

激光与光电子学进展

马尔可夫链蒙特卡罗光子损失玻色采样模拟

黄汛, 倪明, 季阳*, 吴永政

中国电子科技集团公司第三十二研究所, 上海 201800

摘要 光子在制备、传播和探测的过程中产生的损失极大地限制了玻色采样的量子计算优越性。为研究光学网络中光子损失对玻色采样结果的影响, 基于 Clements 模型, 通过马尔可夫链蒙特卡罗 (MCMC) 方法实现了 4 光子 8 模式的玻色采样模拟, 并通过贝叶斯检验方法, 对模拟获取的玻色采样结果和光子源处产生光子损失的玻色采样进行了区分。模拟结果表明, 基于引入光子损失的光学网络, 利用 MCMC 方法获取的采样结果均能有效通过贝叶斯检验。当 MCMC 采样样本之间的跳跃样本数增大, 通过检验所需的样本数均逐渐减少并趋于稳定。而随着光学网络规模的增大, MCMC 方法需要更大的跳跃样本数以达到快速通过贝叶斯检验的需求。通过 MCMC 方法成功模拟了光学网络中发生光子损失的玻色采样过程, 为考虑误差的玻色采样研究提供了参考。

关键词 量子光学; 玻色采样; 光子损失; 马尔可夫链蒙特卡罗方法; 贝叶斯检验; 量子计算

中图分类号 O431.2

文献标志码 A

DOI: 10.3788/LOP202259.2127002

Simulation of Markov Chain Monte Carlo Boson Sampling Based on Photon Losses

Huang Xun, Ni Ming, Ji Yang*, Wu Yongzheng

The 32nd Research Institute of China Electronics Technology Group Corporation, Shanghai 201800, China

Abstract The losses during the preparation, propagation, and detection of photons greatly limit the quantum computing advantages of Boson sampling. Boson sampling simulations with four photons and eight modes are realized based on the Clements model using the Markov chain Monte Carlo (MCMC) method to study the influence of photon losses on Boson sampling results in optical networks, and the simulation results are validated and distinguished from the Boson sampling with photon losses at the photon source using the Bayesian test method. The simulation results show that by introducing photon losses based on the optical network, the sampling results obtained using the MCMC method can effectively satisfy the Bayesian test. The number of samples required to satisfy the Bayesian test decreases gradually and tends to be stable when the interval of samples increases. Conversely, as the scale of the optical network increases, the MCMC method requires a larger interval of samples to quickly satisfy the Bayesian test. In this study, Boson sampling with photon losses in optical networks is successfully simulated using MCMC method, giving a clue for Boson sampling researches while considering the errors.

Key words quantum optics; Boson sampling; photon loss; Markov Chain Monte Carlo method; Bayesian test; quantum computing

1 引言

由于量子计算机相较于传统计算机在解决特定问题上具有计算复杂度优势, 量子计算机的研制为解决传统计算机难以处理的问题提供了新的思路^[1-2]。目前通用量子计算机的实现仍存在较大困难, 人们更热衷于制造解决专用问题的量子计算机以更好地展示量子计算

相对于经典计算在算力上的优越性。玻色采样作为特定的量子计算问题, 其实现原理相对简单, 近年来不断成为量子计算领域的研究热点, 且玻色采样问题在可预见的未来具有广阔的应用前景, 例如将其等价于搜索问题应用在人工智能领域^[3]、用于实现复杂分子计算以模拟分子振动^[4]等等。典型的玻色采样过程由光子制备、光子在线性光学网络中传播以及光子探测 3 部分构成,

收稿日期: 2021-09-26; 修回日期: 2021-10-25; 录用日期: 2021-11-02

基金项目: 量子信息技术上海市市级科技重大专项子项目(2019SHZDZX01-ZX03)、中国电子科技集团公司第三十二研究所内项目(GY200906-00)

通信作者: *yangjmtz@qq.com

具体来说, n 个完全相同的光子输入到具有 m 个模式的
光学网络, 不同的光子在光学网络的传播过程中产生量
子干涉, 从而改变光子在不同路径中的传播概率, 最终
从 m 个模式输出并通过光子探测器进行捕捉获取采样
结果^[3,5]。其中, 线性光学网络在数学上对应一个随机幺
正矩阵, 实现对不同光子输出组合的玻色采样则需要对
矩阵的积和式进行求解, 该问题属于 #P 困难问题, 在经
典计算机上具有指数级计算复杂度^[1,6-8]。

在实际的玻色采样过程中, 光子损失普遍存在于不
同的光学器件中^[9-11]。目前, 人们可利用自发参量下转
换^[12-13]、量子点微柱^[14]等方法实现高质量单光子源的制
造, 但在光子源处的光子损失仍无法完全避免。另外,
光学网络以及光子探测器的缺陷也会造成光子在采样
过程中产生一定的损失^[9,11]。当采样规模保持不变, 玻
色采样过程存在一个展示“量子计算优越性”的阈值, 若
在存在光子损失等误差的情况下相关的试验参数超过
该阈值限定的范围, 则玻色采样过程将成为多项式计算
复杂度的求解问题, 继而无法实现“量子计算优越性”^[9]。

在存在光子损失的情况下, 本文基于 Clements 模
型^[15]构建了 4 光子 8 模式线性光学网络模型, 并采用马
尔可夫链蒙特卡罗 (MCMC)^[16]方法在该模型上实现了
玻色采样模拟。在此基础上, 通过改变光学基本单
元中光子损失概率和 MCMC 方法中的采样参数获取
不同的采样结果, 并与光子损失发生在光子源处的采
样进行检验区分, 以研究不同的参数对采样结果的影
响。模拟结果表明, 通过 MCMC 方法能够有效地模拟
光子损失发生在光学网络中的玻色采样。同时发现,
在光学网络中的光子损失概率对 MCMC 方法的模拟
效果不会产生直接影响。而当 MCMC 方法的采样样
本之间的跳跃样本数 τ_{min} 越大, 通过贝叶斯检验所需样
本数逐渐减小并趋于稳定, 表明 MCMC 方法模拟效果
逐渐变好并趋于稳定。另外, 还发现随着光学网络的
规模增大, MCMC 方法需要更大的跳跃样本数以达到

快速通过贝叶斯检验的要求, 模拟所需计算量也相应
更大, 对于更高效的玻色采样模拟算法, 例如
Clifford&Clifford 算法^[6]的研究亟需进行。

2 基本理论

2.1 引入光子损失的线性光学网络模型构建

本文在模拟中基于 Clements 模型构建了如
图 1(a) 所示的 4 光子 8 模式的线性光学网络。相较于 Reck
模型^[17]的线性光学网络, 光子在该网络中的每个通道内的
损失更趋于相同^[15]。在图 1(a) 中, 4 个全同光子以输
入组合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 注入到线性光学网络, 在 8 个光路中传播
并产生干涉。其次, 为了模拟光子在光路中的损失, 基
于等效分束器模型^[11], 在光学网络中增加了 56 个等效
光路, 故该线性光学网络共有 28 个等效光学基本单元, 在
每个等效光学基本单元 (unit) 中, 含有一个原始分束
器 (BS) 和一个相移器 (PS) 以及两个等效分束器 (BS₁
和 BS₂), 则 unit 对应的矩阵 M_{unit} 可表示为

$$M_{\text{unit}} = M_{\text{BS}_1} M_{\text{BS}_2} M_{\text{BS}} M_{\text{PS}}, \quad (1)$$

式中: M_{BS_1} 和 M_{BS_2} 是两个反射率分别为 $\cos \theta_1$ 和 $\cos \theta_2$
($0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq \frac{\pi}{2}$) 的等效分束器对应的矩阵, 本文中令
 $\cos \theta_1 = \cos \theta_2 = r$; M_{BS} 是反射率为 $\cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) 的
原始分束器矩阵; M_{PS} 是相移器对应矩阵, 其能为光子提供
一个偏移角度 φ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$), 且上述 4 个矩阵的维度均
为 64。对于第 i ($i=1, 2, \dots, 28$) 个等效基本光学单元,
若其两路原始光路的标号分别为 K_1 和 K_2 ($K_1, K_2=1, 2,$
 $3, \dots, 8, K_1 < K_2$), 则式 (1) 中的每个矩阵的构造方式
如下。

首先初始化 4 个 64 维单位矩阵 M_1, M_2, M_3, M_4 。其
中对于 M_1 , 将第 K_1 行 K_1 列和第 $(8+2i-1)$ 行 $(8+2i-1)$
列的元素设为 $\cos \theta_1$, 第 K_1 行 $(8+2i-1)$ 列的元素设为
 $-\sin \theta_1$, 第 $(8+2i-1)$ 行 K_1 列的元素设为 $\sin \theta_1$ 即可得到

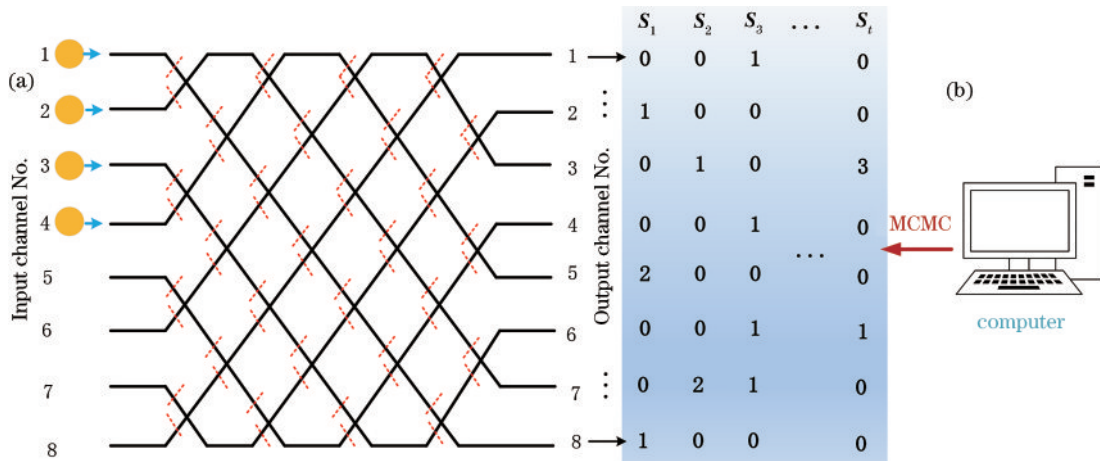


图 1 引入光子损失的玻色采样模型。(a) 4 光子 8 模式光子损失光学网络; (b) 基于 MCMC 方法获取的部分光子输出组合
Fig. 1 Boson sampling model with photon losses. (a) 4-photon and 8-mode optical network with photon losses; (b) partial output combinations of photons obtained by MCMC method

矩阵 \mathbf{M}_{BS_1} ; 对于 \mathbf{M}_2 , 将第 K_2 行 K_2 列和第 $(8+2i)$ 行 $(8+2i)$ 列的元素设为 $\cos \theta_2$, 第 K_2 行 $(8+2i)$ 列的元素设为 $-\sin \theta_2$, 第 $(8+2i)$ 行 K_2 列的元素设为 $\sin \theta_2$ 即可得到矩阵 \mathbf{M}_{BS_2} ; 对于 \mathbf{M}_3 , 将第 K_1 行 K_1 列和第 K_2 行 K_2 列的元素设为 $\cos \theta$, 第 K_1 行 K_2 列的元素设为 $-\sin \theta$, 第 K_2 行 K_1 列的元素设为 $\sin \theta$; 即可得到矩阵 \mathbf{M}_{BS} ; 对于 \mathbf{M}_4 , 将第 K_2 行 K_2 列的元素设为 $\exp(i\varphi)$ 即可得到矩阵 \mathbf{M}_{PS} 。

接着, 按照如下步骤构造光学网络对应的随机幺正矩阵 \mathbf{M} :

1) 生成一个规模为模式数 8 的任意随机幺正矩阵 \mathbf{U} , 并基于 Clements 网络模型进行拆分^[15], 获取光学基本单元列表;

2) 基于等效分束器原理, 在每个初始光学基本单元中加入两路等效分束器 BS_1 和 BS_2 , 对于每个光学基本单元中的光子损失概率 P_{loss} , 反射率 r 满足 $r = 1 - \sqrt{1 - P_{loss}}$, 得到所有等效光学基本单元列表;

3) 将步骤 2) 中的列表元素按顺序逐一相乘得到最终的光学网络模型的对应矩阵 \mathbf{M} 。

当得到光学网络模型后, 就可以对指定输出模式的概率进行求解。在理想情况下, 通过 n 光子 m 模式玻色采样获取某一特定输出组合的概率 P 为^[3,6]

$$P = \frac{|\text{Perm}(\mathbf{M}^{T,S})|^2}{\prod_{i=1}^m T_i \prod_{i=1}^m S_i}, \quad (2)$$

式中: T 和 S 分别为光子输入和输出组合的向量表示; 矩阵 $\mathbf{M}^{T,S}$ 为光学网络对应 m 阶幺正矩阵 \mathbf{M} 的 n 阶子矩阵, 其与光子输入输出组合相关。在本文中, 当引入光子损失后, 矩阵 \mathbf{M} 的阶数将扩展到 $(m+2d)$ (d 为等效光学基本单元个数, 下同), 函数 $\text{Perm}()$ 实现对该矩阵的积和式求解, 其具体定义为^[3,6-7]

$$\text{Perm}(\mathbf{M}^{T,S}) = \sum_{\sigma} \prod_{i=1}^n m_{i,\sigma(i)}, \quad (3)$$

式中: σ 为光子输入组合的全排列; i 表示排列中第 i 个元素, 由于玻色采样中的矩阵为随机幺正矩阵, 其积和式的计算为 #P-困难问题, 具有指数级时间复杂度。

通过对考虑了光子损失的光学网络模型的构造以及对指定输出组合的概率求解, 即可以通过 MCMC 方法直接模拟在光学网络中发生光子损失的玻色采样过程。需要说明的是, 尽管文献^[14]中已经制备出了光子透过率达到 99% 的光学网络, 但是随着光学网络规模的增加, 光学网络中总的光子损失概率仍然会急剧增加。为了证明这一点, 本文又构建了引入光子损失的 4 光子 m ($m=5, 6, 7, 9, 10, 11$) 模式的光学网络模型, 且 P_{loss} 均设为 0.01, 在此基础上基于每个模型分别进行 100 次 MCMC 玻色采样, 其中每次采样获取 200 个采样结果。

模拟结果表明, 随着光学网络规模的逐渐增大, 采样样本中存在光子损失的样本所占比例不断增加, 且

增加的幅度不断上升, 如图 2 所示, 当光学网络规模由 5 提高至 11 时, 含光子损失的样本占总样本比例则由 0.275% 提升至 4.000%, 且规模从 10 增加到 11 时占比提升的幅度最大, 达到 1.500%。下面将详细介绍基于 MCMC 的玻色采样模拟过程。

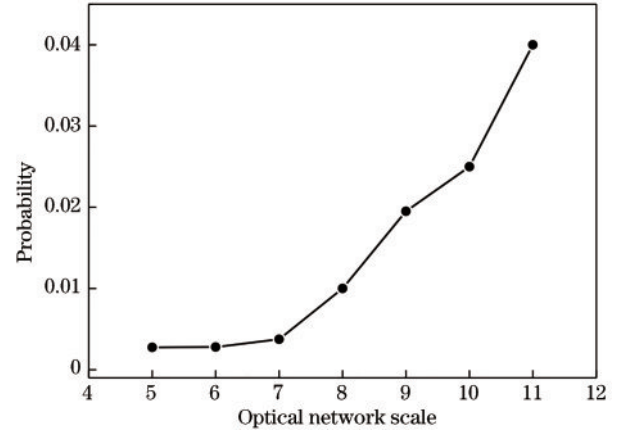


图 2 不同光学网络规模下含光子损失的样本比例

Fig. 2 Probabilities of samples containing photon losses increasing under different optical network scales

2.2 基于 MCMC 的玻色采样模拟

本文在经典计算机上采用 MCMC 方法进行考虑光子损失发生在光学网络中的玻色采样模拟, 该过程实现的主要步骤为:

1) 定义一个概率分布函数模型 $q(x)$, 通过该模型可进行多项式时间复杂度的采样, 例如均匀分布采样或者光子完全不同的玻色采样;

2) 通过模型 $q(x)$ 采样获取一个初始样本 x_0 ;

3) 从均匀分布的 $\text{uniform}(0, 1)$ 中获取一个样本 u , 接着继续生成一个符合 $q(x)$ 分布的随机样本 x^* , 若样

本 x^* 满足 $u < \min\left[1, \frac{f(x^*)q(x_0)}{f(x_0)q(x^*)}\right]$, 其中 f 代表本模拟

中的玻色采样模型, $f(x)$ 表示样本 x 在该模型下作为输出组合的分布概率, 则接受样本 x^* 作为马尔可夫链中的下一个转移状态, 否则放弃该样本并继续转移当前状态 x_0 , 这也意味着在每一次采样过程中, 只需要计算部分 n 维子矩阵的积和式, 有效降低了采样时间开销;

4) 循环步骤 3) 生成一个马尔可夫链, 由于马尔可夫链收敛到符合 $f(x)$ 的平稳分布需要一定的时间, 故定义了一个状态转移阈值 τ_{burn} , 并截取第 $(\tau_{burn}-1)$ 个样本之后的样本作为模拟需要的样本集;

5) 在步骤 4) 生成的样本集中, 为减少可能出现多个自相关样本的情况, 每隔 τ_{thin} 次状态转移便提取一个样本并形成最终的样本集合。

图 1(b) 列举了部分通过 MCMC 采样获取的输出组合样本 S_1, S_2, \dots, S_t (t 为大于 0 的任意自然数), 对于每一个输出组合 S , 其每个通道中的元素值代表着

光学网络中相应的输出模式中光子的输出数量,若所有输出模式中的光子数少于输入光子数,则代表光子丢失。例如,图 1(b)中的输出组合 S_2 共有 3 个光子输出,说明 1 个光子在光学网络的传播过程中丢失。

2.3 贝叶斯检验理论

为了分析样本的质量,本文采用贝叶斯检验算法^[18-20]对获取的样本和光子源处产生光子损失的玻色采样进行区分,由于该算法以似然比^[18]作为计算基础,需要对幺正矩阵的积和式进行求解,故该过程同样具有指数级时间复杂度。

在贝叶斯检验理论中,假设 Q 为模拟对象, R 为需要区分的参照对象, N 为通过模拟 Q 获取的样本的数量,则它们满足如下数学关系:

$$\frac{P(Q|N)}{P(R|N)} = \prod_{i=1}^N \left(\frac{q_i}{r_i} \right) = \lambda, \quad (4)$$

式中: $P(Q|N)$ 为 N 个样本来自模拟对象 Q 的概率; $P(R|N)$ 为 N 个样本来自参照对象 R 的概率; q_i 和 r_i 分别为模拟对象 Q 和参照对象 R 在第 i 个样本中的具体分布概率,且满足 $P(Q|N) + P(R|N) = 1$ 。接着,便可采用 $P(Q|N)$ 作为模拟对象 Q 和参照对象 R 的区分程度,其计算方式为

$$P(Q|N) = \frac{\lambda}{\lambda + 1}, \quad (5)$$

式中,若 $P(Q|N)$ 随着数量 N 的增加而不断趋近于 1,则表示 N 个样本均属于模拟对象 Q ,能够与参照对象 R 进行区分,否则,无法实现区分。在本次模拟中, R 为光子源处产生光子损失的玻色采样,对于模式数为 m ,输入光子数为 n_1 ,输出光子数为 n_2 ($n_2 < n_1$) 的情况,其输出组合 S 的分布概率为

$$P = \left[\frac{1}{\binom{n_1}{n_2}} \right] \sum_{\sigma} |\text{Perm}(\mathbf{M}_{\sigma})|^2, \quad (6)$$

式中: σ 为遍历光子数为 n_2 的所有输入组合; \mathbf{M}_{σ} 是光学网络对应矩阵 \mathbf{M} 的 n_2 阶子矩阵,具体来说,首先对于输出组合 S 中第 i ($i=1, 2, \dots, m+2d$) 个元素 S_i ,取矩阵 \mathbf{M} 中第 i 行并复制 S_i 份得到中间矩阵 \mathbf{M}' ;其次,对于输入组合 σ 中的第 j ($j=1, 2, \dots, m+2d$) 个元素,取矩阵 \mathbf{M}' 中的第 j 列并复制 σ_j 份即可得到矩阵 \mathbf{M}_{σ} 。为方便数据处理,在计算过程中对式(4)中的 q_i 和 r_i (i 为输出组合 S 的标号)均实现归一化,即无论是在模拟对象 Q 或者参照对象 R 中,光子数为 n_2 的所有可能的输出组合分布概率之和均为 1。

3 模拟及分析

3.1 τ_{thin} 对考虑光子损失的 MCMC 玻色采样模拟的影响研究

假定光子损失发生在光学网络中,利用 2.1 节中的 4 光子 8 模式光子损失网络模型进行 MCMC 玻色采样模拟,其中,每个光路中的光子损失概率 P_{loss} 均设为相同,且在模拟中由 0 逐渐增为 0.1,步长间隔固定为 0.01。在基于每一种光子损失概率的采样过程中,给 τ_{burn} 设置一个初始值 100 并保持不变, τ_{thin} 则由 10 逐渐增长为 200,且对于每一种 τ_{thin} 的情况,获取 200 个有效样本。模拟重复进行 100 次以提高采样结果的准确性。

当光学网络中引入的光子损失概率 P_{loss} 分别为 0.01、0.03、0.05 和 0.07 时,分别对采样结果进行贝叶斯检验,结果如图 3 所示,其中, P 代表式(5)中 $P(Q|N)$ 的值,可知,所有的样本均能快速通过贝叶

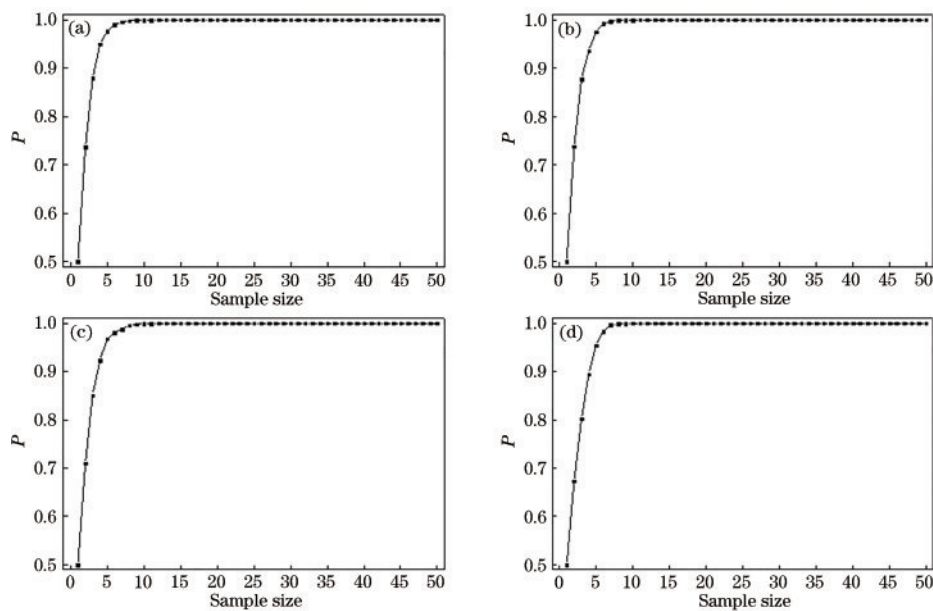


图 3 光子损失概率 P_{loss} 分别为 0.01、0.03、0.05、0.07 时,贝叶斯检验结果变化曲线。(a) 0.01; (b) 0.03; (c) 0.05; (d) 0.07

Fig. 3 Updated curves of Bayesian test results with different photon loss probabilities. (a) 0.01; (b) 0.03; (c) 0.05; (d) 0.07

斯检验,证明了采样结果来源的可靠性。并且,随着 τ_{thin} 逐渐增大,模拟对象与参照对象能够实现区分,即式(5)中 $P(Q|N)$ 的值达到 1 时所需的样本数量逐渐减少,且减少的幅度不断降低,最终趋于稳定。例如,在图 4(a)中,光子损失概率 P_{loss} 设为 0.01,当 τ_{thin} 的值由 10 增到为 80 时, $P(Q|N)$ 的值达到 1 时的样本数由 36 减少至 24;而当 τ_{thin} 的值继续增大,符合条件的样本数则在 24 至 26 这个区间内浮动。另一方面,当改变光

路中的光子损失概率 P_{loss} , $P(Q|N)$ 的值达到 1 时的样本数量和 τ_{thin} 之间的关系仍与前述情况一致。这表明,基于不同光子损失概率的光学网络模型,均能通过 MCMC 方法获取有效的玻色采样结果,这些采样结果在贝叶斯检验下,均能对光子源处存在光子损失的玻色采样进行区分,且实现区分所需样本数随着 MCMC 方法中 τ_{thin} 的逐渐增加而逐渐减少,最终趋于稳定,此时 MCMC 方法成功模拟了考虑光子损失的玻色采样过程。

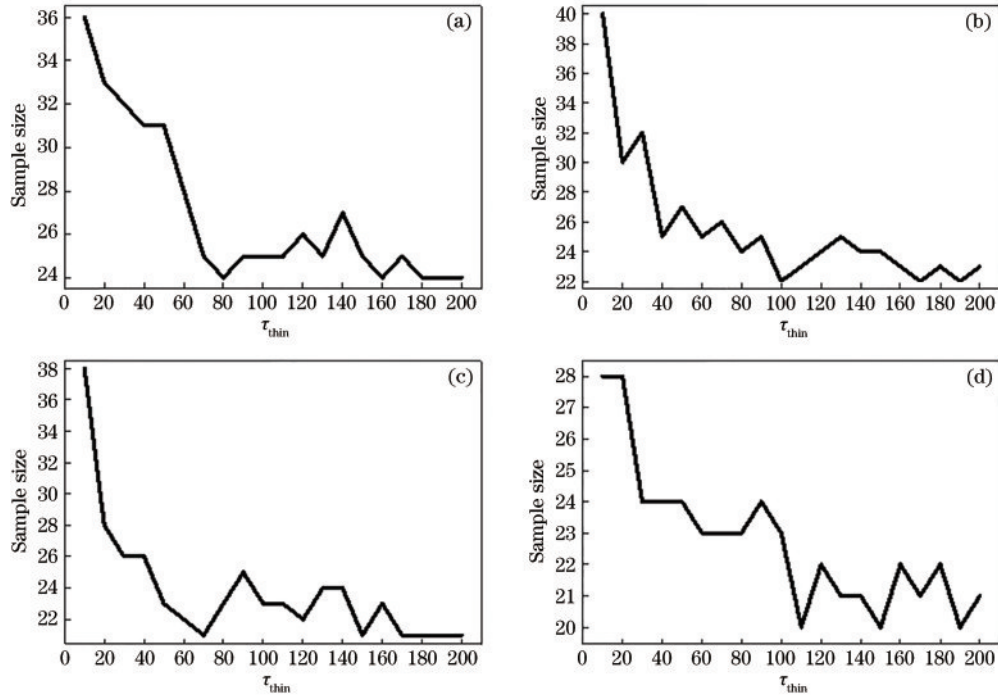


图 4 光子损失概率 P_{loss} 分别为 0.01、0.03、0.05、0.07, 贝叶斯检验结果达到 1 时样本数随 τ_{thin} 的变化。
(a) 0.01; (b) 0.03; (c) 0.05; (d) 0.07

Fig. 4 Number of samples updating with τ_{thin} increasing with different photon loss probabilities, when Bayesian test result reaches 1.
(a) 0.01; (b) 0.03; (c) 0.05; (d) 0.07

3.2 考虑光子损失的不同规模光学网络 MCMC 玻色采样模拟

进一步地,对考虑光子损失的不同规模光学网络 MCMC 玻色采样模拟进行研究。通过改变光子损失的光学网络规模,分别进行 MCMC 玻色采样并采用贝叶斯检验算法对采样结果进行验证。在每次模拟中,将光子损失概率 P_{loss} 设置为 0.03,并获取 200 个采样结果。模拟重复 100 次以计算贝叶斯检验结果的平均值。通过结果分析,这两种光学网络模型下的采样结果均能与光子损失发生在光子源处的玻色采样进行区分,且完成检验所需的样本数量随着 τ_{thin} 的增大而逐渐减少,最后趋于稳定。如图 5 所示,对于每一个 τ_{thin} 值,光学网络规模为 9 时实现区分所需的样本数最多,光学网络规模为 7 时则最少,例如,当 τ_{thin} 为 10,规模数为 7、8、9 时采样结果完全通过检验所需的样本数分别为 33、40、46,且随着 τ_{thin} 增加到 200,达到上述条件所需的

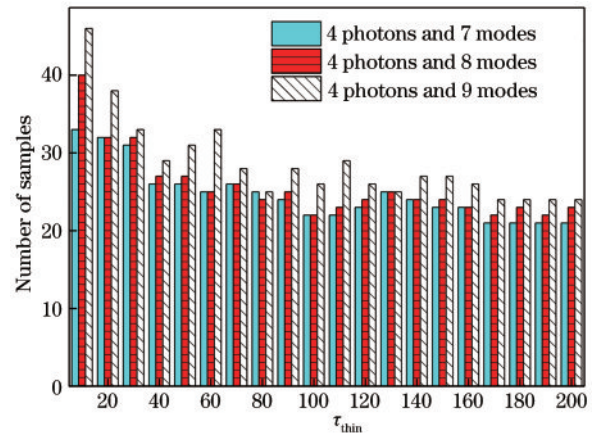


图 5 不同光学网络规模下贝叶斯检验结果达到 1 时样本数随 τ_{thin} 的变化

Fig. 5 Number of samples updating with τ_{thin} increasing under different optical network scales, when Bayesian test result reaches 1

样本数分别稳定在 21、23、24。另一方面,当通过贝叶斯检验的所需的样本数一致(例如 23)时,规模数为 7、8、9 时的跳跃样本数 τ_{thin} 分别为 85、120、170。

结果表明,当输入光子数固定时,改变引入光子损失的光学网络规模,仍能通过 MCMC 方法获取有效的采样结果,但光学网络规模越大,MCMC 方法需要更多的跳跃样本数以通过贝叶斯检验,模拟过程所需计算量明显增大。

4 结 论

针对光学网络中可能存在的光子损失情况,基于 Clements 光学网络,利用等效分束器原理构建了引入光子损失的 4 光子 8 模式玻色采样模型,且该模型中的模式数根据模拟需求改变。采用 MCMC 方法实现了考虑光子损失的玻色采样模拟,并通过贝叶斯检验方法来验证采样结果的可靠性。模拟结果表明,该方法的玻色采样模拟结果不受光学网络中光子损失概率的影响,具有较好的稳定性,且实现了与光子源处发生光子损失的玻色采样样本之间的区分。当 MCMC 方法中 τ_{thin} 的值逐渐增大或者光学网络规模逐渐减少时,通过贝叶斯检验所需的结果样本数均会逐渐下降,表明随着 MCMC 采样样本之间的跳跃距离逐渐增大,模拟效果越好,也表明光学网络规模的提高会增加 MCMC 模拟的计算开销。该模拟结果有助于考虑误差的玻色采样研究。

参 考 文 献

- [1] 江逸楠. 量子计算的发展趋势综述[J]. 无人系统技术, 2020, 3(3): 67-74.
Jiang Y N. A survey on the development trend of quantum computing[J]. Unmanned Systems Technology, 2020, 3(3): 67-74.
- [2] 张海懿, 崔潇, 吴冰冰. 量子计算技术产业发展现状与应用分析[J]. 信息通信技术与政策, 2020(7): 20-26.
Zhang H Y, Cui X, Wu B B. Analysis of quantum computing industrial developments and applications[J]. Information and Communications Technology and Policy, 2020(7): 20-26.
- [3] Aaronson S, Arkhipov A. The computational complexity of linear optics[C]//STOC'11: Proceedings of the forty-third annual ACM symposium on Theory of computing, June 6-8, 2011, San Jose, CA, USA. New York: ACM Press, 2011: 333-342.
- [4] Huh J, Guerreschi G G, Peropadre B, et al. Boson sampling for molecular vibronic spectra[J]. Nature Photonics, 2015, 9(9): 615-620.
- [5] Tichy M C. Interference of identical particles from entanglement to boson-sampling[J]. Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics, 2014, 47(10): 103001.
- [6] Clifford P, Clifford R. The classical complexity of boson sampling[EB/OL]. (2017-06-05) [2017-10-17]. <https://arxiv.org/abs/1706.01260>.
- [7] Gogolin C, Kliesch M, Aolita L, et al. Boson-sampling in the light of sample complexity[EB/OL]. (2013-06-13) [2020-05-14]. <https://arxiv.org/abs/1306.3995v3>.
- [8] Aaronson S. A linear-optical proof that the permanent is #P-hard[J]. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2011, 467(2136): 3393-3405.
- [9] Wang H, Qin J, Ding X, et al. Boson sampling with 20 input photons and a 60-mode interferometer in a 10^{14} -dimensional Hilbert space[J]. Physical Review Letters, 2019, 123(25): 250503.
- [10] Aaronson S, Brod D J. BosonSampling with lost photons[J]. Physical Review A, 2016, 93: 012335.
- [11] Oszmaniec M, Brod D J. Classical simulation of photonic linear optics with lost particles[J]. New Journal of Physics, 2018, 20(9): 092002.
- [12] Ralph T C. Boson sampling on a chip[J]. Nature Photonics, 2013, 7(7): 514-515.
- [13] Tillmann M, Dakić B, Heilmann R, et al. Experimental boson sampling[J]. Nature Photonics, 2013, 7(7): 540-544.
- [14] Wang H, He Y, Li Y H, et al. High-efficiency multiphoton boson sampling[J]. Nature Photonics, 2017, 11(6): 361-365.
- [15] Clements W R, Humphreys P C, Metcalf B J, et al. Optimal design for universal multiport interferometers[J]. Optica, 2016, 3(12): 1460-1465.
- [16] Neville A, Sparrow C, Clifford R, et al. Classical boson sampling algorithms with superior performance to near-term experiments[J]. Nature Physics, 2017, 13(12): 1153-1157.
- [17] Reck M, Zeilinger A, Bernstein H J, et al. Experimental realization of any discrete unitary operator[J]. Physical Review Letters, 1994, 73(1): 58-61.
- [18] Bentivegna M, Spagnolo N, Vitelli C, et al. Bayesian approach to Boson sampling validation[J]. International Journal of Quantum Information, 2014, 12(7-8): 1560028.
- [19] Dai Z, Liu Y, Xu P, et al. A Bayesian validation approach to practical boson sampling[J]. Science China Physics, Mechanics & Astronomy, 2020, 63(5): 333-342.
- [20] Aaronson S, Arkhipov A. BosonSampling is far from uniform[EB/OL]. (2013-09-28) [2013-10-01]. <https://arxiv.org/abs/1309.7460v2>.