

# 基于空谱约束的加权稀疏柯西非负矩阵分解 高光谱解混

陈善学<sup>1,2</sup>, 胡之源<sup>1,3\*</sup>

<sup>1</sup>重庆邮电大学通信与信息工程学院, 重庆 400065;

<sup>2</sup>移动通信教育部工程研究中心, 重庆 400065;

<sup>3</sup>移动通信技术重庆市重点实验室, 重庆 400065

**摘要** 传统非负矩阵分解(NMF)应用于高光谱解混时,容易受到椒盐噪声的干扰,造成解混的失败。以往的稀疏解混需要在涉及信息比较分散且易受噪声影响的空间域中寻找最优特征子集。为了解决这些问题,提出了基于空谱约束的加权稀疏柯西非负矩阵分解(SSCNMF)算法,首先采用基于柯西损失函数的NMF模型,其在抑制极端异常值方面,有着良好的鲁棒性。其次,引入自适应稀疏权重因子,提高了丰度矩阵的稀疏性。同时,加入光谱空间约束项,其中光谱因子用于测量不同光谱之间的丰度稀疏度,空间因子利用了丰度空间域的平滑性,提高了数据特征的提取效率。分别对模拟数据集和真实数据集进行了仿真实验,通过与一些经典高光谱解混算法的对比,验证了SSCNMF算法的有效性和优良的抗噪声性能。

**关键词** 遥感与传感器; 高光谱解混; 非负矩阵分解; 柯西损失函数; 稀疏; 空谱约束

中图分类号 TP751 文献标志码 A

DOI: 10.3788/LOP213319

## Weighted Sparse Cauchy Nonnegative Matrix Factorization Hyperspectral Unmixing Based on Spatial-Spectral Constraints

Chen Shanxue<sup>1,2</sup>, Hu Zhiyuan<sup>1,3\*</sup>

<sup>1</sup>Chongqing University of Posts and Telecommunications, School of Communication and Information Engineering, Chongqing, 400065, China;

<sup>2</sup>Engineering Research Center of Mobile Communications of the Ministry of Education, Chongqing, 400065, China;

<sup>3</sup>Chongqing Key Laboratory of Mobile Communications Technology, Chongqing, 400065, China

**Abstract** Traditional nonnegative matrix factorization (NMF) applied to hyper-spectral unmixing is susceptible to the interference of pretzel noise, resulting in unmixing failure. Previous sparse unmixing requires determining the optimal feature subset in a spatial domain involving more dispersed information and susceptibility to noise. The weighted sparse Cauchy-nonnegative matrix factorization (SSCNMF) algorithm based on the spatial-spectral constraints is proposed to solve these problems. First, the Cauchy loss-function-based NMF model, which exhibits excellent robustness in suppressing extreme outliers, is applied. Second, an adaptive sparse weighting factor is introduced to improve the sparsity of the abundance matrix. A spatial-spectral constraint term is added, in which the spectral factor is used to measure the sparsity of abundance among different spectra. The spatial factor exploits the smoothness of the spatial domain of abundance to improve the extraction efficiency of data features. Simulation experiments were conducted on simulated and actual datasets. The effectiveness and excellent anti-noise performance of the SSCNMF algorithm are verified by comparing it with some classical hyper-spectral unmixing algorithms.

**Key words** remote sensing and sensors; hyper-spectral unmixing; nonnegative matrix factorization; Cauchy loss function; sparse; spatial-spectral constraints

收稿日期: 2021-12-23; 修回日期: 2022-02-17; 录用日期: 2022-02-25; 网络首发日期: 2022-03-07

基金项目: 重庆市教委科学技术研究项目(KJ1400416)

通信作者: \*308776453@qq.com

# 1 引言

高光谱遥感成像是一门新型的遥感技术,融合了成像技术和光谱技术,光谱分辨率可达纳米级<sup>[1]</sup>。高光谱遥感器的成像光谱仪获取的高光谱图像,能够得到上百通道、连续波段的图像,这是传统的多光谱遥感所无法达到的<sup>[2]</sup>。目前高光谱遥感成像技术广泛应用于地物检测、模式识别、矿物勘探、图像分类等领域<sup>[3-4]</sup>。高光谱图像通常存储为三维的数据立方体,其包含了丰富的光谱信息和空间信息,可以有效表征地物的空间分布、辐射特性以及几何特征。由于高光谱遥感器的空间分辨率精度的限制以及地物多样性等主客观因素,混合像元是高光谱图像中很常见的现象。因此,如何最大程度地提取混合像元中的端元及其对应的丰度,成为目前高光谱遥感成像技术研究的热点<sup>[5]</sup>。

高光谱解混算法,依赖于场景混合模型场景的建立<sup>[6]</sup>,通常是基于线性混合的模型和非线性混合的模型。非线性模型考虑了多重散射效应,引入了辐射传输理论<sup>[7]</sup>,建模和恢复较困难。线性混合模型的物理意义明确且简单效率高,成为目前的主流解混模型<sup>[8]</sup>。基于线性模型的高光谱解混算法,包含了统计、稀疏回归、贝叶斯、原型分析以及几何的数学思想<sup>[9]</sup>,使得线性光谱解混的过程有了数学的理论支撑。

混合像元的分解首先需要确认端元的数量和对数据进行降维,端元数量可以根据研究的需要直接指定,也可以根据图像的内在信息来确定,主成分分析法<sup>[10]</sup>和最大噪声分数<sup>[11]</sup>都是对数据进行线性变换,去掉了信息量少的波段。然后需要得到初始化的端元和丰度,为了获取图像中纯地物的光谱及其所占丰度,通常采用顶点成分分析法<sup>[12]</sup>来获取初始化的端元,再使用全约束的最小二乘法<sup>[13]</sup>获取初始化的丰度。非负矩阵分解(NMF)是一种盲源分离的方法<sup>[14]</sup>,把高维矩阵分解成一个非负基矩阵和一个非负系数矩阵,其物理含义契合高光谱线性解混模型,运用到高光谱解混中有不错的效果,但是NMF算法有着明显的非凸性,很容易达到局部最小,得到的解可能并不是唯一解,因此仅有非负约束是远远不够的。为了缩小解的空间,研究学者们针对端元和丰度加上了不同的约束项,且都取得了不错的效果。Miao等<sup>[15]</sup>提出了最小体积约束的非负矩阵(MVCNMF)算法,该方法引入了体积约束项,将最小二乘分析和凸几何模型相结合。徐光宪等<sup>[16]</sup>采用近似交替优化与交替方向乘法与最小体积约束相结合,提出了一种基于最小体积稀疏正则的高光谱解混办法(ADMM)。Zhang等<sup>[17]</sup>同时考虑了端元和丰度的约束,提出了一种基于端元独立性的和丰度稀疏性的非负矩阵分解算法(EASNMF)。Qian等<sup>[18]</sup>引入丰度矩阵上的 $L_{1/2}$ 正则项,计算效率高,且获得了更稀疏的解。Lu等<sup>[19]</sup>挖掘了高光谱解混过程中数据

潜在的流形结构,提出了基于流形正则化的NMF(GNMF)算法。

以上改进后的NMF办法应用于高光谱解混,均取得了不错的效果,但忽略了噪声的影响。传统的NMF对异常值和噪声非常敏感,分解结果往往不稳定。为了抑制噪声,提高模型的稳定性,Jiang等<sup>[20]</sup>改进了传统的NMF模型,提出了基于最大似然估计的高光谱NMF(MLENMF)算法,将原始的最小二乘损失替换为基于最大似然估计的损失函数。Huang等<sup>[21]</sup>结合了 $L_{1,2}$ 范数和 $L_{2,1}$ 范数对传统的模型进行了优化,该方法同时实现了对频带噪声和像素噪声的鲁棒性。Wang等<sup>[22]</sup>用柯西损失函数改进了模型,并且引入了流形正则化项,保留了高光谱图像固有结构的同时,很大程度上克服了极端异常值对解混的影响。

本文提出了一种基于光谱空间约束的加权稀疏柯西非负矩阵分解(SSCNMF)算法,首先用柯西损失函数替换标准NMF中的F范数,在抑制极端异常值方面,有着良好的鲁棒性。接着进一步引入了自适应加权稀疏约束项以提高丰度矩阵的稀疏性。其次结合图像的空间信息和光谱信息,加入光谱空间约束项,用光谱因子来表达不同光谱之间的丰度稀疏度,利用空间因子来增强丰度空间域的平滑性。最后在模拟数据集和真实数据集上进行仿真实验,并与其他算法的表现进行对比分析,验证了SSCNMF算法的有效性。

## 2 预备知识

### 2.1 线性混合模型

在线性混合模型中,将高光谱图像描述为

$$\mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^m \mathbf{h}_{ij} \mathbf{w}_j + \boldsymbol{\varepsilon}_i, \quad (1)$$

式中: $\mathbf{r}_i$ 为混合像元; $\mathbf{w}_j$ 为端元向量; $\mathbf{h}_{ij}$ 为 $\mathbf{w}_j$ 在 $\mathbf{r}_i$ 中的权重,称为丰度; $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ 为误差向量。在解混时,需要添加丰度非负约束(ANC) $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{L \times N}$ 与丰度和为一约束(ASC) $\sum_{i=1}^m \mathbf{h}_{ij} = 1$ 两个条件,来限制线性解混模型。

将式(1)写成矩阵形式,可表示为

$$\mathbf{R} = \mathbf{W}\mathbf{H} + \mathbf{E}, \quad (2)$$

式中: $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{L \times N}$ ,表示 $L$ 个波段、 $N$ 个像元的高光谱图像矩阵; $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{L \times M}$ 和 $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{M \times N}$ 分别表示端元矩阵和丰度矩阵; $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{L \times N}$ 是误差矩阵。

### 2.2 传统NMF

传统的NMF是将一个高维的矩阵 $\mathbf{R}^{L \times N}$ 分解成为两个非负的低秩矩阵 $\mathbf{W}^{L \times M}$ 和 $\mathbf{H}^{M \times N}$ 的乘积:

$$\mathbf{R} \approx \mathbf{W}\mathbf{H}. \quad (3)$$

为了衡量 $\mathbf{W}\mathbf{H}$ 逼近于 $\mathbf{R}$ 的程度,通常采用基于欧氏距离损失函数的NMF:

$$J(\mathbf{R} \parallel \mathbf{W}\mathbf{H}) = \frac{1}{2} \sum_{ij} [\mathbf{R}_{ij} - (\mathbf{W}\mathbf{H})_{ij}]^2 = \frac{1}{2} \|\mathbf{R} - \mathbf{W}\mathbf{H}\|_F^2, \quad (4)$$

式中, $\|\cdot\|_F$ 表示矩阵的F范数,用梯度下降法,得到 $\mathbf{W}$

和  $\mathbf{H}$  的迭代式为

$$\mathbf{W} \leftarrow \mathbf{W} \otimes (\mathbf{R}\mathbf{H}^T) / (\mathbf{W}\mathbf{H}\mathbf{H}^T), \quad (5)$$

$$\mathbf{H} \leftarrow \mathbf{H} \otimes (\mathbf{W}^T\mathbf{R}) / (\mathbf{W}^T\mathbf{W}\mathbf{H}), \quad (6)$$

式中,  $\otimes$  是哈达玛积, 表示两个矩阵对应元素相乘。

### 3 基于空谱约束的柯西 NMF 高光谱解混

#### 3.1 SSCNMF 模型

本文提出一种新的算法, 首先用柯西损失函数模型替换传统的基于欧氏距离的损失函数模型。柯西损失函数<sup>[23]</sup>(CLF)的定义为

$$\phi(x) = \ln \left[ 1 + \left( \frac{x}{c} \right)^2 \right]. \quad (7)$$

传统的基于欧氏距离的损失函数, 对离群点较为敏感, 极端异常值可能会在重建误差中占据主导地位, 基于 CLF 的 NMF 方法在处理此类离群点可以保持良好的鲁棒性。Guan 等<sup>[24]</sup>在基于柯西损失函数的 NMF 模型上进行了改进, 提出了截断柯西非负矩阵分解 (truncated Cauchy NMF), 它通过截断大误差来处理极端异常值。改进后的柯西损失函数为

$$h(x) = \begin{cases} \ln[1 + (x/c)^2], & |x| \leq \epsilon \\ \ln[1 + (\epsilon/c)^2], & |x| > \epsilon \end{cases}, \quad (8)$$

故截断柯西 NMF 的目标函数为

$$J(\mathbf{R} \|\mathbf{W}\mathbf{H}) = \frac{1}{2} \sum_{ij} h \left[ \left( \frac{\mathbf{R} - \mathbf{W}\mathbf{H}}{\gamma} \right)_{ij}^2 \right], \quad (9)$$

式中,  $\gamma$  为比例参数。在图 1 中与传统 NMF 损失函数进行对比, 不难看出, 截断柯西损失函数可以滤除掉任何极端异常值。引入加权稀疏正则项和空谱约束项<sup>[25]</sup>:

$$\min - \alpha \|\mathbf{Q} \otimes \mathbf{H}\|_{1/2} + \beta \|(\mathbf{Q}_{\text{spe}} \mathbf{Q}_{\text{spa}}) \otimes \mathbf{H}\|_{1,1}, \quad (10)$$

式中:  $\alpha$  是控制加权稀疏约束的参数; 自适应权重  $\mathbf{Q}$  用来增强丰度矩阵的稀疏性, 稀疏权重因子  $\mathbf{Q}$  的表达式为

$$\mathbf{Q}^{t+1} = \frac{1}{\mathbf{H}^t + \epsilon}, \quad (11)$$

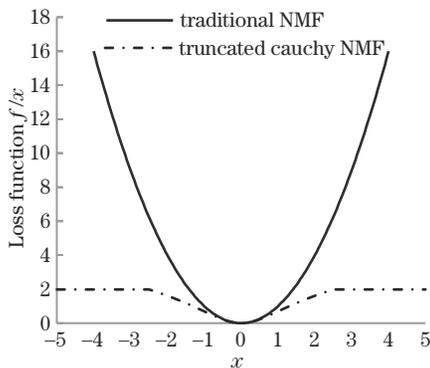


图 1 不同损失函数比较

Fig. 1 Comparison of different loss functions

式中:  $\mathbf{H}^t$  为第  $t$  次迭代的丰度矩阵; 加入一个很小的正常数  $\epsilon$ , 防止分母为 0。  $\mathbf{Q}_{\text{spe}} \in \mathbb{R}^{M \times M}$  为光谱加权因子, 用于测量不同光谱之间的丰度稀疏度, 空间加权因子  $\mathbf{Q}_{\text{spa}} \in \mathbb{R}^{M \times N}$  则利用了丰度空间域的平滑性, 提高了数据特征的提取效率和抗噪声性能。  $\beta$  是控制空谱约束的参数, 式中  $\|\mathbf{H}_{1,1}\| = \sum_{j=1}^m \|\mathbf{h}_j\|_1$ ,  $\mathbf{h}_j$  是丰度矩阵的第  $j$  列,  $\mathbf{Q}_{\text{spe}}$  的表达式为

$$\mathbf{Q}_{\text{spe}}^{t+1} = \text{diag} \left[ \frac{1}{\|\mathbf{H}^t(1, :)\|_2 + \epsilon}, \dots, \frac{1}{\|\mathbf{H}^t(m, :)\|_2 + \epsilon} \right], \quad (12)$$

式中:  $\text{diag}$  表示对角矩阵;  $\mathbf{Q}_{\text{spa}} \in \mathbb{R}^{M \times N}$  为空间加权因子, 表示丰度空间中邻域值之间的权重关系, 其取值通过领域距离权值和领域值来确定。其表达式为

$$\mathbf{Q}_{\text{spa}}^{t+1} = \begin{bmatrix} q_{\text{spa},11}^{t+1} & \cdots & q_{\text{spa},1n}^{t+1} \\ \cdots & q_{\text{spa},ij}^{t+1} & \cdots \\ q_{\text{spa},m1}^{t+1} & \cdots & q_{\text{spa},mn}^{t+1} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

领域距离权重  $D_{ij}$  代表中心点与领域点欧氏距离的倒数,  $D_{ij} = 1/\sqrt{(a-b)^2 + (c-d)^2}$ 。坐标差值越大, 权重  $D_{ij}$  越小, 领域距离加权平均值表示为

$$f_{N(h_{ij})}(h_{ij}) = \frac{\sum_{h_b \in N_b(h_{ij})} D_{ij} h_b}{\sum_{h_b \in N_b(h_{ij})} D_{ij}}, \quad (14)$$

式中,  $N_b(h_{ij})$  为  $h_{ij}$  的邻域元素, 在此采用  $3 \times 3$  的矩阵, 故  $h_{ij}$  的邻域元素  $h_b$  有 8 个。  $\mathbf{Q}_{\text{spa}}$  中每个元素  $q_{\text{spa},ij}^{t+1}$  的迭代表达式为

$$q_{\text{spa},ij}^{t+1} = \frac{1}{f_{N(h_{ij})}(h_{ij}^t) + \epsilon}. \quad (15)$$

本文将加权稀疏约束和空谱约束整合到柯西 NMF 框架中, 提出一种新的 SSCNMF 模型, 该模型的目标函数表达式为

$$J(\mathbf{W}, \mathbf{H}) = \min_{\mathbf{W}, \mathbf{H}} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^N h \left[ (\mathbf{R} - \mathbf{W}\mathbf{H})_{ij}^2 \right] + \alpha \|\mathbf{Q} \otimes \mathbf{H}\|_{1/2} + \beta \|(\mathbf{Q}_{\text{spe}} \mathbf{Q}_{\text{spa}}) \otimes \mathbf{S}\|_{1,1}. \quad (16)$$

#### 3.2 模型优化

由于自然对数函数是非线性的, 式(16)目标函数并非传统的二次规划问题, 且非凸, 不能直接进行优化。对于此类问题, 文献[26]提出半二次规划的方法求解, 通过凸共轭理论<sup>[27]</sup>引入辅助变量。根据此方法, 引入辅助矩阵  $\mathbf{X}_{ij}$ , 式(16)等价于

$$\arg \max_{\mathbf{w}, \mathbf{h}, \mathbf{x}} \frac{1}{2} \sum \left[ \mathbf{X}_{ij} \frac{(\mathbf{R} - \mathbf{W}\mathbf{H})_{ij}^2}{\gamma^2} - l^*(\mathbf{X}_{ij}) \right] + \alpha \|\mathbf{Q} \otimes \mathbf{H}\|_{1/2} + \beta \|(\mathbf{Q}_{\text{spe}} \mathbf{Q}_{\text{spa}}) \otimes \mathbf{H}\|_{1,1}. \quad (17)$$

根据文献[27]可得  $\mathbf{X}_{ij}^{t+1}$  的最优解表达式为

$$\mathbf{X}_{ij}^{t+1} = \begin{cases} -\frac{1}{1 + \frac{(\mathbf{R} - \mathbf{W}^t \mathbf{H}^t)_{ij}^2}{\gamma^2}}, & |\mathbf{R} - \mathbf{W}^t \mathbf{H}^t|_{ij} \leq \gamma \sqrt{\epsilon} \\ 0, & |\mathbf{R} - \mathbf{W}^t \mathbf{H}^t|_{ij} \geq \gamma \sqrt{\epsilon} \end{cases} \quad (18)$$

对于目标函数式(17),引入拉格朗日乘子  $\Phi \in \mathbb{R}^{L \times P}$ :

$$J(\mathbf{H}) = \min_{\mathbf{H}} \frac{1}{2} \sum_{ij} \left[ \mathbf{X}_{ij}^{t+1} \frac{(\mathbf{R} - \mathbf{W}^t \mathbf{H}^t)_{ij}^2}{\gamma^2} - l^*(\mathbf{X}_{ij}^{t+1}) \right] + \alpha \|\mathbf{Q} \otimes \mathbf{H}\|_{1/2} + \beta \|(\mathbf{Q}_{\text{spe}} \mathbf{Q}_{\text{spa}}) \otimes \mathbf{H}\|_{1,1} + \text{Tr}(\Phi \mathbf{H}) \quad (19)$$

在库恩-塔克尔 (Karush-Kuhn-Tucker, KKT) 条件下,即  $\Phi_{kj} \mathbf{H}_{kj} = 0$ ,可得  $\mathbf{H}$  的迭代式为

$$\mathbf{H}_{kj}^{t+1} = \mathbf{H}_{kj}^t \frac{[\mathbf{W}^{t^T} (\mathbf{X}^{t+1} \otimes \mathbf{R})]_{kj}}{[\mathbf{W}^{t^T} (\mathbf{X}^{t+1} \otimes \mathbf{W}^t \mathbf{H}^t)]_{kj} + \frac{\alpha}{2} (\mathbf{Q}^{t+1})_{kj}^{1/2} \otimes (\mathbf{H}^t)_{kj}^{-1/2} + \beta (\mathbf{Q}_{\text{spe}}^{t+1})_{kj} \otimes (\mathbf{Q}_{\text{spa}}^{t+1})_{kj}} \quad (20)$$

同理,对于目标函数式(17),引入拉格朗日乘子  $\Psi \in \mathbb{R}^{L \times P}$ :

$$J(\mathbf{W}) = \min_{\mathbf{W}} \frac{1}{2} \sum_{r_y} \left[ \mathbf{X}_{ij}^{t+1} \frac{(\mathbf{R} - \mathbf{W}^t \mathbf{H}^t)_{ij}^2}{\gamma^2} - l^*(\mathbf{X}_{ij}^{t+1}) \right] + \text{Tr}(\Psi \mathbf{W}) \quad (21)$$

在 KKT 条件下,即  $\Psi_{kj} \mathbf{W}_{kj} = 0$ ,可得  $\mathbf{W}$  的迭代式为

$$\mathbf{W}_{ik}^{t+1} = \mathbf{W}_{ik}^t \frac{[(\mathbf{X}^{t+1} \otimes \mathbf{R}) \mathbf{H}^{t+1^T}]_{kj}}{\left\{ [\mathbf{X}^{t+1} \otimes (\mathbf{W}^t \mathbf{H}^{t+1})] \mathbf{H}^{t+1^T} \right\}_{kj}} \quad (22)$$

对于比例参数  $\gamma$  的估计问题,Nagy<sup>[28]</sup>提供了一种基于 I-散度的方法,简称 Nagy 算法,根据该算法,比例参数  $\gamma$  的迭代式为

$$\gamma_{k+1} = \gamma_k \sqrt{1/e_k^0 - 1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (23)$$

### 3.3 算法的实现

在 SSCNMF 算法的优化问题中,选择合适的初始化方法,可以极大地减少迭代的次数。本文分别采用了顶点成分分析 (VCA)<sup>[29]</sup> 和全约束最小二乘法 (FCLS)<sup>[30]</sup> 初始化端元矩阵  $\mathbf{W}$  和丰度矩阵  $\mathbf{H}$ 。

考虑到 ASC 的约束,根据 Wang 等<sup>[31]</sup>提出的方法,在图像矩阵  $\mathbf{R}$ 、端元矩阵  $\mathbf{W}$  和辅助矩阵  $\mathbf{X}$  增加一行常数值,即  $\mathbf{R}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \delta \mathbf{1}_n^T \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{W}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{W} \\ \delta \mathbf{1}_n^T \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{X}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \delta \mathbf{1}_n^T \end{bmatrix}$ ,  $\delta$  的值越大,  $\mathbf{H}$  列的和更接近 1。根据经验和多次实验,本文将  $\delta$  的值设定为 18。SSCNMF 算法的迭代终止条件有两个,满足一个即停止迭代:第一个条件是达到最大迭代次数,本文设置的最大迭代次数为 1500 次;第二个条件是设置误差阈值,计算原始图像与当前估计的图像的欧氏距离,即

$$d = \|\mathbf{R} - \mathbf{W}^t \mathbf{H}^t\|_F^2 \quad (24)$$

本文设定的迭代结束阈值  $d$  为  $10^{-3}$ 。最后,本文提出的 SSCNMF 模型如表 1 所示。

## 4 实验结果分析

在模拟数据集和真实数据集上进行了实验,并与 MVCNMF<sup>[15]</sup>、 $L_{1/2}$ -NMF<sup>[18]</sup>、Cauchy NMF<sup>[32]</sup>、SSRNMF<sup>[32]</sup>

表 1 SSCNMF 算法流程

Table 1 SSCNMF algorithm process

<b>Input:</b> hyperspectral image matrix $\mathbf{R}$ , parameters $\delta, \alpha$ , and $\beta$ ;
<b>Initialization:</b> initialize end element matrix $\mathbf{W}^0$ and abundance matrix $\mathbf{H}^0$ using VCA-FCLS;
<b>Step1:</b> calculate error matrix $\mathbf{E}^t = \frac{\mathbf{R} - \mathbf{W}^t \mathbf{H}^t}{\gamma^t}$ ;
<b>Step2:</b> calculate auxiliary matrix $\mathbf{X}_{ij}^t = \frac{1}{1 + (\mathbf{E}_{ij}^t)^2}$ ;
<b>Step3:</b> calculate $e^t = \frac{1}{L * N} \sum \mathbf{R}_{ij}$ ;
<b>Step4:</b> calculate $\gamma_{t+1} = \gamma_t * \sqrt{\frac{1}{e^0 - 1}}$ ;
<b>Step5:</b> $\mathbf{X}^t$ cancel outliers to $\mathbf{X}^{t+1}$ ;
<b>Step6:</b> applying ASC constraints $\mathbf{R}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \delta \mathbf{1}_n^T \end{bmatrix}$ , $\mathbf{W}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{W} \\ \delta \mathbf{1}_n^T \end{bmatrix}$ , $\mathbf{X}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \delta \mathbf{1}_n^T \end{bmatrix}$ ;
<b>Step7:</b> update abundance matrix $\mathbf{H}_{kj}^{t+1}$ according to Eq. (20);
<b>Step8:</b> update error matrix $\mathbf{E}^{t+1} = \frac{\mathbf{R} - \mathbf{W}^t \mathbf{H}^{t+1}}{\gamma^t}$ ;
<b>Step9:</b> update auxiliary matrix $\mathbf{X}_{ij}^{t+1} = \frac{1}{1 + (\mathbf{E}_{ij}^{t+1})^2}$ ;
<b>Step10:</b> update element matrix $\mathbf{W}_{ik}^{t+1}$ according to Eq. (22);
Repeat above steps until stop condition is met;
<b>Output:</b> element matrix $\mathbf{W}$ and abundance matrix $\mathbf{H}$ .

和 SSWNMF<sup>[25]</sup> 等经典的算法进行了比较。采用光谱角距离 (SAD) 和均方根误差 (RMSE) 来评估算法的性能。

SAD 指标用来评估估计端元  $\hat{\mathbf{W}}_k$  与真实端元  $\mathbf{W}_k^T$  之间的相似程度。其定义为

$$S_{\text{SAD}} = \arccos \left( \frac{\mathbf{W}_k^T \hat{\mathbf{W}}_k}{\|\mathbf{W}_k^T\| \|\hat{\mathbf{W}}_k\|} \right) \quad (25)$$

RMSE 指标用来评估重构图像  $\hat{\mathbf{R}}$  与真实图像  $\mathbf{R}$  的相似程度。其定义为

$$E_{\text{RMSE}} = \frac{1}{L \times N} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^N \sqrt{\|\mathbf{r}_{ij} - \hat{\mathbf{r}}_{ij}\|_2^2} \quad (26)$$

由式(25)和式(26)可以看出, SAD 和 RMSE 值越小, 解混精度越高, 算法更有效。本文所有实验均进行了 20 次重复实验以避免偶然性。

本文实验使用的计算机运行内存为 16 GB, 处理器为 AMD Ryzen 5 4600 H, 主频 3.00 GHz。使用 MatlabR2020a 仿真平台, 在 Windows10 上运行。本文所使用的模拟数据集, 来自美国地质勘探局的数字光谱库, 随机挑选了 5 种不同地物光谱, 采用球面高斯场生成对应的丰度, 用 Matlab 高光谱工具箱合成。真实数据集使用了 Jasper Ridge 和 Urban。Jasper Ridge 原始数据有  $512 \times 614$  个像元, 光谱波段记录在 380~2500 nm 中的 224 个通道中。该高光谱图像较为复杂, 便于分析, 本文对原始数据集进行了处理, 移除了 1~3、108~112、154~166 和 220~224 等受大气影响的波段, 剩余 198 个波段供本文分析。下文所使用的 Jasper Ridge 数据集均已经过预处理, 数据量大小为  $100 \times 100 \times 198$ , 其中包含了道路、水体、树木和土壤等 4 种纯像元。Urban 数据集原始数据有  $307 \times 307$  个像元, 包含了 210 个波段, 经过预处理, 移除 1~4、76、87、101~111、136~153 和 198~210 波段, 经过处理后的 Urban 数据集数据量大小为  $307 \times 307 \times 162$ 。该数据集包含树木、沥青、玻璃和屋顶等 4 种纯像元。图 2 展示了模拟数据集包含的 5 种地物端元光谱图。

#### 4.1 参数选择

目标函数式(17)中包含  $\alpha$  和  $\beta$  两个参数。其中  $\alpha$  控制加权稀疏约束,  $\beta$  控制空谱约束。本节研究这两个参数在不同取值下对算法性能的影响。本文尝试了

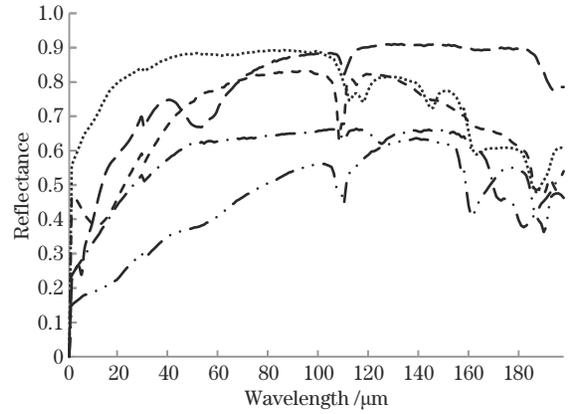


图 2 模拟数据集中的 5 种地物光谱

Fig. 2 Spectra of five ground objects in simulated data set

多种  $\alpha$  和  $\beta$  的组合, 参考了文献[32]的思路, 把  $\alpha$  的设置控制在 0.001 附近,  $\beta$  的值设置在 0.003 附近。 $\alpha$  的取值以  $\{0.0001, 0.0005, 0.001, 0.002\}$  为间隔,  $\beta$  的取值以  $\{0.0005, 0.001, 0.003, 0.007, 0.01\}$  为间隔。由于 Jasper Ridge 数据集相对较小, 本文以 4 种不同的  $\alpha$  和 5 种不同的  $\beta$  取值在 Jasper Ridge 共计进行了 20 组实验, 每组进行 20 组重复实验并取平均值得到了较优的  $\alpha$  和  $\beta$  组合。

图 3 展示了不同的  $\alpha$  和  $\beta$  时 SSCNMF 在 Jasper Ridge 数据集上的表现, 分析可知, 当  $\alpha$  取值为 0.0005、 $\beta$  取值为 0.001 时, 收敛到局部最小。故下文的模拟数据集实验和真实数据集实验的  $\alpha$  均设置为 0.0005,  $\beta$  均设置为 0.001。

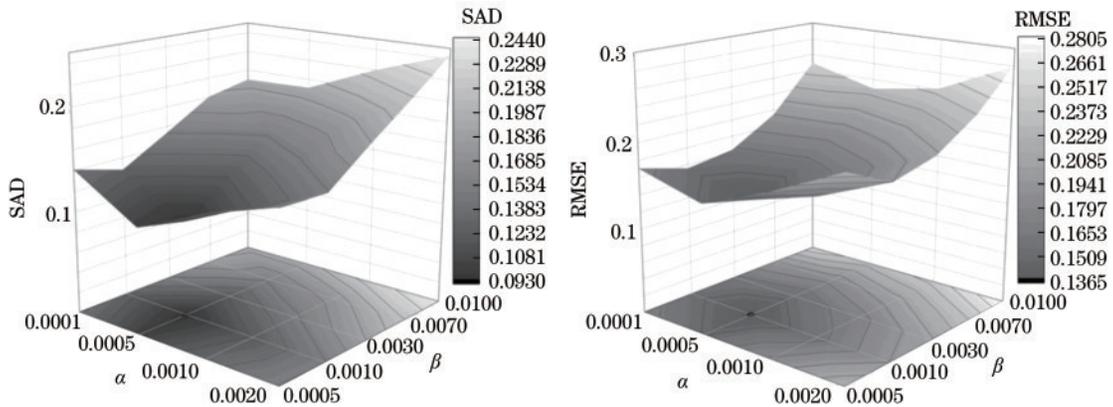


图 3 不同的  $\alpha$  和  $\beta$  在 Jasper Ridge 数据集的平均 SAD 和 RMSE

Fig. 3 Average SAD and RMSE on Jasper Ridge data set for different  $\alpha$  and  $\beta$

#### 4.2 模拟数据集实验

本节实验用来探究模拟数据集加入不同等级高斯白噪声和不同密度椒盐噪声对 SSCNMF 和其他 5 种对比算法解混效果的影响。

在探究被高斯白噪声污染的模拟数据集实验中, 分别加入了信噪比(SNR)等级为 10、15、20、25、30 dB 的高斯白噪声, 表 2 和表 3 展示了模拟数据集加入不同 SNR 等级下各算法的 SAD 值和 RMSE 值表现。从表

中可以看出, 面对不同等级的高斯白噪声污染, SSCNMF 算法相比于其他算法, 获得了最低的 SAD 值和 RMSE 值。

椒盐噪声作为信道间噪声的代表, 通常由图像传输中尖锐和突然的干扰引起。下面实验探究了模拟数据集加入不同密度等级的椒盐噪声各算法的 SAD 值和 RMSE 值表现。表 4 和表 5 展示了分别加入密度等级为 0.1、0.2、0.3、0.4 的椒盐噪声各算法的表现。分

表 2 加入不同等级高斯白噪声各算法的 SAD 值

Table 2 SAD values after adding different levels of Gaussian white noise to each algorithm

SNR /dB	MVCNMF	$L_{1/2}$ -NMF	Cauchy NMF	SSRNMF	SSWNMF	SSCNMF
10	0.2573	0.2674	0.2466	0.2213	0.2160	<b>0.2042</b>
15	0.2041	0.1901	0.1843	0.1594	0.1565	<b>0.1505</b>
20	0.1655	0.1518	0.1511	0.0913	0.0944	<b>0.0889</b>
25	0.1098	0.0942	0.1035	0.0811	0.0735	<b>0.0679</b>
30	0.0917	0.0886	0.0872	0.0641	0.0537	<b>0.0503</b>

表 3 加入不同等级高斯白噪声各算法的 RMSE

Table 3 RMSE values after adding different levels of Gaussian white noise to each algorithm

SNR /dB	MVCNMF	$L_{1/2}$ -NMF	Cauchy NMF	SSRNMF	SSWNMF	SSCNMF
10	0.4274	0.4118	0.4208	0.3473	0.3358	<b>0.3069</b>
15	0.3781	0.3710	0.3543	0.2873	0.2569	<b>0.2381</b>
20	0.2718	0.2556	0.2371	0.1519	0.1501	<b>0.1477</b>
25	0.1405	0.1289	0.1421	0.1088	0.0912	<b>0.0784</b>
30	0.1175	0.1052	0.1056	0.0733	0.0698	<b>0.0595</b>

表 4 加入不同密度椒盐噪声各算法的 SAD 值

Table 4 SAD values after adding salt and pepper noise of different densities to each algorithm

$D$	MVCNMF	$L_{1/2}$ -NMF	Cauchy NMF	SSRNMF	SSWNMF	SSCNMF
0.1	0.1565	0.1497	0.0831	0.0990	0.1074	<b>0.0579</b>
0.2	0.1996	0.1755	0.1463	0.1529	0.1406	<b>0.0892</b>
0.3	0.2136	0.2438	0.1986	0.1820	0.1885	<b>0.1002</b>
0.4	0.3853	0.3313	0.2965	0.2999	0.2734	<b>0.1282</b>

表 5 加入不同密度椒盐噪声各算法的 RMSE 值

Table 5 RMSE values after adding salt and pepper noise of different densities to each algorithm

$D$	MVCNMF	$L_{1/2}$ -NMF	Cauchy NMF	SSRNMF	SSWNMF	SSCNMF
0.1	0.1281	0.1209	0.1093	0.0891	0.0857	<b>0.0567</b>
0.2	0.1687	0.1524	0.1678	0.1356	0.1426	<b>0.0722</b>
0.3	0.2349	0.2388	0.2116	0.1982	0.2031	<b>0.1274</b>
0.4	0.2968	0.2784	0.2849	0.2523	0.2382	<b>0.1519</b>

析表中数据可知,SSCNMF 在面对被椒盐噪声污染的图像,其解混效果远远优于其他算法。这也展现了基于 Cauchy 损失函数的 NMF 算法在处理极端异常值的优越性。

### 4.3 真实数据集实验

本节实验给出了 SSCNMF 与其他 5 种对比算法在真实数据集 Jasper Ridge 和 Urban 上的表现。

图 4 展示了 SSCNMF 算法提取的 Jasper Ridge 数据集地物端元与真实地物端元光谱曲线的对比图。可以看出 SSCNMF 算法提取的水体端元和真实端元最为接近,整体来看 SSCNMF 算法受噪声影响比较小,有比较好的鲁棒性。

图 5 展示了 6 种不同的算法提取的 Jasper Ridge 数据集丰度图与真实丰度图的比较,可以看出,SSCNMF 的丰度图与真实丰度图最为接近,解混效果由好到差依次为:SSCNMF、SSWNMF、SSRNMF、

Cauchy NMF、 $L_{1/2}$ -NMF、MVCNMF。

表 6 和表 7 展示了各算法在 Jasper Ridge 数据集所有地物的 SAD 值和 RMSE 值。分析表中数据可知,从整体来看,SSCNMF 算法的解混效果相比其他对比算法是最优秀的。

图 6 展示了 SSCNMF 算法提取的 Urban 数据集各端元与真实端元的光谱图对比。图 7 展示了在各算法下各端元对应的丰度图与真实丰度图的对比。可以看出,SSCNMF 提取的树木端元与道路端元与真实端元光谱曲线较为接近。6 种算法获取的各端元对应的丰度图相比,SSCNMF 的丰度图与真实丰度图最为接近。

表 8 和表 9 展示了各算法在 Urban 数据集下所有地物的 SAD 值和 RMSE 值。根据表中数据可知,在 Urban 数据集,SSCNMF 对沥青和玻璃端元的解混效果最好,SSCNMF 解混的整体效果优于其他的对比算法。

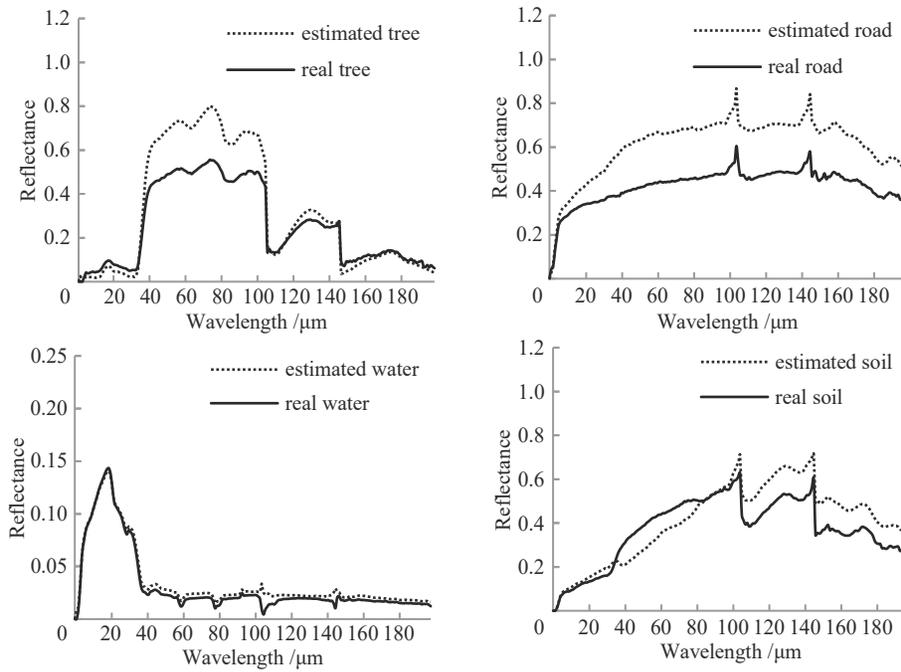


图 4 SSCNMF 算法在 Jasper Ridge 数据集上提取端元与真实端元对比

Fig. 4 Comparison of SSCNMF algorithm for extracting endmembers on Jasper Ridge data set with real endmembers

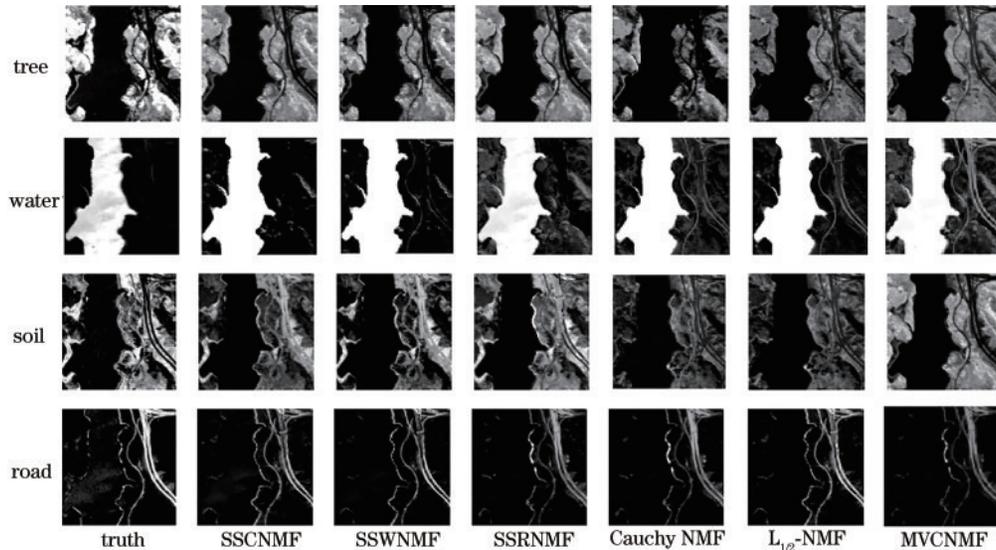


图 5 不同算法在 Jasper Ridge 数据集的丰度图与真实丰度图对比

Fig. 5 Comparison of abundance maps on Jasper Ridge data set with real abundance maps by different algorithms

表 6 Jasper Ridge 数据集各算法的 SAD 值

Table 6 SAD values of different algorithms on Jasper Ridge data set

Category	MVCNMF	$L_{1/2}$ -NMF	Cauchy NMF	SSRNMF	SSWNMF	SSCNMF
Tree	0.1474	0.1316	<b>0.0913</b>	0.1270	0.1112	0.1078
Water	0.1168	0.1239	0.1279	0.0792	0.0875	<b>0.0558</b>
Soil	<b>0.0889</b>	0.1179	0.1028	0.1457	0.0845	0.1203
Road	0.1358	0.1146	0.1256	0.1231	0.0981	<b>0.0886</b>
Mean	0.1224	0.1220	0.1119	0.1187	0.0953	<b>0.0931</b>

表 7 Jasper Ridge 数据集各算法的 RMSE 值

Table 7 RMSE values of different algorithms on Jasper Ridge data set

Category	MVCNMF	$L_{1/2}$ -NMF	Cauchy NMF	SSRNMF	SSWNMF	SSCNMF
Mean	0.2223	0.2011	0.2022	0.1871	0.1431	<b>0.1367</b>

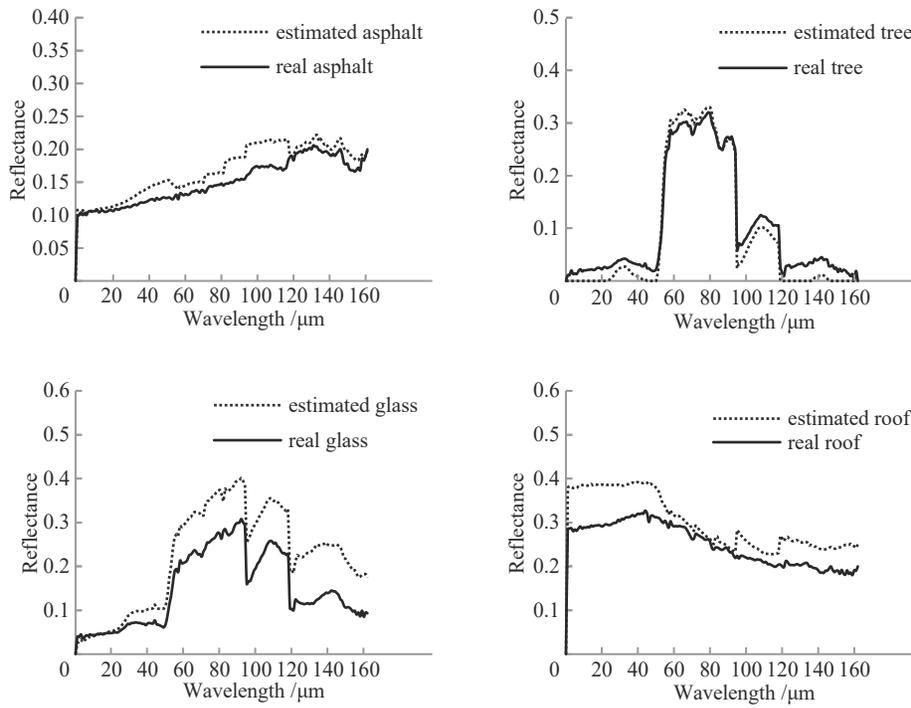


图 6 SSCNMF 算法在 Urban 数据集上提取端元与真实端元对比

Fig. 6 Comparison of SSCNMF algorithm for extracting endmembers on Urban data set with real endmembers

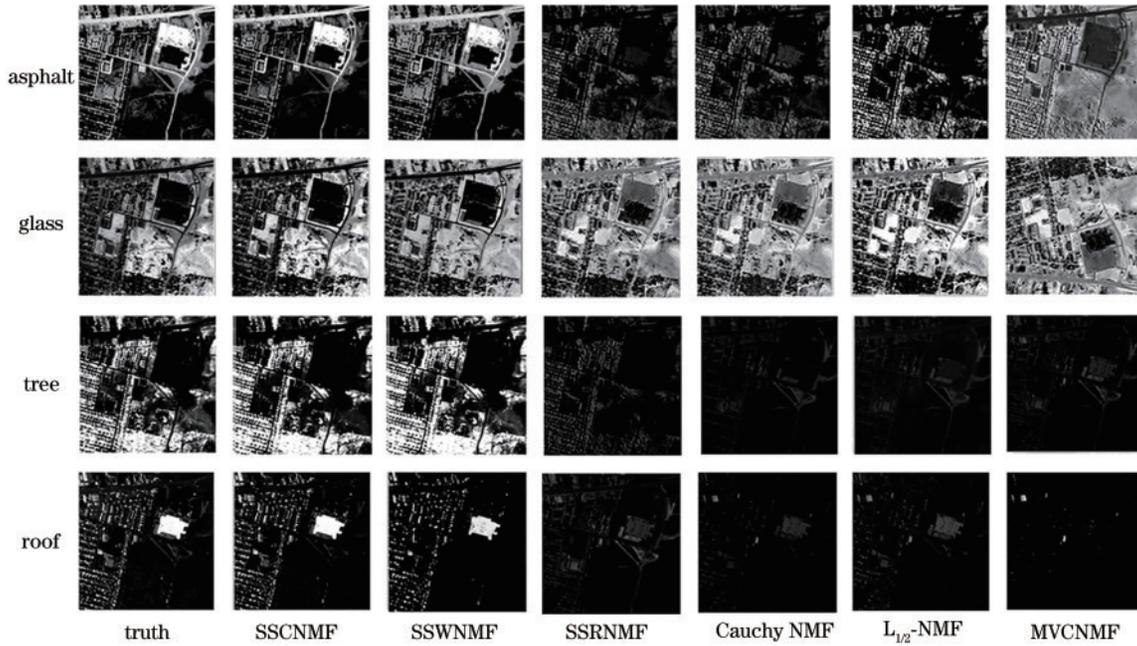


图 7 不同算法在 Urban 数据集的丰度图与真实丰度图对比

Fig. 7 Comparison of abundance maps on Urban data set with real abundance maps by different algorithms

表 8 Urban 数据集各算法的 SAD 值

Table 8 SAD values of different algorithms on Urban data set

Category	MVCNMF	$L_{1/2}$ -NMF	Cauchy NMF	SSRNMF	SSWNMF	SSCNMF
Asphalt	0.2445	0.3580	0.2267	0.2772	0.2310	<b>0.1806</b>
Glass	0.3683	0.3324	0.2863	0.2118	0.2027	<b>0.2015</b>
Tree	0.2874	0.1935	0.3473	<b>0.1347</b>	0.1965	0.2204
Roof	0.1904	<b>0.1471</b>	0.2481	0.1923	0.1618	0.1647
Mean	0.2727	0.2578	0.2771	0.2040	0.1980	<b>0.1918</b>

表 9 Urban 数据集各算法的 RMSE 值

Table 9 RMSE values of different algorithms on Urban data set

Category	MVCNMF	$L_{1/2}$ -NMF	Cauchy NMF	SSRNMF	SSWNMF	SSCNMF
Mean	0.3629	0.3408	0.3426	0.3288	0.2623	<b>0.2594</b>

## 5 结 论

提出了一种新的鲁棒的高光谱解混算法——SSCNMF,该算法用截断的 Cauchy 损失函数替代传统的最小二乘损失函数,并引入了加权稀疏约束增强丰度矩阵的稀疏性和引入包含空间信息和光谱信息的空谱约束项,提高了数据特征的提取效率和抗噪声性能。通过大量模拟数据集和真实数据集的对比实验,论证了 SSCNMF 算法用于高光谱解混的有效性。但所提算法仍有需要改进的地方,例如:1)只考虑了丰度约束项,忽略了端元的约束;2)可以进一步对丰度添加核范数约束,增强低秩性。下一步的研究可以着重考虑这些方面。

## 参 考 文 献

- [1] Keshava N, Mustard J F. Spectral unmixing[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2002, 19(1): 44-57.
- [2] 罗文斐, 钟亮, 张兵, 等. 高光谱遥感图像光谱解混的独立成分分析技术[J]. 光谱学与光谱分析, 2010, 30(6): 1628-1633.  
Luo W F, Zhong L, Zhang B, et al. Independent component analysis for spectral unmixing in hyperspectral remote sensing image[J]. Spectroscopy and Spectral Analysis, 2010, 30(6): 1628-1633.
- [3] Picon A, Ghita O, Whelan P F, et al. Fuzzy spectral and spatial feature integration for classification of nonferrous materials in hyperspectral data[J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2009, 5(4): 483-494.
- [4] Adams J B, Smith M O, Johnson P E. Spectral mixture modeling: a new analysis of rock and soil types at the Viking Lander 1 Site[J]. Journal of Geophysical Research, 1986, 91(B8): 8098-8112.
- [5] 袁静, 章毓晋, 高方平. 线性高光谱解混模型综述[J]. 红外与毫米波学报, 2018, 37(5): 553-571.  
Yuan J, Zhang Y J, Gao F P. An overview on linear hyperspectral unmixing[J]. Journal of Infrared and Millimeter Waves, 2018, 37(5): 553-571.
- [6] Hu Y H, Lee H B, Scarpace F L. Optimal linear spectral unmixing[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 1999, 37(1): 639-644.
- [7] 唐晓燕, 高昆, 倪国强. 高光谱图像非线性解混方法的研究进展[J]. 遥感技术与应用, 2013, 28(4): 731-738.  
Tang X Y, Gao K, Ni G Q. Advances in nonlinear spectral unmixing of hyperspectral images[J]. Remote Sensing Technology and Application, 2013, 28(4): 731-738.
- [8] Wang L, Shi C, Diao C Y, et al. A survey of methods incorporating spatial information in image classification and spectral unmixing[J]. International Journal of Remote Sensing, 2016, 37(16): 3870-3910.
- [9] Bioucas-Dias J M, Plaza A, Dobigeon N, et al. Hyperspectral unmixing overview: geometrical, statistical, and sparse regression-based approaches[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing, 2012, 5(2): 354-379.
- [10] Moore B. Principal component analysis in linear systems: controllability, observability, and model reduction[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1981, 26(1): 17-32.
- [11] Sun L M, Rieger J, Hinrichs H. Maximum noise fraction (MNF) transformation to remove ballistocardiographic artifacts in EEG signals recorded during fMRI scanning [J]. NeuroImage, 2009, 46(1): 144-153.
- [12] Nascimento J M P, Dias J M B. Vertex component analysis: a fast algorithm to unmix hyperspectral data[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2005, 43(4): 898-910.
- [13] Wang L G, Liu D F, Wang Q M. Geometric method of fully constrained least squares linear spectral mixture analysis[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2013, 51(6): 3558-3566.
- [14] Lee D D, Seung H S. Learning the parts of objects by non-negative matrix factorization[J]. Nature, 1999, 401(6755): 788-791.
- [15] Miao L D, Qi H R. Endmember extraction from highly mixed data using minimum volume constrained nonnegative matrix factorization[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2007, 45(3): 765-777.
- [16] 徐光宪, 王延威, 马飞, 等. 基于最小体积稀疏正则的高光谱解混方法的研究[J]. 激光与光电子学进展, 2020, 57(24): 241010.  
Xu G X, Wang Y W, Ma F, et al. Hyperspectral unmixing method based on minimum volume sparse regularization[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2020, 57(24): 241010.
- [17] Zhang J Y, Zhang X R, Jiao L C. Sparse nonnegative matrix factorization for hyperspectral unmixing based on endmember independence and spatial weighted abundance [J]. Remote Sensing, 2021, 13(12): 2348.
- [18] Qian Y T, Jia S, Zhou J, et al. Hyperspectral unmixing via  $L_{1/2}$  sparsity-constrained nonnegative matrix factorization[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2011, 49(11): 4282-4297.[LinkOut]
- [19] Lu X Q, Wu H, Yuan Y, et al. Manifold regularized sparse NMF for hyperspectral unmixing[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2013, 51(5): 2815-2826.
- [20] Jiang Q, Dong Y F, Peng J T, et al. Maximum likelihood estimation based nonnegative matrix factorization for hyperspectral unmixing[J]. Remote Sensing, 2021, 13(13): 2637.

- [21] Huang R S, Li X R, Zhao L Y. Spectral-spatial robust nonnegative matrix factorization for hyperspectral unmixing[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2019, 57(10): 8235-8254.
- [22] Wang H T, Yang W J, Guan N Y. Cauchy sparse NMF with manifold regularization: a robust method for hyperspectral unmixing[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2019, 184: 104898.
- [23] Peng J T, Jiang F, Sun W W, et al. Cauchy NMF for hyperspectral unmixing[C]//IGARSS 2020-2020 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium, September 26-October 2, 2020, Waikoloa, HI, USA. New York: IEEE Press, 2020: 2384-2387.
- [24] Guan N Y, Liu T L, Zhang Y, et al. Truncated Cauchy non-negative matrix factorization[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2019, 41(1): 246-259.
- [25] Zhang S Q, Zhang G R, Li F, et al. Spectral-spatial hyperspectral unmixing using nonnegative matrix factorization [J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2022, 60: 5505713.
- [26] Nikolova M, Ng M K. Analysis of half-quadratic minimization methods for signal and image recovery[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2005, 27(3): 937-966.
- [27] Boyd S P, Vandenberghe L. *Convex optimization*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [28] Nagy F. Parameter estimation of the Cauchy distribution in information theory approach[J]. *Journal of Universal Computer Science*, 2006, 12: 1332-1344.
- [29] Dias J, Nascimento J. *Vertex component analysis*[M]// *Image processing for remote sensing*. Boston: CRC Press, 2007: 149-173.
- [30] Heylen R, Burazerovic D, Scheunders P. Fully constrained least squares spectral unmixing by simplex projection[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2011, 49(11): 4112-4122.
- [31] Wang N, Du B, Zhang L P. An endmember dissimilarity constrained non-negative matrix factorization method for hyperspectral unmixing[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 2013, 6(2): 554-569.
- [32] Huang R, Li X, Zhao L. Spectral-spatial robust nonnegative matrix factorization for hyperspectral unmixing[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2019, 57(10): 8235-8254.