-11; 修回日期: 2023-05-21; 录用日期: 2023-05-23; 网络首发日期: 2023-06-02

基金项目: 国家重点研发计划(2019YFA0308704, 2018YFA0306202)、国家自然科学基金(61975077)

通信作者: *lijian.zhang@nju.edu.cn

为 N 的经典探测态,单参数估计最小的标准差为标准量子极限,即 $\propto 1/\sqrt{N}$ ^[2],这部分误差是探测态量子涨落引起的,只能使用特殊的量子资源来克服,比如利用具有非经典相关性的量子探测态(大小也为 N),可以使标准差达到 Heisenberg 极限,即 $\propto 1/N$ ^[3]。在过去几十年的时间里,针对固定参数的量子精密测量取得了可观的进步,发展了各种基于量子干涉仪^[4-7]、非线性耦合^[8-13]、弱值测量^[14-20]、量子相变等物理系统和效应的新颖测量方案^[21-23]。实验方面亦不断取得突破,一些小规模的量子精密测量方案已经在光子、原子、核磁共振及固态等系统中成功演示^[24-30],并已经在引力波探测、潜艇导航等方面获得应用^[31-32]。

但是,固定参数估计的量子增强研究并不能完全满足目前精密测量学与实际工程应用的需求,需要进一步地丰富和完善针对时变参数的量子精密测量理论与实验研究。其原因主要有两方面:在技术方面,许多实际应用本质上都涉及时变参数的估计,如果没有对量子增强时变参数估计的清晰理解,就无法开发用于地震监测、生物传感、引力波探测的高精度量子传感器;在原理方面,时变参数的最优估计方案及 Heisenberg 极限与参数随时间演化的形式密切相关,如当时变参数的平滑度为 q , Heisenberg 极限为 $N^{-q/(q+1)}$ ^[33]。时变参数估计的这一特性使很多原有的固定参数量子增强估计方案及结论不能直接扩展和运用于时变参数估计中。因此,完善针对时变参数的量子精密测量理论并设计能突破经典估计精度极限的测量方案是一个亟待解决的问题。近年来,国内外相关学者在时变参数测量的量子极限及量子增强时变参数估计方面做了一系列的研究探索^[34-41]。本文将详细介绍量子增强时变参数估计的基本原理和精度改进方案,总结了国内外的最新相关研究进展。

2 时变参数估计原理及其量子精度极限

时变参数估计过程如图 1 所示,其中 $\varphi(t)$ 是要估计的随时间变化的参数, ρ 为探测态。探测态与系统交互之后衍化成含参数信息的量子态 $\rho_{\varphi(t)}$, $Y(t)$ 是相应的正定算符测量,测量结果为 $y(t)$ 的概率为

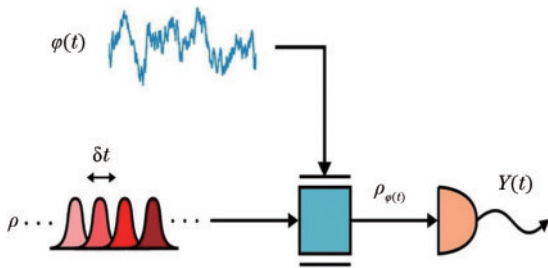


图 1 时变参数估计

Fig. 1 Estimation of time-varying parameter

$p[y(t)] = \text{Tr}[\rho_{\varphi(t)} Y(t)]$,最后对测量结果进行数据处理得到估计值 $\tilde{\varphi}(t)$,测量误差由均方误差 $\sigma^2 = \langle [\tilde{\varphi}(t) - \varphi(t)]^2 \rangle$ 量化。量子增强时变参数估计的目的是在同等资源的情况下设计均方误差最小的估计方案。为了量化一个估计方案的潜在性能,计算信号的估计误差下限是非常必要的。其中一个最广泛使用的界限是 Helstrom^[42] 提出的量子 Cramer-Rao 界限(QCRB),它规定最小估计误差与量子 Fisher 信息成反比。QCRB 允许一个估计方案的基本误差符合应用的要求,也可以测试量子估计方案的优化。对于接近基本极限的估计方案,QCRB 也可以用来量化估计精度和估计过程消耗的物理资源之间的权衡,并确定提高估计精度的有效方法。估计时变参数时,通常定义的固定参数估计的各种量子界限已不适用。因此,为确定最优探测态,设计更精密的时变参数估计方案,此类估计的 QCRB 计算是一项新的且至关重要的任务。固定参数的 QCRB 的计算一般没有考虑参数的先验信息,但对于时变信号任务,通常依赖于无限个未知参数,需要先验信息才能使问题得到明确定义。例如,先验信息可以将信号限制在有限带宽,使频率上的积分有限,否则就会出现积分发散的情况。如果时间间隔 dt 足够小,在时间段 $t_i \leq t < t_i + dt$ 内可以将 $\varphi(t)$ 视为常数,即 $\varphi(t) = \varphi_i$ 。2011 年, Tsang 等^[43] 通过将 $\varphi(t)$ 离散化成 $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}, \varphi_m)$, 将时变参数估计问题转换为多参数估计问题,在考虑信号的先验概率密度 $P[\varphi(t)]$ 的情况下,首先给出了两个任意时间点信号相应的量子 Fisher 信息矩阵 $F(t_1, t_2) = F^Q(t_1, t_2) + F^C(t_1, t_2)$, 其中

$$F^Q(t_1, t_2) = 4 \langle \Delta n(t_1) \Delta n(t_2) \rangle, \quad (1)$$

$$F^C(t_1, t_2) = \int D\varphi P[\varphi] \frac{d \ln P[\varphi]}{d\varphi(t_1)} \frac{d \ln P[\varphi]}{d\varphi(t_2)}, \quad (2)$$

式中: $\Delta n(t) = n(t) - \langle n(t) \rangle$, $n(t)$ 为 $\varphi(t)$ 的产生算子。在 $t_1 = t_2$ 时,可以得到估计误差 $\sigma^2 = \langle [\tilde{\varphi}(t) - \varphi(t)]^2 \rangle \geq F^{-1}(t, t)$ 。虽然这里给出了任意信号估计的 QCRB 的计算方法,但是要得到估计精度的 Heisenberg 极限仍是一项极艰难的任务。为降低 Heisenberg 极限计算的难度,可以对时变信号施加特定的限制条件。对于一个期望值是常数,两时刻的相关性仅取决于时间差且能谱密度为 $\tilde{S}(\omega) = \kappa^{\rho-1} |\omega|^\rho$ 的稳态随机信号, Berry 等^[44] 利用上面的方法,推导出了相应的 Heisenberg 极限,为

$$\langle [\tilde{\varphi}(t) - \varphi(t)]^2 \rangle = \Omega \left[(\kappa/\mathcal{N})^{2(\rho-1)/(\rho+1)} \right]. \quad (3)$$

2015 年, Berry 等^[41] 提出了多参数估计误差的量子 Bell-Ziv-Zakai 下界,并将其运用到以上信号的估计中,同样得到式(3)的结果并证明了该极限是可达到

的。2020 年 Kura 等^[39]建立了函数估计的基本误差边界与函数平滑程度 q 的关系,针对粒子间是否存在纠缠的情况确定了误差下界,分别对应于标准量子极限 $O(N^{-q/(2q+1)})$ 和 Heisenberg 极限 $O(N^{-q/(q+1)})$,其中 N 为用于估计的总粒子数,并证明了这些误差边界在理论上对于任何类型的探测态都是最优的。这一结论可以在给定平滑度条件下分析数据序列的估计误差。

3 时变参数估计在不同测量系统中的应用

3.1 时变相位估计的研究

2002 年 Berry 等^[45]首次理论分析了维纳随机信号(在单位时间内变量变化的期望值服从期望为 0、方差为 1 的正态分布)的估计问题,发现将光子数通量为 \mathcal{N} 的相干态作为探测态时,在使用平衡零差测量及自适应反馈操作的情况下,均方误差为 $\sigma^2 \approx \mathcal{N}^{-1/2}/2$,这比非自适应(外差探测)测量降低了 $\sqrt{2}$,在压缩态(相同光子数通量)作为探测态的情况下,均方误差正比于 $\mathcal{N}^{-2/3}$ 。2009 年 Tsang 等^[46]设计了一种可以用于测量时变相位且能达到量子极限精度的零差探测锁相环,结果证明,如果允许时间延迟,后处理可以进一步提高估计性能,另外他们通过时变光学相位估计研究了谐

波振子位置和动量的基本不确定性关系。2017 年 Dinani 等^[47]通过理论计算,证明式(3)中的 Heisenberg 极限可以通过压缩态的自适应测量来实现,并进行了数值模拟验证。2020 年,张利剑课题组与荆杰泰课题组^[48]利用 SU(1, 1)干涉仪实现量子增强 Ornstein-Uhlenbeck 随机相位估计,该相位的数学形式为 $\varphi(t) = \sqrt{\kappa} \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-s)} dV(s)$,其中 $dV(s)$ 为一个经典的维纳过程, λ^{-1} 是 $\varphi(t)$ 的关联时间, κ 决定了信号的幅度。同时研究三个关键的估计问题:预测,即利用 t 时刻之前的测量数据估计 $\varphi(t)$;跟踪,即利用 t 时刻之前及 t 时刻的测量数据估计 $\varphi(t)$;平滑,即利用 t 时刻之前及 t 时刻之后的测量数据估计 $\varphi(t)$,推导了随机相位估计的均方误差。与传统的马赫-曾德尔干涉仪相比,在相同的光子数通量及相同测量方式下,随机相位的预测、跟踪和平滑的均方误差都有明显降低。2022 年,曾贵华课题组^[49]提出了一种弱测量及自适应反馈的未知时变相位估计方法,如图 2 所示,与原来的弱测量相比,其用光强检测代替了光谱检测,通过插入参考相位,可以测量更大振幅的信号。另外,该方法对相对强度噪声和非理想检测条件也具有鲁棒性,当采用最优高斯态压缩光作为光源时,相位估计精度可以超过散粒噪声极限,并逼近 Heisenberg 极限。

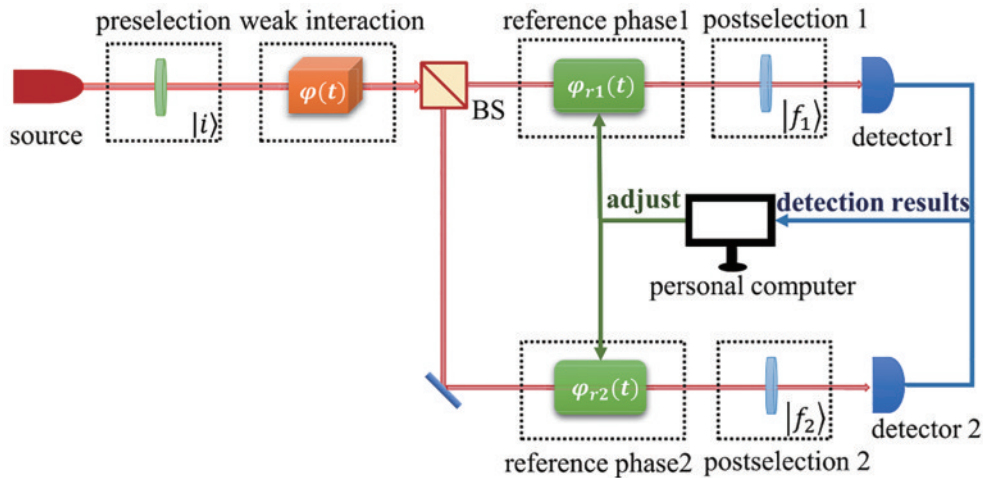


图 2 基于弱测量的自适应时变相位估计方法原理^[49]

Fig. 2 Schematic of adaptive time-varying phase estimation method via weak measurement^[49]

在实验方面,2010 年 Wheatley 等^[50]利用一种时间对称的量子平滑技术对相干光场的 Ornstein-Uhlenbeck 随机相位进行估计,如图 3 所示。具体来说,对耦合随机相位的弱相干态进行自适应平衡零差测量,如图 3(b)所示,在线性近似的情况下测得的光电流为 $I(t)dt = 2|\alpha|[\varphi(t) - \varphi_r(t)]dt + dW(t)$,其中 $dW(t)$ 是量子真空噪声引起的维纳噪声。 t 时刻之前(后)的测量数据经过滤波之后,得到 $\varphi(t)$ 的估计值为 $\Theta_{-}(t)(\Theta_{+}(t))$,对正向估计和反向估计进行加权平

均,得到估计相位 $\Theta(t) = \frac{\Theta_{-}(t) + \Theta_{+}(t)}{2}$ 。此时均方误差 $\sigma^2 = \langle [\Theta(t) - \varphi(t)]^2 \rangle = \frac{\kappa(\chi + 2\lambda)}{4(\chi + \lambda)^2} + \frac{\chi}{16\mathcal{N}}$,其中 χ 为滤波参数,对滤波参数进行优化后得到最小均方误差 $\sigma^2 = \sqrt{\kappa/\mathcal{N}}/4$,这比标准(非自适应、滤波)量子极限在理论上小 $2\sqrt{2}$ 。他们在实验中首次验证了这些预测并观察到了 2.24 倍的改进。

随着微纳技术的快速发展,系统小型化已成为当

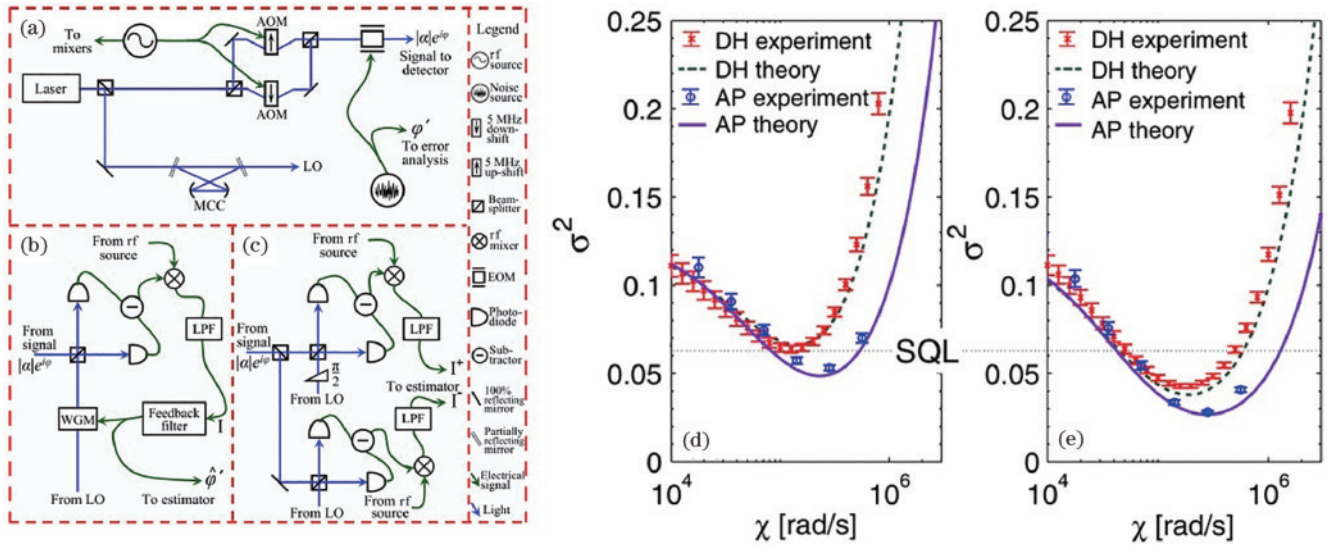


图3 基于时间对称量子平滑的自适应光学相位估计^[50]。(a)信号和本地振荡器的产生;(b)自适应相位估计;(c)非自适应相位估计;(d)滤波的非自适应(DH)和自适应(AP)估计方差;(e)平滑的DH和AP估计方差
Fig.3 Adaptive optical phase estimation using time-symmetric quantum smoothing^[50]. (a) Signal and local oscillator generation; (b) adaptive phase estimation; (c) no-adaptive phase estimation; (d) experimental and theoretical variance σ^2 of filtered non-adaptive (DH) and adaptive phase (AP); (e) experimental and theoretical variance σ^2 of smoothed DH and AP

前相位传感器的需求之一^[51-53]。因为光纤具有抗电磁干扰、灵活的多路复用和远程传感等无可比拟的优势,许多实用的应变、温度和其他参数测量系统都是基于光纤的。例如,在实时监测水下信号时,光纤比其他系统更可靠。因此需要尝试将量子光学相位跟踪技术与光纤传感系统结合起来。光纤中的主要挑战是待测参数引起的大相位变化,低频噪声也是光纤系统中一个棘手的问题。2019年,肖敏课题组^[54]构造了一个光纤零差探测系统来跟踪低频随机相位。为了获得最优跟踪精度,在光纤零差系统中设计了一个锁相环,并使用卡尔曼滤波器精确估计了时变相位。

如果探测态为非经典相位压缩态时,对相位调制光束的测量采用零差检测,本振光相位 $\Phi(t)$ 被反馈控制为最敏感的相位估计点 $\Phi(t) = \varphi_f(t) + \pi/2$, 其中 $\varphi_f(t)$ 是 $\varphi(t)$ 的滤波估计值,经过线性近似可以得到一个归一化的零差测量光电流 $I(t)dt = 2|\alpha|[\varphi(t) - \varphi_f(t)]dt + \sqrt{\bar{R}_{sq}}dW(t)$, 其中 $|\alpha|$ 为相位压缩态的振幅, $\bar{R}_{sq} = \sigma^2 e^{2r_p} + (1 - \sigma^2)e^{-2r_n}$ 是一个有效的(时间无关)压缩因子,它考虑了平均意义上的跟踪误差 σ^2 。当这个 \bar{R}_{sq} 小于 1 时,可实现比相干态极限更好的相位跟踪精度。2012年 Yonezawa 等^[55]验证了压缩光对 Ornstein-Uhlenbeck 相位跟踪的增强,他们分析了光子数通量固定在 $|\alpha|^2 = 10^6 s^{-1}$ 时相位跟踪精度与压缩系数的关系。首先可以发现采用相位压缩光可以将相位跟踪的均方误差降低到相干态极限以下,这验证了压缩光的增强效应;其次,实验结果与二阶近似的预测结果吻合较好,与对测量光电流进行一阶近似 $\bar{R}_{sq} = e^{2r_n}$

的理论曲线不一致;最后,在较高的压缩水平下,其均方误差趋于饱和,表明存在一个最佳的压缩系数。即使在理想压缩光和零损耗的情况下,均方误差也存在最小值,这是由相位和振幅的 Heisenberg 不确定性关系决定的,即 $e^{-2r_p} \times e^{2r_n} \geq 1$ 。在相位跟踪不完美时(跟踪误差较大),虽然更大的压缩减小了 \bar{R}_{sq} 中的 e^{2r_n} 项,但它增大了反压缩 e^{2r_p} 。最优压缩系数依赖于光子数通量及表征信号的随机信号参数 κ 和 λ 。

2013年 Iwasawa 等^[56]将相位跟踪和平滑技术应用用于光机械运动传感中,分别使用相干态和相位压缩态(上述的两种方案)探测光束测量镜面在随机外力作用下的运动,实现了对反射镜位置、动量、受力的实时跟踪,并首次对实验结果的平滑误差与时变参数估计的 QCRB 进行比较。通过比较,发现尽管存在多种测量方式用来提高测量精度,但是在相干态作为探测态时,自适应平衡零差测量接近最优;另外,压缩态的平滑误差偏离 QCRB 较远,但相对于相干态边界仍然显示出明显的增强。尽管他们关注的是经典力学系统,但他们的估计和光学相位跟踪技术也可以应用于纯量子系统,在这种情况下,测量的反向作用不再可以忽略不计,而是可以通过相干噪声抵消技术来避免。除了光力学之外,他们的方法也可以应用到其他广泛的量子传感应用中。

2021年, Dong 等^[57]在金刚石中氮空位(NV)色心的电子自旋系统下,使用多通道方案来相干地放大未知的检测信号,取消不需要的相干动态演化并同时抑制量子退相干,通过与周期性动态解耦(PDD)方法相结合,周期性时变相位信号估计的动态范围和灵敏度都提高了 1 个数量级。同时通过平衡每次测量所用的

资源(对应统计误差)及采样率(对应拟合误差)来使估计误差最小。最后,在实验中用 PDD 增强的 TDQD

协议实现了 Heisenberg 极限下的周期性相位估计,如图 4 所示。

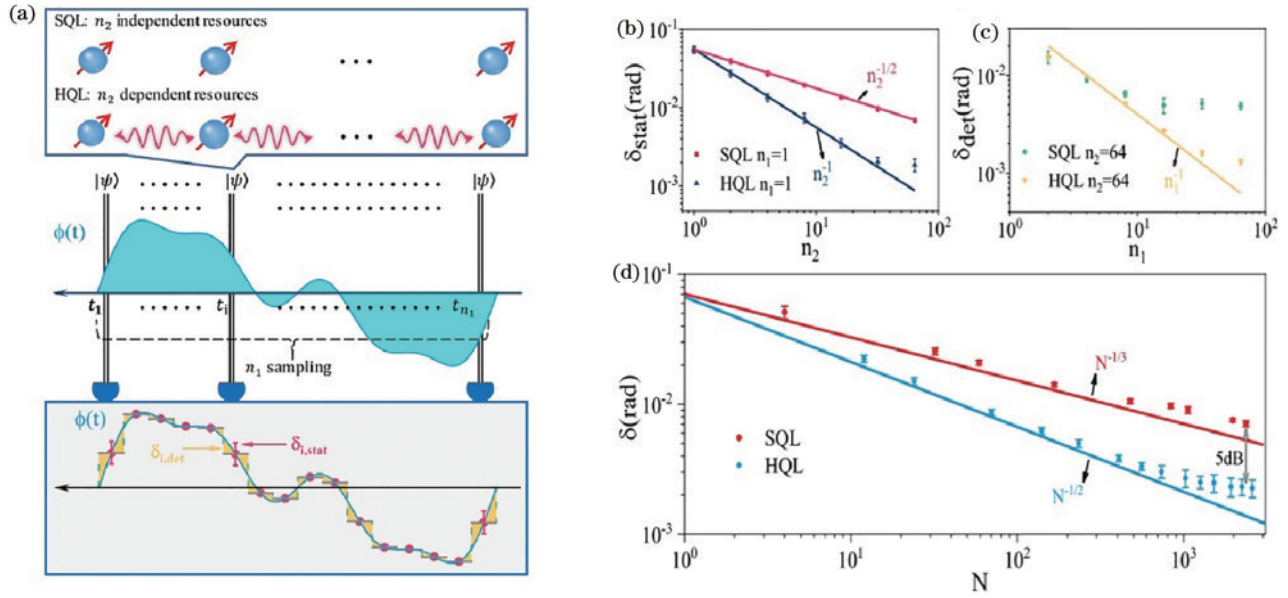


图 4 波形估计的概念图和结果^[57]。(a) n_1 个采样和 n_2 个独立或相关量子资源的波形估计概念; (b) 统计误差; (c) 确定性误差; (d) 总误差
Fig. 4 Conceptual diagram and results for waveform estimation^[57]. (a) Concept of waveform estimation with n_1 samplings and n_2 independent or correlated quantum resources; (b) statistical error; (c) deterministic error; (d) total error

3.2 自旋进动的实时跟踪研究

自旋的测量是很多传感任务的核心,也是磁共振波谱学的基础。因为没有自旋角算符,任何自旋进动的测量都是间接的,可以从不同时间的自旋投影测量推断出来。这样的投影测量是不互易的,因此,量子测量的反向作用(测量导致的量子状态随机变化)必然会进入自旋测量记录,引入测量误差并限制灵敏度。2017年,Colangelo等^[58]通过将量子测量的反向作用几乎完全指向一个不测量的自旋分量,将自旋投影测量中的这种扰动减小到经典极限以下。这种方法产生了一个可以同时精确地估计自旋角度和自旋振幅的平面压缩态。之后他们使用高动态范围光量子非破坏性测量系统来探测磁自旋系综,演示了跟踪误差远低于经

典极限的自旋角度和自旋振幅的同时跟踪的过程。次年,Jiménez-Martínez等^[59]在原子传感器中使用卡尔曼滤波来实现超越时间分辨率的信号跟踪。他们使用卡尔曼滤波来跟踪光抽运产生的随机输入信号,并证实了原子统计模型的准确性和卡尔曼滤波器的可靠性。如图 5 所示,传感组件由一个总自旋为 J 的原子系综组成,其中自旋分量为 $J_i(t) = \text{Tr}[\rho(t)\hat{J}_i]$, $i \in \{x, y, z\}$, $\rho(t)$ 为 t 时刻的系综态。Rb 原子系综在拉莫尔频率为 ω_L 的外加磁场 B_0 下产生进动,自旋 z 分量 $J_z(t)$ 由携带随机信号的圆偏振光束(泵浦)驱动。另一束激光(meter)用于偏振测量,根据法拉第旋转效应产生与 $J_z(t)$ 成正比的光电流(含散粒噪声)。将该光电流通过卡尔曼滤波器,得到估计信号。当跟踪其他随机信

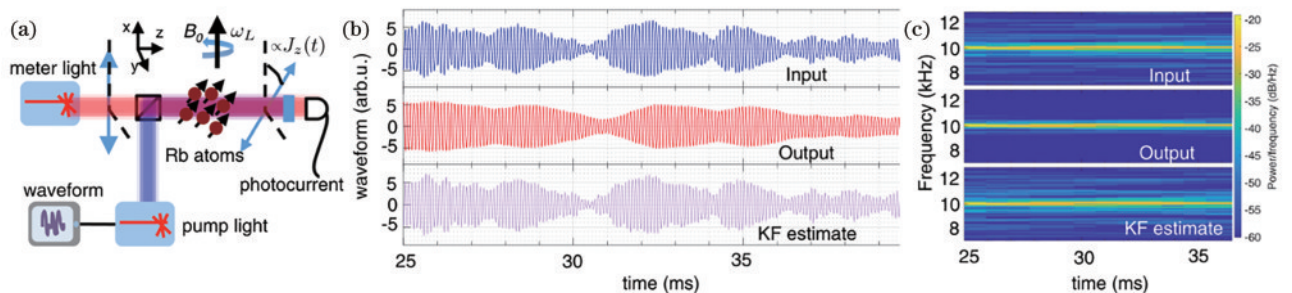


图 5 基于卡尔曼滤波的原子传感器^[59]。(a) 基于原子传感器的时变信号估计; (b) 应用波形(输入)以及相应的测量光电流(输出)和恢复波形(KF 估计); (c) 输入、输出和 KF 估计的频谱图
Fig. 5 Atomic sensor based on Kalman filtering^[59]. (a) Time-varying signal estimation based on atomic sensor; (b) applied waveform (input) along with the corresponding measured photocurrent (output) and the recovered waveform (KF estimation); (c) spectrograms of input, output, and KF estimation

号时,通过选择合适的滤波器也可以获得类似的优势。

3.3 时变磁场估计的研究

磁场的估计在高精度计量中也具有重要的理论意义和实际意义。2020年,Zhang等^[60]通过测量经过原子系综的连续光的偏振状态来估计随时间变化的磁场,方案如图6所示。首先利用泵浦光将所有的原子自旋沿x方向极化,沿y轴的Ornstein-Uhlenbeck磁场B(t)会导致原子自旋沿z轴的拉莫尔进动。另外,原子与连续的沿x轴方向的线性偏振探测光相互作用时,法拉第作用引起的光学偏振旋转分量与原子自旋分量J_z成正比。因此,可以通过线性偏振分量的强度测量来估计外来磁场。他们通过利用平滑的算法和量子态回溯的方法,展示了t时刻之后的光学探测如何提高t时刻磁场估计精度的过程。

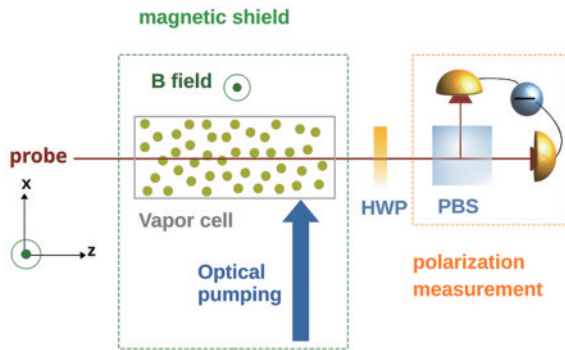


图6 磁场估计原理^[60]

Fig. 6 Schematic of magnetic field estimation^[60]

2022年,Turner等^[61]利用NV色心的相干种群捕获(CPT)对时变磁场进行了实时估计,如图7所示。在CPT过程中,NV色心制备在两种自旋态的特定叠加状态下,即阻止光激发的暗态和破坏量子干涉的激

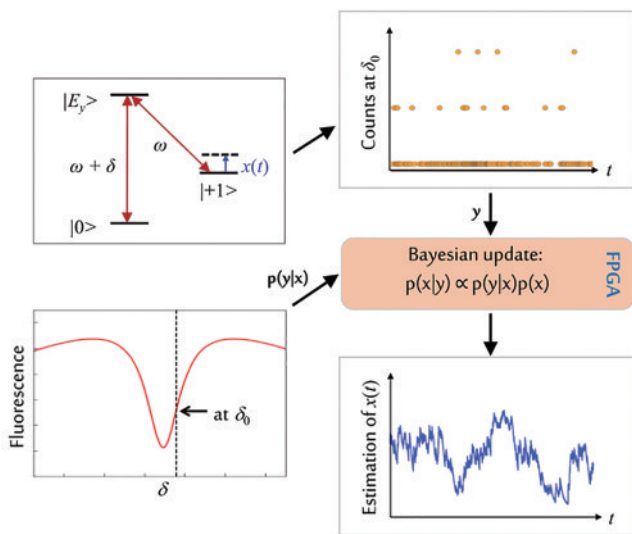


图7 在CPT设置中制备的NV中心的磁场实时传感^[61]

Fig. 7 Real-time sensing of magnetic fields based on a NV center prepared in a CPT setting^[61]

发态。时变磁场可以使NV色心在两种态中跳跃,导致NV色心产生一系列单光子发射。测量到的单光子发射序列经过Bayesian估计[由可编程门阵列(FPGA)完成],得到磁场的实时估计。同年,他们将Bayesian估计与反馈循环相结合,在不考虑时变磁场的统计特性的情况下就能够在单光子水平上实现连续的实时传感^[62]。

4 时变信号估计的应用

酶是起生物催化作用的蛋白质。酶的反应动力学通常是通过及时测量的底物分子转换为产物分子得到监测的。如果底物和产物会吸收特定波长的光,则可以通过光学方法完成反应动力学的监控。然而,这种方法需要在反应的不同时间探测输出光并分析结果,但是由于一般探测方法的粗糙性,无法实时监测^[63-64]。酶底物对产物的光学活性变化的反应可以通过圆偏振光测量来监测,右旋圆偏振光和左旋圆偏振光以不同的折射率传播,这导致一个圆偏振相对于另一个圆偏振积累了一个小的延迟,从而产生相对的光学相位差。实时偏振分析可以用来测量该相对相位的值,因此酶活性可以通过对时变相位进行测量来得到实时监控。Cimini等^[65]利用双光子纠缠态 $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2_R 0_L\rangle - |0_R 2_L\rangle)$,对不同酶浓度时蔗糖酶的催化作用完成了高精度的跟踪。

另外,大肠杆菌和沙门氏菌在肉汤中生长会改变肉汤的浓度,根据Beer-Lambert-Bouguer定律,可以将它们的浓度与光学透射率联系起来。2020年,Spedalieri等^[66]利用光子数态实现了对这两种细菌的生长曲线的跟踪,讨论了如何用数量级更少的光子照射样品来跟踪细菌生长的内容,并说明了量子资源在细菌生长的早期检测与两个细菌物种之间的早期区分这两个基本任务中的优势和限制。2021年,Gianani等^[67]利用纠缠光对液晶的光学响应函数实现了量子增强标定,方法是在基准点上对函数进行抽样,然后进行插值。他们发现在固定资源的情况下需要平衡量子资源和采样率来实现更高精度的标定。

5 总结与展望

量子精密测量是继量子计算、量子通信之后第三个量子技术的主要发展方向,旨在利用量子资源和效应,实现超越经典方法的测量精度。鉴于引力波探测、激光遥感等实际工程应用本质上都涉及时变参数的估计问题,近些年国内外学者开始对时变参数估计相关的理论和实验展开了深入研究。内容主要包括明确时变参数估计的量子精度极限与设计能突破经典误差极限的估计方案。在量子精度极限方面,现有工作给出了具有特定能谱密度的高斯稳态信号估计的

Heisenberg 极限,建立了时变函数估计的基本误差边界与函数平滑程度 q 的关系,允许在给定平滑度下分析数据序列的估计误差。在量子增强时变参数估计方面,压缩态等非经典资源及平滑技术被证明可以用来提高时变参数估计的精度,相关的方案已开始用于生物传感及光学标定等实际应用中。目前更一般的时变信号估计的量子极限及逼近 Heisenberg 极限的估计方案仍缺乏报道,有待进一步的研究。相信随着量子态制备、量子探测技术的不断进步,量子增强时变参数估计会得到更全面的发展。

参 考 文 献

- [1] Giovannetti V, Lloyd S, Maccone L. Advances in quantum metrology[J]. *Nature Photonics*, 2011, 5(4): 222-229.
- [2] Caves C M. Quantum-mechanical radiation-pressure fluctuations in an interferometer[J]. *Physical Review Letters*, 1980, 45(2): 75-79.
- [3] Braunstein S L. Quantum limits on precision measurements of phase[J]. *Physical Review Letters*, 1992, 69(25): 3598-3601.
- [4] Holland M J, Burnett K. Interferometric detection of optical phase shifts at the Heisenberg limit[J]. *Physical Review Letters*, 1993, 71(9): 1355-1358.
- [5] Boto A N, Kok P, Abrams D S, et al. Quantum interferometric optical lithography: exploiting entanglement to beat the diffraction limit[J]. *Physical Review Letters*, 2000, 85(13): 2733-2736.
- [6] Ono T, Okamoto R, Takeuchi S. An entanglement-enhanced microscope[J]. *Nature Communications*, 2013, 4: 2426.
- [7] Pezzè L, Smerzi A. Mach-Zehnder interferometry at the Heisenberg limit with coherent and squeezed-vacuum light[J]. *Physical Review Letters*, 2008, 100(7): 073601.
- [8] Jing J T, Liu C J, Zhou Z F, et al. Realization of a nonlinear interferometer with parametric amplifiers[J]. *Applied Physics Letters*, 2011, 99(1): 011110.
- [9] Ou Z Y. Enhancement of the phase-measurement sensitivity beyond the standard quantum limit by a nonlinear interferometer[J]. *Physical Review A*, 2012, 85(2): 023815.
- [10] Anderson B E, Gupta P, Schmittberger B L, et al. Phase sensing beyond the standard quantum limit with a variation on the SU(1, 1) interferometer[J]. *Optica*, 2017, 4(7): 752-756.
- [11] Hudelist F, Kong J, Liu C J, et al. Quantum metrology with parametric amplifier-based photon correlation interferometers[J]. *Nature Communications*, 2014, 5: 3049.
- [12] Xu Y K, Zhao T, Kang Q Q, et al. Phase sensitivity of an SU(1, 1) interferometer in photon-loss via photon operations[J]. *Optics Express*, 2023, 31(5): 8414-8427.
- [13] Chang S K, Ye W, Zhang H A, et al. Improvement of phase sensitivity in an SU(1, 1) interferometer via a phase shift induced by a Kerr medium[J]. *Physical Review A*, 2022, 105(3): 033704.
- [14] Zhang L J, Datta A, Walmsley I A. Precision metrology using weak measurements[J]. *Physical Review Letters*, 2015, 114(21): 210801.
- [15] Arvidsson-Shukur D R M, Yunger Halpern N, Lepage H V, et al. Quantum advantage in postselected metrology[J]. *Nature Communications*, 2020, 11: 3775.
- [16] Hofmann H F, Goggin M E, Almeida M P, et al. Estimation of a quantum interaction parameter using weak measurements: theory and experiment[J]. *Physical Review A*, 2012, 86(4): 040102.
- [17] Xu L A, Liu Z X, Datta A, et al. Approaching quantum-limited metrology with imperfect detectors by using weak-value amplification[J]. *Physical Review Letters*, 2020, 125(8): 080501.
- [18] Jordan A N, Martínez-Rincón J, Howell J C. Technical advantages for weak-value amplification: when less is more[J]. *Physical Review X*, 2014, 4(1): 011031.
- [19] Chen G, Zhang L J, Zhang W H, et al. Achieving heisenberg-scaling precision with projective measurement on single photons[J]. *Physical Review Letters*, 2018, 121(6): 060506.
- [20] Pang S S, Brun T A. Improving the precision of weak measurements by postselection measurement[J]. *Physical Review Letters*, 2015, 115(12): 120401.
- [21] Zou Y Q, Wu L N, Liu Q, et al. Beating the classical precision limit with spin-1 Dicke states of more than 10, 000 atoms[J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 2018, 115(25): 6381-6385.
- [22] Feldmann P, Klempt C, Smerzi A, et al. Interferometric order parameter for excited-state quantum phase transitions in Bose-Einstein condensates[J]. *Physical Review Letters*, 2021, 126(23): 230602.
- [23] Pezzè L, Smerzi A, Oberthaler M K, et al. Quantum metrology with nonclassical states of atomic ensembles[J]. *Reviews of Modern Physics*, 2018, 90(3): 035005.
- [24] Zheng K M, Xu H C, Zhang A N, et al. Ab initio phase estimation at the shot noise limit with on-off measurement[J]. *Quantum Information Processing*, 2019, 18: 1-12.
- [25] Giovannetti V, Lloyd S, Maccone L. Quantum-enhanced positioning and clock synchronization[J]. *Nature*, 2001, 412(6845): 417-419.
- [26] Banaszek K, Demkowicz-Dobrzański R, Walmsley I A. Quantum states made to measure[J]. *Nature Photonics*, 2009, 3(12): 673-676.
- [27] Demkowicz-Dobrzański R, Dorner U, Smith B J, et al. Quantum phase estimation with lossy interferometers[J]. *Physical Review A*, 2009, 80(1): 013825.
- [28] Nagata T, Okamoto R, O'Brien J L, et al. Beating the standard quantum limit with four-entangled photons[J]. *Science*, 2007, 316(5825): 726-729.
- [29] Liu G Q, Zhang Y R, Chang Y C, et al. Demonstration of entanglement-enhanced phase estimation in solid[J]. *Nature Communications*, 2015, 6: 6726.
- [30] Xie T Y, Zhao Z Y, Kong X, et al. Beating the standard quantum limit under ambient conditions with solid-state spins[J]. *Science Advances*, 2021, 7(32): eabg9204.
- [31] Abadie J, Abbott B P, Abbott R, et al. A gravitational

- wave observatory operating beyond the quantum shot-noise limit[J]. *Nature Physics*, 2011, 7(12): 962-965.
- [32] Goda K, Miyakawa O, Mikhailov E E, et al. A quantum-enhanced prototype gravitational-wave detector [J]. *Nature Physics*, 2008, 4(6): 472-476.
- [33] Kura N, Ueda M. Standard quantum limit and Heisenberg limit in function estimation[J]. *Physical Review Letters*, 2020, 124(1): 010507.
- [34] Berry D W, Wiseman H M. Adaptive phase measurements for narrowband squeezed beams[J]. *Physical Review A*, 2006, 73(6): 063824.
- [35] Tsang M. Optimal waveform estimation for classical and quantum systems via time-symmetric smoothing[J]. *Physical Review A*, 2009, 80(3): 033840.
- [36] Bonato C, Berry D W. Adaptive tracking of a time-varying field with a quantum sensor[J]. *Physical Review A*, 2017, 95(5): 052348.
- [37] Shankar A, Greve G P, Wu B C, et al. Continuous real-time tracking of a quantum phase below the standard quantum limit[J]. *Physical Review Letters*, 2019, 122(23): 233602.
- [38] Giunta M, Hänsel W, Fischer M, et al. Real-time phase tracking for wide-band optical frequency measurements at the 20th decimal place[J]. *Nature Photonics*, 2020, 14(1): 44-49.
- [39] DiMario M T, Becerra F E. Phase tracking for sub-shot-noise-limited receivers[J]. *Physical Review Research*, 2020, 2(2): 023384.
- [40] Madsen C N, Valdetaro L, Mølmer K. Quantum estimation of a time-dependent perturbation[J]. *Physical Review A*, 2021, 104(5): 052621.
- [41] Berry D W, Tsang M, Hall M J W, et al. Quantum Bell-Ziv-Zakai bounds and Heisenberg limits for waveform estimation[J]. *Physical Review X*, 2015, 5(3): 031018.
- [42] Helstrom C W. Quantum detection and estimation theory [J]. *Journal of Statistical Physics*, 1969, 1(2): 231-252.
- [43] Tsang M, Wiseman H M, Caves C M. Fundamental quantum limit to waveform estimation[J]. *Physical Review Letters*, 2011, 106(9): 090401.
- [44] Berry D W, Hall M J W, Wiseman H M. Stochastic Heisenberg limit: optimal estimation of a fluctuating phase [J]. *Physical Review Letters*, 2013, 111(11): 113601.
- [45] Berry D W, Wiseman H M. Adaptive quantum measurements of a continuously varying phase[J]. *Physical Review A*, 2002, 65(4): 043803.
- [46] Tsang M, Shapiro J H, Lloyd S. Quantum theory of optical temporal phase and instantaneous frequency. II. continuous-time limit and state-variable approach to phase-locked loop design[J]. *Physical Review A*, 2009, 79(5): 053843.
- [47] Dinani H T, Berry D W. Adaptive estimation of a time-varying phase with a power-law spectrum via continuous squeezed states[J]. *Physical Review A*, 2017, 95(6): 063821.
- [48] Zheng K M, Mi M H, Wang B, et al. Quantum-enhanced stochastic phase estimation with the SU(1, 1) interferometer[J]. *Photonics Research*, 2020, 8(10): 1653-1661.
- [49] Song Q, Li H J, Huang J Z, et al. Adaptive time-varying parameter estimation via weak measurement[J]. *Physical Review Applied*, 2022, 18(4): 044031.
- [50] Wheatley T A, Berry D W, Yonezawa H, et al. Adaptive optical phase estimation using time-symmetric quantum smoothing[J]. *Physical Review Letters*, 2010, 104(9): 093601.
- [51] Kou J L, Ding M, Feng J, et al. Microfiber-based Bragg gratings for sensing applications: a review[J]. *Sensors*, 2012, 12(7): 8861-8876.
- [52] Mescia L, Prudenzano F. Advances on optical fiber sensors[J]. *Fibers*, 2013, 2(1): 1-23.
- [53] Xu Y P, Lu P, Chen L A, et al. Recent developments in micro-structured fiber optic sensors[J]. *Fibers*, 2017, 5(1): 3.
- [54] Zhang L D, Zheng K M, Liu F, et al. Quantum-limited fiber-optic phase tracking beyond range[J]. *Optics Express*, 2019, 27(3): 2327-2334.
- [55] Yonezawa H, Nakane D, Wheatley T A, et al. Quantum-enhanced optical-phase tracking[J]. *Science*, 2012, 337(6101): 1514-1517.
- [56] Iwasawa K, Makino K, Yonezawa H, et al. Quantum-limited mirror-motion estimation[J]. *Physical Review Letters*, 2013, 111(16): 163602.
- [57] Dong Y, Wang Z H, Lin H B, et al. Heisenberg-limited waveform estimation with solid-state spins in diamond [EB/OL]. (2021-05-13)[2023-02-05]. <https://arxiv.org/abs/2105.06037>.
- [58] Colangelo G, Ciurana F M, Bianchet L C, et al. Simultaneous tracking of spin angle and amplitude beyond classical limits[J]. *Nature*, 2017, 543(7646): 525-528.
- [59] Jiménez-Martínez R, Kołodzyński J, Troullinou C, et al. Signal tracking beyond the time resolution of an atomic sensor by Kalman filtering[J]. *Physical Review Letters*, 2018, 120(4): 040503.
- [60] Zhang C, Mølmer K. Estimating a fluctuating magnetic field with a continuously monitored atomic ensemble[J]. *Physical Review A*, 2020, 102(6): 063716.
- [61] Turner E, Wu S H, Li X Z, et al. Real-time magnetometry with coherent population trapping in a nitrogen-vacancy center[J]. *Physical Review A*, 2022, 105(1): L010601.
- [62] Turner E, Wu S H, Li X Z, et al. Spin-based continuous Bayesian magnetic-field estimations aided by feedback control[J]. *Physical Review A*, 2022, 106(5): 052603.
- [63] Cooper G M, Hausman R. A molecular approach[J]. 2nd ed. Sunderland: Sinauer Associates, 2000.
- [64] Harris T K, Keshwani M M. Measurement of enzyme activity[M]//Methods in enzymology. Amsterdam: Elsevier, 2009: 57-71.
- [65] Cimini V, Mellini M, Rampioni G, et al. Adaptive tracking of enzymatic reactions with quantum light[J]. *Optics Express*, 2019, 27(24): 35245-35256.
- [66] Spedalieri G, Piersimoni L, Laurino O, et al. Detecting and tracking bacteria with quantum light[J]. *Physical Review Research*, 2020, 2(4): 043260.
- [67] Gianani I, Albarelli F, Cimini V, et al. Experimental function estimation from quantum phase measurements [J]. *Physical Review A*, 2021, 103(4): 042602.