

# 分段线性 Morse 理论下的地表拓扑特征提取与简化

吉雨田, 张春亢\*, 尹耀

贵州大学矿业学院, 贵州 贵阳 550025

**摘要** 针对传统地表特征提取算法存在特征识别不完整, 拓扑关系构建复杂, 难以进行拓扑简化的问题, 本文实现了基于分段线性 Morse 理论的特征提取, 并提出一种新的特征重要性度量指标进行拓扑简化。首先识别关键点构成关键线, 生成 Morse-Smale 复形完成地表拓扑特征构建; 然后提出一种新的特征重要性度量指标, 利用 Morse-Smale 复形的平均特征值反算关键点的特征值, 使其对 Morse-Smale 复形的特征重要性进行双重评估; 最后基于该度量指标实现了地表拓扑特征的简化与表达。实验结果表明, 地表特征被清晰提取并构建了良好的拓扑结构, 特征提取点云压缩率达 36.29%, 拓扑简化的点云压缩率达 70.73%, 大大缩减了点云数据量, 并将冗余拓扑结构剔除, 为后续地表点云的表达与应用奠定良好的数据基础。

**关键词** 遥感; 分段线性 Morse 理论; 地形特征提取; 拓扑简化; 重要性度量

中图分类号 P208

文献标志码 A

doi: 10.3788/LOP202259.0812001

## Extraction and Simplification of Terrain Surface Topological Features Based on Piecewise Linear Morse Theory

Ji Yutian, Zhang Chunkang\*, Yin Yao

College of Mining, Guizhou University, Guiyang, Guizhou 550025, China

**Abstract** This study implements a feature extraction based on piecewise linear Morse theory to solve the problems of incomplete feature recognition in traditional surface feature extraction algorithms, complex topological relationship construction, and difficulty in topological simplification. In addition, it proposes a new feature importance measurement index for topological simplification. Firstly, critical points are identified to form critical lines, which generates Morse-Smale complex to complete the construction of surface topological features. Thereafter, a new feature importance metric is proposed using the average eigenvalue of Morse-Smale complex to backcalculate the eigenvalues of critical points, making a double evaluation of the feature importance of this complex. Finally, the simplification and the expression of the topological features of the surface are realized based on the metric. The experimental results show that the surface features are extracted and a good topology structure is constructed. The feature extraction point cloud compression rate reaches 36.29%, and the topology simplified point cloud compression rate reaches 70.73%. This considerably reduces the massive point cloud data and eliminates redundant topology, laying a good data foundation for the subsequent expression and the application of surface point clouds.

**Key words** remote sensing; piecewise linear Morse theory; terrain feature extraction; topology simplification; importance measure

收稿日期: 2021-03-02; 修回日期: 2021-04-16; 录用日期: 2021-04-22

基金项目: 国家自然科学基金项目(41701464)、贵州大学培育项目(贵大培育[2019]26号)、贵州省矿山动力灾害预警与控制技术科技创新人才团队项目(黔科合平台人才[2019]5619)

通信作者: \*chkang\_chd@163.com

## 1 引言

三维激光扫描技术具有高效率、高精度、非接触式的优势<sup>[1-2]</sup>,迅速在各个行业得到广泛应用,例如农林生态、三维建模和文物保护等<sup>[3-5]</sup>。三维激光扫描技术能快速获取地表点云数据,便于构建 DEM、TIN 等地形数据结构<sup>[6]</sup>。由于点云数据具有数据量庞大,数据信息冗杂的缺点,为后续的地形点云数据处理带来挑战<sup>[7]</sup>。地形特征提取在了解地表、地质结构和地貌的过程中起着关键作用,地表特征点是表达地表特征及构建拓扑关系的重要标志,其包括山峰、山谷和鞍部点,山谷线以及山脊线<sup>[8]</sup>。地形特征提取需构建完整的拓扑关系,目前主要基于三种不同数据结构进行特征提取:规则格网 (DEM)<sup>[9-10]</sup>,等高线<sup>[11]</sup>和 Triangulated Irregular Networks Structure (TIN)<sup>[12]</sup>。

但这些数据结构以及传统的地表特征提取方法存在对地形特征过度剖分、拓扑构建不完整的问题,Morse 理论<sup>[13]</sup>以 Delaunay 三角网格为基础数据结构,通过对临界值的计算将特征点清晰识别<sup>[14]</sup>。而分段线性 Morse 理论将经典 Morse 理论推向实际应用,为拓扑数据的同源性分析提供了理论支撑<sup>[15]</sup>。张春亢等<sup>[16]</sup>提出 Morse 理论下的小尺度地形特征提取,为特征点构建特征指标,完成重要特征点提取,大大地简化数据量并保留数据特征,但缺乏对地表变形的量化分析。目前针对拓扑简化最常用的方法为文献<sup>[17]</sup>提出的“持续值”法,该方法以高程作为点云数据特征指标度量线特征指标基础值,但是指标单一,普适性较弱。王洪斌等<sup>[18]</sup>基于自然法则提出一种拓扑简化方法,利用 Morse-Smale 复形的特性为地形特征点设定了新的评价标准,以 Morse-Smale 复形胞腔计算权值设计拓扑简化算法。

从以上分析可以看出,目前特征提取算法无法避免信息冗余化,地形特征过度提取,难以简化地形拓扑结构的问题。本文提出一种分段线性 Morse 理论下的地形特征提取与拓扑简化,首先基于 Morse 理论提取地表的初始 Morse-Smale 复形;其次提出一种新的重要性度量指标,利用 Morse-Smale 复形平均指标值反算其所含关键点的特征指标值,重新定义 Morse-Smale 复形重要性指标,完成拓扑简化。

## 2 分段线性 Morse 理论

### 2.1 Morse 理论

基于对二维可微流形及其拓扑形态的分析,Morse 在 20 世纪 30 年代创立了 Morse 理论 (Morse Theory),又称为关键点理论<sup>[13]</sup>。它主要用于研究  $n$  维空间内  $d$  维流形  $M (M \subseteq R^n)$  的表面形态及其所定义的二阶函数可微之间的相互联系<sup>[19]</sup>,因此该理论可以为地表形态提供拓扑构建思路,建立良好拓扑形态,定义二阶可微函数的梯度函数为

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad (1)$$

通过(1)式对点云数据进行定性分析, $\nabla f$ 取值为 0,则判定为关键点,否则判定为正则点。地形特征点中存在山峰点、山谷点和鞍部点,根据 Morse 理论判定出的关键点又分为极大点 (peak)、极小点 (pit) 与鞍点 (saddle),构成所需的山脊线和山谷线。

### 2.2 分段线性 Morse 理论

Morse 理论虽然是二维流形拓扑获取及表达的强有力工具,但该理论难以应用到实际生活中,因此对二维流形表面的连续性有一定要求,因此 Banchoff<sup>[20-21]</sup>提出分段线性 Morse 理论,将离散点连接的三角形近似视为连续可微的几何面,即利用三角网格上的点、线、面进行拓扑表达,利用插值法计算分段线性 Morse 函数,有效打破经典 Morse 理论的空间连续性带来的限制,分段线性 Morse 理论更加适用实际生活中的大部分二维流形。Forman<sup>[22]</sup>提出了基于矢量场和标量场的离散 Morse 理论,该理论将利用具有某些性质的实值函数表征简单拓扑复形的同源性<sup>[23]</sup>,进一步将经典 Morse 理论推广到离散二维流形上,使其在实际生活中得到更加广泛的应用。

基于分段线性 Morse 理论与 TIN 结合能够为关键点构建独立拓扑结构,将所有终止于关键点的二阶可微梯度函数的积分线定义为上升域,即上升单元,所有起始于关键的二阶可微梯度函数积分线定义为下降域,即下降单元<sup>[24]</sup>,所有的上升单元可视为上升 Morse 单复形,同理,所有下降单元为下降 Morse 单复形。根据分段线性 Morse 理论,两种单复形具有对偶性,通过两两正交构成了不规则四边形即 Morse-Smale 复形。

### 3 地表拓扑特征提取与简化

#### 3.1 特征提取

根据点云数据建立 Delaunay 三角网格作为基础数据结构,利用邻点比较法寻找关键点。本文将高程数据作为 Morse 特征指标值进行标定,对任意一点  $P$ ,比较  $P$  与其周围邻点  $P_i$  的 Morse 特征指标值,当  $P$  的特征值均大于  $P_i$  的特征值,则判定为极大点,如图 1(a)所示,当  $P$  的特征值均小于  $P_i$  的特征值,则判定为极小点如图 1(b)所示,当  $P$  点与  $P_i$  对比值大小变化为 4,则判定为鞍点<sup>[25-26]</sup>,如图 1(c)所示。并通过一定寻径路径,根据 Morse-Smale

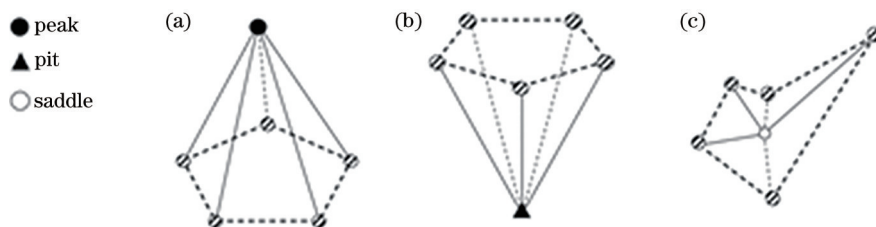


图 1 邻点比较法判定关键点。(a)极大点;(b)极小点;(c)鞍点

Fig. 1 Neighborhood comparison algorithm to determine critical points. (a) Peak; (b) pit; (c) saddle

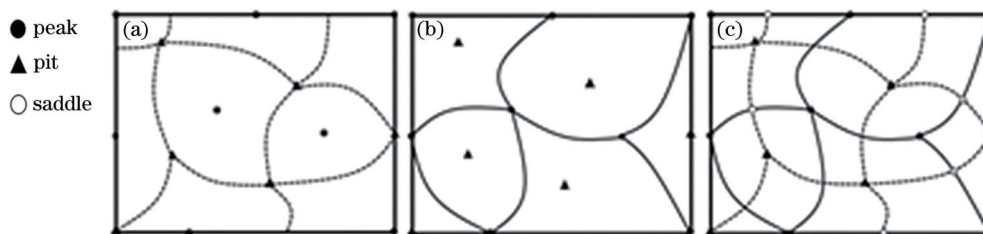


图 2 Morse-Smale 复形构建。(a)上升 Morse 复形;(b)下降 Morse 复形;(c) Morse-Smale 复形

Fig. 2 Morse-Smale complex construction. (a) Rising Morse complex; (b) falling Morse complex; (c) Morse-Smale complex

#### 3.2 拓扑简化

分段线性 Morse 理论下的特征提取在初次提取完成时,特征点定性分析不够精确,地表形态存在微小起伏,导致无法与主要特征进行区分,提取出了一定数量的“伪特征”,造成地表形态过度剖分和拓扑构建耗费大量次要及偏差点云数据的问题。本文在经典“持续值”法的基础上,利用其计算 Morse-Smale 复形标准持续值,对上升(下降)单元上的所有点云数据的特征重要性指标进行二次定义,从而对 Morse-Smale 复形特征重要性指标二次定义。通过以“持续值”法一次定义嵌套标准持续值二次定义的方式,对 Morse-Smale 复形的特征重要性进行双重定义,在特征重要性分析上使其精细化,定性指标更加稳定,能够更清晰地将次要特征及错误特征与主要特征区分开,得到清晰简洁的地

复形的对偶性,寻找特征线构建 Morse-Smale 复形,采用基于边界提取算法,从鞍点出发,分别从邻点特征值发生变化的双边方向,沿特征值最小(大)梯度方向寻径,直到找到下一个极小(大)点为止,因此每一个鞍点将对应一对极小点,其特征线性描述构成上升 Morse 单复形如图 2(a)所示,同理,每一个鞍点将对应一对极大点,构成下降 Morse 单复形如图 2(b)所示。根据分段线性 Morse 理论对偶性,其两两正交构成了 Morse-Smale 复形如图 2(c)所示,以不规则四面体对地表形态进行分割,清晰准确地构建拓扑关系并进行拓扑表达。

形拓扑结构,其步骤如下:

(1)根据经典“持续值”法利用 Morse 特征指标函数值计算上升(下降)Morse 复形中的所有点云数据特征重要性指标,

$$F_i(p_i) = \begin{cases} h(v_i) - \max[h(m)], & i = 1, 2, \dots, n \\ \min[h(M)] - h(v_i), & i = 1, 2, \dots, n \end{cases}, (2)$$

式中,  $F_i$  为上升(下降)Morse 复形中所有点与极小(大)点之间的 Morse 特征函数值之差,  $\max[h(m)]$  为上升 Morse 复形中与鞍点连接的极小点的 Morse 函数特征值最大值,  $\min[h(M)]$  为下降 Morse 复形中与鞍点连接的极大点的 Morse 函数特征值最小值,  $l$  为脊(谷)线,  $i$  为脊(谷)线上的点。

(2)根据 Morse-Smale 复形上点的特征重要性指标计算 Morse-Smale 复形的重要性,利用其点的

特征重要性的均值作为 Morse-Smale 复形一次重要性指标,再带入(2)式重新计算点的重要性指标。

$$L_l = \frac{\sum_1^n F_l}{n}, \quad (3)$$

式中,  $L_l$  为 Morse-Smale 复形一次重要性指标,  $n$  为上升(下降)Morse 复形上的点总数,将该值带入(2)式可表示为

$$F'_l(p_i) = \begin{cases} h(v_i) - L_l, i = 1, 2, \dots, n \\ L_l - h(v_i), i = 1, 2, \dots, n \end{cases}, \quad (4)$$

式中,  $F'_l$  为上升(下降)Morse 复形中所有点与脊(谷)线一次重要性指标之差,  $l$  表示脊(谷)线。

(3)根据(4)式求其标准方差定义标准持续值,再计算 Morse-Smale 复形二次重要性指标,可表示为

$$L'_l(p_i) = \frac{\sum_1^n \left[ h(v_i) - \frac{\sum_1^n F'_l}{n} \right]}{n}, \quad (5)$$

式中,  $L'_l$  为二次重要性指标,  $n$  为上升(下降)Morse 复形上的点总数。

## 4 实验结果与分析

本文采用的实验数据为美国航空航天局(NASA)和美国国家测绘局测量得到的航天飞机激光雷达地形测绘数据,其为分辨率  $90 \text{ m} \times 90 \text{ m}$  呈规则网格分布的点云数据,结合 C++ 语言利用 VS2015 平台验证该算法。该数据点云总数为 14641 个如图 3(a)所示,构建 Delaunay 三角网格面片,共计三角形数为 28905 个,如图 3(b)所示。根据特征提取算法得到初步特征提取成果如图 3(c)所示,可以看到未经拓扑简化的点云数据描述出大量“伪特征”,地表特征信息冗余,出现对地表过度剖分现象,其微小凹陷与微小凸起也被视为山谷线与山脊线,从表 1 看出,点云缩减量为 5313,点云压缩率为 36.29%,剔除点云量较少,且点云压缩率偏低。这是因为基于分段线性 Morse 理论,采用邻点比较法对特征点进行判定,邻域内 Morse 指标函数出现变化的特征点均进行了识别,限制了判定范围,因此邻点比较法可以粗略地将差异较大的点进行区分,但无法对差异较接近的特征点进行区分,需要对其进一步进行拓扑简化。

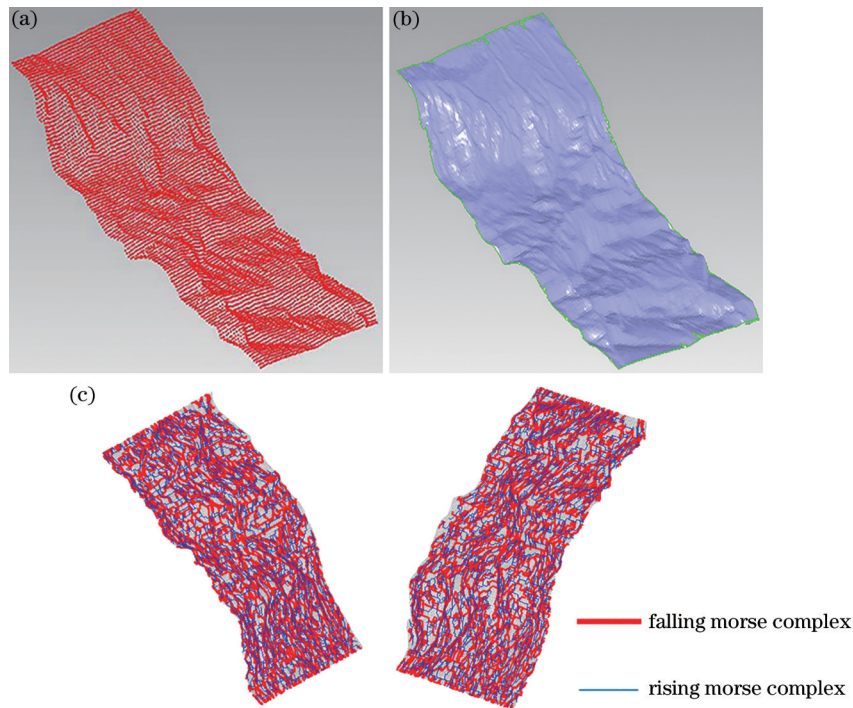


图 3 特征提取结果图。(a)原始点云数据;(b) Delaunay三角网构建;(c)分段线性Morse特征提取  
Fig. 3 Feature extraction result graph. (a) Raw point cloud data; (b) Delaunaytriangulationconstruction; (c) piecewise linear Morse feature extraction

利用所提出的新的特征重要性度量指标对地形进行拓扑简化后的结果如图 4 所示,其中图 4(a)

是下降 Morse 复形,可以看出,经过拓扑简化后,大量“伪特征”点被剔除,保留了清晰且简洁的下

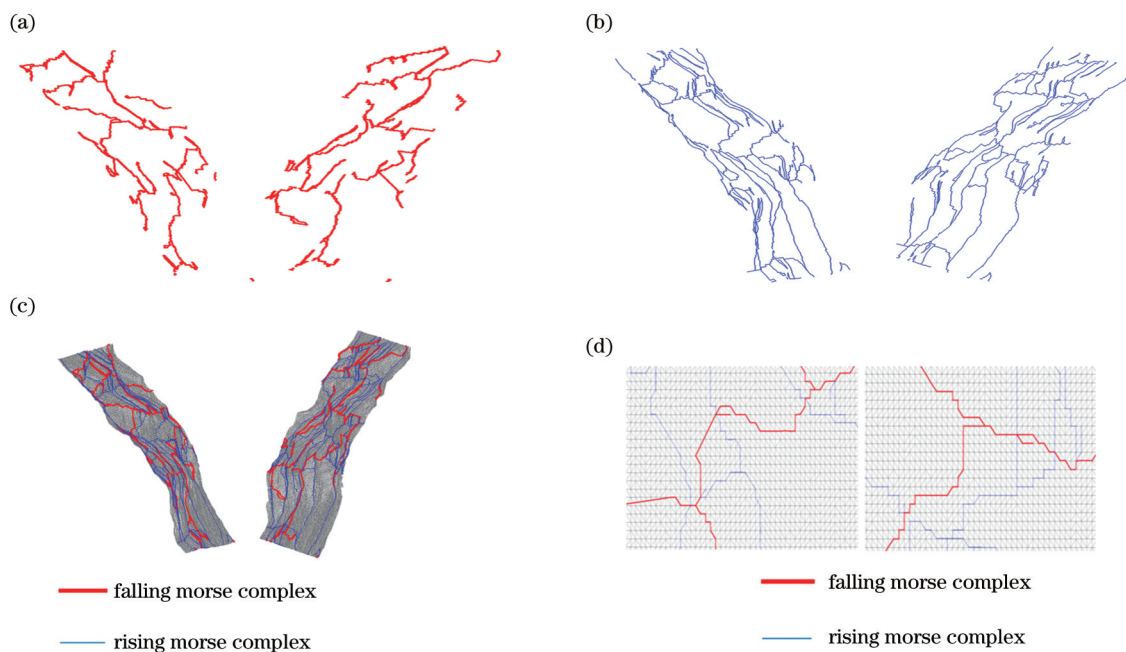


图 4 实验结果展示图。(a)下降 Morse 复形;(b)上升 Morse 复形;(c) Morse-Smale 复形与三角网拟合;(d) Morse-Smale 复形局部细节图

Fig. 4 Diagram of Experimental results. (a) Falling Morse Complex; (b) rising Morse Complex; (c) Morse-Smale complex and triangulation fitting; (d) partial details of Morse-Smale complex

降 Morse 复形,对山脊线进行了清晰表达,同理,从图 4(b)中可以看出,大量“伪特征”点被剔除,同样保留了清晰地上升 Morse 复形成功表达地形山谷特征,将其两两正交与初始 Delaunay 三角网格拟合,得到 Morse-Smale 复形如图 4(c)所示,其中红色线为下降 Morse 复形,描述山脊特征,蓝色线为上升 Morse-Smale,描述山谷特征。从图 4(c)中可以看出,整个地形的主要特征被极少量的 Morse 复形所构建的拓扑结构覆盖,完整表达了地表特征的同时,大大缩减数据量。从表 1 可以看到,拓扑简化的点云压缩量为 5042,点云压缩率达到 70.73%,拓扑简化效果明显。从图 4(d)的细节中可以看到,上升 Morse-Smale 复形与下降 Morse-Smale 复形分布独立,将山脊与山谷清晰辨别且不存在交叉现象,拓扑简化效果良

好。拓扑简化过程中,直接利用 Morse-Smale 复形作为简化单元,利用特征点的特征重要性指标描述 Morse 单复形的特征重要性指标,再进一步利用 Morse-Smale 复形的特征重要性指标反述特征点的重要性指标,得到一种新的特征重要性描述指标。该指标间接将邻域扩大,有效弥补了邻点比较法的不足,将周围特征细节规模放大,利用更加精确的特征重要性指标平滑细小特征,放大关键特征,在特征提取中出现的微小凹陷与微小凸起被判定为次要特征和错误特征。最终利用较少的数据量,对整个地形特征的主要拓扑信息进行精确表达,原始点云数据在特征提取前后以及拓扑简化后的数据量有直观明显的差异,且构建了正确的拓扑结构,为后续点云数据的处理奠定较好基础。

表 1 点云压缩情况

Table 1 Point cloud compression

Model	Number of point clouds	Point cloud compression	Point cloud compression ratio
Original point clouds	14641		
Feature extraction	9328	5313	36.29%
Topology simplification	4286	5042	70.73%

从特征提取和拓扑简化效果可以看出,分段线性 Morse 理论可以将地形主要特征提出并进行清晰

表达,同时将经典持续值改进为标准持续值,成功将大部分冗余特征数据(次要特征与错误特征)进

行剔除,能够用更加清晰简洁的特征线构建 Morse-Smale 复形,保留主要山脊线与山谷线以此对地形特征拓扑结构进行直接表达。

## 5 结 论

点云数据的特征提取与拓扑简化对地表形态的研究起着至关重要的作用,针对地形特征提取不完全,特征信息冗余以及难以进行拓扑简化的问题,实现了分段线性 Morse 理论下的地表特征提取与简化。首先利用分段线性 Morse 理论提取 Morse-Smale 复形;其次利用“持续值”算法原理计算特征点重要性指标;最后利用该指标描述 Morse-Smale 复形重要性,进一步反算特征点标准持续值重新定义 Morse-Smale 复形的特征重要性,得到一种新的特征重要性评价指标,利用其完成拓扑简化。最终克服了地形特征过度剖分的问题,提高了地形多层次表达程度,缩减数据量的同时能够对山脊线和山谷线进行清晰简洁的拓扑表达,为点云数据的后续处理及应用奠定了良好基础。但该算法面对复杂地形的提取和简化效果有待提高,今后将展开进一步研究。

## 参 考 文 献

- [1] Li R Z, Liu Z W. New segmentation method combining three-dimensional point cloud skeleton points and feature points[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2020, 57(12): 121104.  
李仁忠,刘哲闻.一种新的结合三维点云骨架点和特征点的分割方法[J].*激光与光电子学进展*, 2020, 57(12): 121104.
- [2] Deng B W, Wang Z B, Jin Y, et al. Feature extraction method of laser scanning point cloud based on morphological gradient[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2018, 55(5): 051203.  
邓博文,王召巴,金永,等.基于形态学梯度的激光扫描点云特征提取方法[J].*激光与光电子学进展*, 2018, 55(5): 051203.
- [3] Yao M J, Tang X, Zhang C L, et al. Design and application of plastic products based on reverse engineering and FDM technology[J]. *Plastics Science and Technology*, 2020, 48(12): 45-48.  
姚明镜,唐璇,张春良,等.基于逆向工程和FDM技术的塑料产品设计与应用[J].*塑料科技*, 2020, 48(12): 45-48.
- [4] Long L J, Xia Y H, Huang D. Fast modeling method for substation based on 3D laser scanning point cloud data[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2020, 57(20): 202801.  
龙丽娟,夏永华,黄德.一种基于三维激光扫描点云数据的变电站快速建模方法[J].*激光与光电子学进展*, 2020, 57(20): 202801.
- [5] Luo S Z, Xi X H, Wang C. Review: the application of LiDAR remote sensing in cultural heritage preservation[J]. *Remote Sensing Technology and Application*, 2014, 29(6): 1054-1059.  
骆社周,习晓环,王成.激光雷达遥感在文化遗产保护中的应用[J].*遥感技术与应用*, 2014, 29(6): 1054-1059.
- [6] Xu Y, Sun L N, Wang W J. A method of airborne LiDAR data terrain feature extraction based on maximum curvature[J]. *Journal of Geomatics Science and Technology*, 2019, 36(1): 34-38.  
许颖,孙力楠,王文娟.一种基于极大曲率的机载LiDAR数据地形特征提取方法[J].*测绘科学技术学报*, 2019, 36(1): 34-38.
- [7] Yang B S, Liang F X, Huang R G. Progress, challenges and perspectives of 3D LiDAR point cloud processing[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2017, 46(10): 1509-1516.  
杨必胜,梁福逊,黄荣刚.三维激光扫描点云数据处理研究进展、挑战与趋势[J].*测绘学报*, 2017, 46(10): 1509-1516.
- [8] Syzdykbayev M, Karimi B, Karimi H A. A method for extracting some key terrain features from shaded relief of digital terrain models[J]. *Remote Sensing*, 2020, 12(17): 2809.
- [9] Tang G A. Progress of DEM and digital terrain analysis in China[J]. *Acta Geographica Sinica*, 2014, 69(9): 1305-1325.  
汤国安.我国数字高程模型与数字地形分析研究进展[J].*地理学报*, 2014, 69(9): 1305-1325.
- [10] Zhu Q, Zhao J, Zhong Z, et al. The extraction of topographic patterns based on regular grid DEMs[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2004, 33(1): 77-82.  
朱庆,赵杰,钟正,等.基于规则格网DEM的地形特征提取算法[J].*测绘学报*, 2004, 33(1): 77-82.
- [11] Kweon I S, Kanade T. Extracting topographic terrain features from elevation maps[J]. *CVGIP: Image Understanding*, 1994, 59(2): 171-182.
- [12] Briggs I. Water flow using density of area[R]. [s.l.: s. n.], 1989: 1-11.
- [13] Milnor J. Morse theory[M]. Princeton: Princeton University Press, 1963.

- [14] Knauf A, Martynchuk N. Topology change of level sets in Morse theory[J]. *Arkiv För Matematik*, 2020, 58(2): 333-356.
- [15] Wang C, Ren S Q. A discrete Morse theory for digraphs[EB/OL]. (2020-07-27) [2021-01-05]. <https://arxiv.org/abs/2007.13425>.
- [16] Zhang C K, Zhao X S, Wang H B. Feature points extraction of small-scale terrain based on morse theory [J]. *Journal of Geomatics Science and Technology*, 2015, 32(3): 266-270.  
张春亢, 赵学胜, 王洪斌. 采用Morse理论的小尺度地形特征提取方法[J]. *测绘科学技术学报*, 2015, 32(3): 266-270.
- [17] Weinkauff T, Günther D. Separatrix persistence: extraction of salient edges on surfaces using topological methods[J]. *Computer Graphics Forum*, 2009, 28(5): 1519-1528.
- [18] Wang H B, Zhu X Y, Zhang C K. Topological simplification based on nature principle for terrain surface[J]. *Journal of Geomatics Science and Technology*, 2013, 30(6): 572-576.  
王洪斌, 朱新颖, 张春亢. 基于自然法则的地表拓扑简化[J]. *测绘科学技术学报*, 2013, 30(6): 572-576.
- [19] Yuan J, Zhou M Q, Geng G H, et al. Automatic reassembly of fractured fragments using Morse topological features[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2018, 44(8): 1486-1495.  
袁洁, 周明全, 耿国华, 等. 基于Morse-Smale拓扑特征的文物碎片拼接算法[J]. *自动化学报*, 2018, 44(8): 1486-1495.
- [20] Banchoff T F. Critical points and curvature for embedded polyhedra[J]. *Journal of Differential Geometry*, 1967, 1(3/4): 245-256.
- [21] Banchoff T F. Critical points and curvature for embedded polyhedral surfaces[J]. *The American Mathematical Monthly*, 1970, 77(5): 475-485.
- [22] Forman R. Discrete morse theory and the cohomology ring[J]. *Transactions of the American Mathematical Society*, 2002, 354(12): 5063-5085.
- [23] Kannan H, Saucan E, Roy I, et al. Persistent homology of unweighted complex networks via discrete Morse theory[J]. *Scientific Reports*, 2019, 9(1): 13817.
- [24] Wang H B, Zhao X S, Zhang C K, et al. An improved algorithm of constructing terrain feature lines based on Morse complex[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2015, 40(9): 1220-1224.  
王洪斌, 赵学胜, 张春亢, 等. 一种基于Morse复形的地形特征线构建改进算法[J]. *武汉大学学报·信息科学版*, 2015, 40(9): 1220-1224.
- [25] de Floriani L, Fugacci U, Iuricich F, et al. Morse complexes for shape segmentation and homological analysis: discrete models and algorithms[J]. *Computer Graphics Forum*, 2015, 34(2): 761-785.
- [26] Vitali M, de Floriani L, Magillo P. Computing morse decompositions for triangulated terrains: an analysis and an experimental evaluation[M]//Maino G, Foresti G L. *Image analysis and processing-ICIAP 2011. Lecture notes in computer science*. Heidelberg: Springer, 2011, 6978: 565-574.