

## 激光与光电子学进展

基于光强传输方程离散余弦变换求解的  
数字全息相位解调方法王杰宇<sup>1</sup>, 王华英<sup>1,2</sup>, 王学<sup>1,2</sup>, 门高夫<sup>1,2</sup>, 王文健<sup>1</sup>, 张子健<sup>1</sup>, 雷家良<sup>1</sup>, 董昭<sup>1,2\*</sup><sup>1</sup>河北工程大学数理科学与工程学院, 河北 邯郸 056038;<sup>2</sup>河北省计算光学成像与光电检测技术创新中心, 河北 邯郸 056038

**摘要** 提出了一种基于光强传输方程(TIE)的数字全息相位解调方法,并利用离散余弦变换进行了求解。仿真和实验结果表明,与传统的基于快速傅里叶变换的相位解调方法相比,该方法在没有损失精度的基础上加快了解包裹过程。此外,通过选择一个合适的延拓方案来计算强度的偏导数后,该方法的效率可进一步提高。提出的基于TIE的新型相位解调方法具有较高的处理速度和精度,可以实现相位测量的实时应用。

**关键词** 全息; 光强传输方程; 离散余弦变换; 相位解调; 数字全息

中图分类号 O436

文献标志码 A

DOI: 10.3788/LOP202259.2109001

Digital Holographic Phase Unwrapping Based on Transport Intensity  
Equation Solved with Discrete Cosine TransformWang Jieyu<sup>1</sup>, Wang Huaying<sup>1,2</sup>, Wang Xue<sup>1,2</sup>, Men Gaofu<sup>1,2</sup>, Wang Wenjian<sup>1</sup>, Zhang Zijian<sup>1</sup>,  
Lei Jialiang<sup>1</sup>, Dong Zhao<sup>1,2\*</sup><sup>1</sup>School of Mathematics and Physics Science and Engineering, Hebei University of Engineering,  
Handan 056038, Hebei, China;<sup>2</sup>Hebei Computational Optical Imaging and Photoelectric Detection Technology Innovation Center,  
Handan 056038, Hebei, China

**Abstract** This paper proposes a digital holographic phase demodulation approach based on the transport intensity equation (TIE), which is solved with a discrete cosine transform. Simulative and experimental findings reveal that the new approach successfully accelerates the unwrapping process with no loss of accuracy compared with the traditional approach based on fast Fourier transform. The new approaches' efficiency can still be enhanced after choosing a suitable extending scheme for the computation of the axis derivative of intensity. The proposed new TIE-based phase unwrapping approaches can lead to the real-time uses of the phase measurement with high processing speed and precision.

**Key words** holography; transport intensity equation; discrete cosine transform; phase unwrapping; digital holography

## 1 引言

在众多干涉测量应用中,例如数字全息<sup>[1-5]</sup>、合成孔径雷达<sup>[6-8]</sup>、磁共振成像<sup>[9]</sup>和条纹投影轮廓仪<sup>[10-11]</sup>等,由于检索到的相位被包裹到区间 $[-\pi, \pi]$ 之间,必须通过相位解包裹(PU)才能获得真实的连续相位分布。在过去的几十年中,已经提出了很多PU方法,可将其

分为两类:时间<sup>[12-16]</sup>和空间方法<sup>[17-29]</sup>。时间方法,如多频方法<sup>[13-14]</sup>和外差方法<sup>[15-16]</sup>,PU相位图是随时间变化来获取,并且不需要相邻像素信息,因此可以避免缠绕相位缺陷的影响,但是这些方法需要较多包裹相位或多频条纹图。空间方法利用空间信息展开相位,与时间方法相比约束条件更少。其中路径跟踪方法通过解决路径积分问题来展开相位图<sup>[17-20]</sup>,例如分支方

收稿日期: 2021-09-15; 修回日期: 2021-10-21; 录用日期: 2021-10-29

基金项目: 国家自然科学基金(62175059)、河北省自然科学基金(F2018402285)、河北省高等学校科学技术研究项目(QN2020426)、邯郸市科学技术研究与发展计划(19422083008-69)

通信作者: handandong@163.com

法<sup>[19-22]</sup>、质量引导路径跟踪(QG-PF)方法<sup>[21-22]</sup>和掩码切割算法<sup>[23]</sup>。路径跟踪方法采用的是逐点比较法,对于理想条件,该方法是有效的,它的计算量小、效率高。但是,如果存在噪声或相位跳跃,这些方法可能会在展开的相位图上带来条纹噪声;此外,由于PU过程依赖于积分路径,结果并不唯一<sup>[18]</sup>。最小范数方法是另一种类型的空间解调方法<sup>[21-27]</sup>,它擅长处理带有噪声或相位跳跃的展开相位图<sup>[29]</sup>。局部噪声可以通过最小化定义的误差度量来过滤。最小二乘方法(LS)是最常用的最小范数PU方法之一。它通过泊松方程将包裹相位的梯度与绝对相的相位关联,然后利用展开结果的导数与包裹相位数据之间的差异来获得展开相位图。研究学者提出了诸多方法来提高LS方法的效率,例如基于傅里叶变换的LS方法<sup>[24]</sup>、基于离散余弦变换的LS(DCT-LS)方法<sup>[23]</sup>,以及多重网格方法<sup>[24]</sup>。这些方法通常具有良好的鲁棒性,但有时倾向于过度平滑相位图。为了克服这个缺陷,加权最小二乘PU算法<sup>[26, 29]</sup>被提出。加权系数通常首先从质量图中生成并用于相位展开过程,以限制来自平滑效应带来的误差,该算法可以有效屏蔽无效相位数据对邻近区域的不利影响,具有较好的稳定性。然而,获得质量图和权重系数可能很耗时,这将限制PU方法的实时应用。

近年来,为提高PU工艺的效率,新的技术已被引用。Cruz-Santos等<sup>[30]</sup>引入了一种基于red-black tree数据结构的新剪枝策略来加速PU过程,但应首先实施一个额外的过程来获得数据结构。Kulkarni等<sup>[31]</sup>提出了一种基于多项式相位逼近和线性卡尔曼滤波器的噪声鲁棒PU算法。然而该方法使用了线扫描方法或像素选择的质量引导策略。张祥朝等<sup>[32]</sup>将非下采样Contourlet变换应用于PU算法以提高鲁棒性,然而区域分割必须在展开过程之前进行,必然会增加处理时间。

最近,学术界还提出了基于光强传输方程(TIE)的PU方法<sup>[33-35]</sup>。它从强度信息中获得绝对相位图。首先计算强度的轴向导数。然后将结果用作泊松方程的输入,并且可以通过使用快速傅里叶变换(FFT)求解方程来获得展开的相位图。基于FFT-TIE的PU方法被证明是准确和快速的,但效率仍有提高空间。文献<sup>[33-35]</sup>提出将泊松方程用Volkov方案求解<sup>[36]</sup>,该方法将相位图对称扩展,但处理时间也随之增加。Zuo等<sup>[37-38]</sup>在他们的出色工作中证明,用离散余弦变换(DCT)并且利用硬边界条件(边界外光强为零)可以检索TIE真实相位,并且不需要Volkov方案。本文将这一研究成果引入到数字全息显微PU算法中,通过模拟与实验数据测试,证明基于DCT-TIE的数字全息PU方法与传统的FFT算法效率更高。通过将边缘部分反射(RMP)来扩展相位图,表明采用RMP方案

与Volkov方案相比可以更高的速度展开相位图,且 not 损失精度。同时通过与传统的DCT-LS全息相位解调相比,表明该方法在处理相位剧烈变化的物体时具有更强的鲁棒性。

## 2 基本原理

### 2.1 TIE原理简介

TIE是一种非干涉测量光学相位检索的方法。根据文献<sup>[39-40]</sup>,在近菲涅耳衍射区,光波的强度( $I$ )和相位( $\phi$ )之间的关系可以描述为

$$-k \frac{\partial I(x, y; z)}{\partial z} = \nabla \cdot [I(x, y; z) \nabla \phi(x, y; z)] \quad (1)$$

式中: $k$ 是波数; $\nabla$ 是空间坐标( $x, y$ )上的横向梯度算子; $\partial I/\partial z$ 是强度的轴向导数,一般来说,在式(1)中选择 $z$ 为0。Neumann边界条件通常应用于式(1)的解。则有

$$I \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} = g, \quad (2)$$

式中: $\Omega$ 是由TIE控制的区域, $\partial \Omega$ 是边界; $g$ 是一个光滑函数。在此边界条件下,TIE的解在加性常数之前是唯一的。这里可直接给出绝对相位,无需PU处理。如果给出包裹相位图 $\phi_w$ ,则可以通过数值方式生成波函数 $U$ :

$$U(x, y; 0) = \sqrt{I} \exp[j\phi_w], \quad (3)$$

然后可以计算强度的轴向导数。最后,可以基于TIE获得展开的相位图。当TIE用于PU时,式(1)可以进一步简化。当波函数 $U$ 的振幅设置为常数时,强度 $I$ 对于所有坐标( $x, y$ )都是常数。为方便计算,此处将振幅设置为1,对于用TIE方法进行相位PU而言,该设置不影响最终结果。然后式(1)可以写为

$$\nabla^2 \phi(x, y) = -k \frac{\partial I}{\partial z}. \quad (4)$$

强度的轴向偏导数是用波函数 $U$ 的数值传播得到的<sup>[33-34]</sup>。使用角谱法得到 $\pm \Delta z$ 两个强度:

$$U(x, y; \Delta z) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \mathcal{F} \left\{ U(x, y; 0) \right\} \cdot \exp \left[ jk \Delta z \sqrt{1 - \lambda^2 (f_x^2 + f_y^2)} \right] \right\}, \quad (5)$$

$$I(x, y; \Delta z) = U(x, y; \Delta z) U^*(x, y; \Delta z), \quad (6)$$

则有

$$\frac{\partial I}{\partial z} = \frac{I(x, y; \Delta z) - I(x, y; -\Delta z)}{2\Delta z}, \quad (7)$$

式中: $\Delta z$ 是一个非常小的距离; $U^*$ 是 $U$ 的复共轭; $f_x$ 和 $f_y$ 分别是与 $x$ 轴和 $y$ 轴相关的空间频率; $\mathcal{F}\{\}$ 和 $\mathcal{F}^{-1}\{\}$ 分别是傅里叶变换和傅里叶逆变换。利用傅里叶变换,得到了等式的解。在Neumann边界条件下的式(4)可以写为

$$\phi = -\frac{1}{2\pi\lambda} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{(f_x^2 + f_y^2) + \epsilon} \cdot \mathcal{F} \left\{ \frac{I(x, y; \Delta z) - I(x, y; -\Delta z)}{2\Delta z} \right\} \right\}, \quad (8)$$

式中,  $\epsilon$  是一个很小的正数, 以避免零除。

若正确使用式(7), 在实践中必须正确处理包裹相位图以满足 Neumann 边界条件。通常使用 Volkov 方案, 如引言所述, 此方法对称扩展了相位图, 从而导致处理时间增加。Zuo 等<sup>[37]</sup>提出了一种使用 TIE 的无边界伪影相位检索方法。该方法采用硬边界条件, 满足 Neumann 边界条件, 对图像不做任何处理。用 DCT 方法可得到真实相位为

$$\phi = -k \text{DCT}^{-1} \left\{ \frac{1}{\Lambda_{m,n} + \epsilon} \text{DCT} \left\{ \frac{\partial I}{\partial z} \Big|_{z=0} \right\} \right\}, \quad (9)$$

式中:  $\text{DCT}\{\}$  和  $\text{DCT}^{-1}\{\}$  表示正向和逆向 DCT; 这里, 因为  $I$  被认为是 1, 所以  $\Lambda_{m,n}$  可以被视为特征函数  $\nabla^2 \phi_{m,n} = \Lambda_{m,n} \phi_{m,n}$  的相关特征值, 可表示为

$$\Lambda_{m,n} = -\pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right), \quad m, n = 0, 1, 2, \dots, \quad (10)$$

式中,  $a$  和  $b$  分别是相位图的长度和宽度。关于式(9)和式(10)的细节可参考文献[36]。

## 2.2 $\partial I/\partial z$ 的计算

在介绍基于 DCT-TIE 的 PU 方法之前, 本文展示了另一种获取  $\partial I/\partial z$  值的方法。正如参考文献[33]中

所述, 当使用式(8)计算时, 找到最佳的  $\Delta z$  是一个关键问题。如图 1 所示, 较小的  $\Delta z$  会减少轴向导数的非线性误差, 但会增加噪声的影响。为了解决这个问题, Martinez-Carranza 等<sup>[33]</sup>提出了一个精确的模型。强度  $I$  可以表示为  $I = UU^*$ , 则有

$$\frac{\partial I}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z} U^* + U \frac{\partial U^*}{\partial z} = 2\text{Re} \left( U^* \frac{\partial U}{\partial z} \right), \quad (11)$$

式中,  $\text{Re}(\cdot)$  表示括号中复数的实部。由式(5)中可得

$$\frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=0} = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \mathcal{F} \left\{ U(x, y; 0) \right\} \cdot jk \sqrt{1 - \lambda^2 (f_x^2 + f_y^2)} \right\}. \quad (12)$$

当强度  $I$  在平面  $z=0$  上设置为 1 时, 强度对  $z$  的导数可以写为

$$\frac{\partial I}{\partial z} \Big|_{z=0} = 2\text{Re} \left\{ \exp(-j\varphi_w) \mathcal{F}^{-1} \left\{ \mathcal{F} \left\{ \exp(j\varphi_w) \right\} \cdot jk \sqrt{1 - \lambda^2 (f_x^2 + f_y^2)} \right\} \right\}. \quad (13)$$

## 2.3 基于 DCT-TIE 的数字全息 PU 方法

离轴数字全息显微系统中, 相干光经分光装置被分为物光和参考光<sup>[41]</sup>。其中透过样本的物光经显微镜放大后与不携带样本信息的参考光干涉, 最终干涉图由数字相机所记录, 本文将 TIE 的方法引入全息重建过程, 对样本包裹相位图进行处理。所提出的数字全息 DCT-TIE 处理方法流程如图 1 所示。

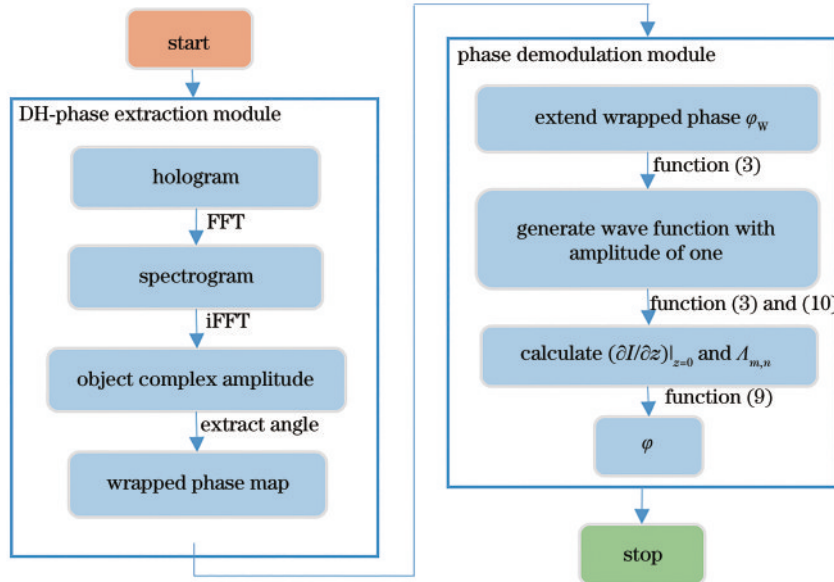


图 1 基于 DCT-TIE 的数字全息 PU 方法流程图

Fig. 1 Flow chart of digital holographic PU method based on DCT-TIE

基于 DCT-TIE 的 PU 方法是基于式(9)实现的。并用式(10)和式(13)计算  $\Lambda_{m,n}$  和  $(\partial I/\partial z)|_{z=0}$ 。轴向强度导数必须满足 Neumann 边界条件。在文献[36]中, 使用比相机视野小的硬边界条件, 确保获得的两幅图像

的差异满足 Neumann 边界条件。在本文中, 包裹的相位图必须适当扩展以满足边界条件的要求,  $(\partial I/\partial z)|_{z=0}$  计算后提取原始部分作为式(9)的输入。

### 3 模拟仿真

本节通过仿真测试采用 Volkov 方案的 DCT-TIE 方法,以验证展开的相位图是否与设置的相位图吻合。在本节和下一节与文献[36]中所示的 FFT-TIE 方法进行了比较。所用程序是用 Matlab2017a 编写并在一台 Intel Core i7-6500CPU 2.50 GHz 和 8 G RAM 的计算机上实现的。

此处对具有不同相位分布的物体进行研究。Matlab 内置函数 peaks 大小为 512 pixel×512 pixel,用于模拟平滑变化的相位物体。图 2(a)和 2(b)分别是设置的原始和相应的包裹相位图。使用 DCT-TIE 方法和 FFT-TIE 方法展开的相位图分别如图 2(c)和 2(d)所示。它们与原始相位图匹配良好。这里采用均方根误差(RMSE)作为评价指标,用  $E_{\text{RMSE}}$  表示,它是测量值与真值偏差的平方和测量次数比值的平方根:

$$E_{\text{RMSE}} = \sum_{(x,y)} \sqrt{\frac{I_i - I_0}{M*N}}, \quad (14)$$

式中: $M$ 、 $N$ 分别为展开相位图片的像素尺寸; $I_i$ 为展开相位图; $I_0$ 为原物体相位基准值。经计算两种方法的 RMSE 相同(约 0.0648 rad),但处理时间不同。FFT-TIE 方法花费的时间约为 0.212 s,比 DCT-TIE 方法花费的时间(约 0.186 s)长。针对剧烈相位变化物体 cameraman 的模拟结果也得到了良好的印证。大小为 1024 pixel×1024 pixel。设置的原始和相应的包裹相位图以及展开的相位图可以在图 3 中看到。两种方法的 RMSE 均为 0.429 rad,而 DCT-TIE 方法的处理时间约为 0.863 s,并且 FFT-TIE 方法为 0.742 s。尽管

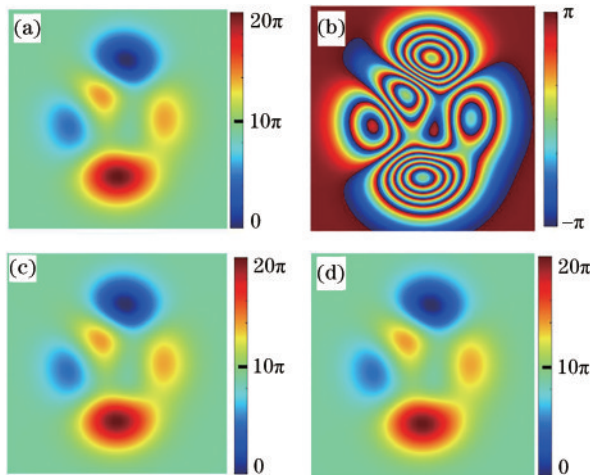


图 2 peaks 的模拟仿真结果,所有图的比例尺单位均为 rad。(a)真实相位图;(b)对应的包裹相位图;(c) DCT-TIE 方法展开相位图;(d) FFT-TIE 方法展开相位图

Fig. 2 Simulation results of object peaks, and unit of scale bar is rad for all figures. (a) Set phase map; (b) corresponding wrapped phase map; (c) unwrapping phase map with DCT-TIE method; (d) unwrapping phase map with FFT-TIE method

展开的相位图与原始相位图类似,但 RMSE 大于平滑

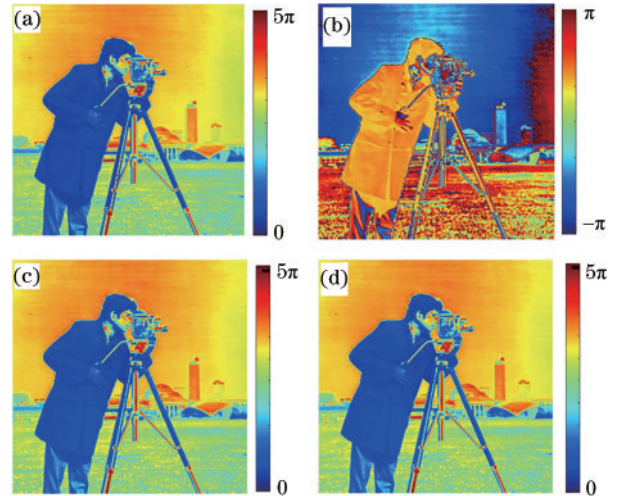


图 3 cameraman 的模拟仿真结果。(a)原设定相位图;(b)对应的包裹相位图;(c) DCT-TIE 方法展开相位图;(d) FFT-TIE 方法展开相位图

Fig. 3 Simulation results of object cameraman. (a) Set phase map; (b) corresponding wrapped phase map; (c) unwrapping phase map with DCT-TIE method; (d) unwrapping phase map with FFT-TIE method

相位变化物体的误差。包裹相位图中强烈变化的区域(例如摄影师和背景的背景)中的欠采样可能会导致错误。

仿真结果表明,DCT-TIE 方法的精度与 FFT-TIE 方法相同,处理速度更快,与预期一致。对于采用 Volkov 方案的 DCT-TIE 方法,与 FFT-TIE 方法的不同之处在于如何通过求解泊松方程[式(4)]得到展开的相位图。Ghiglia 等<sup>[29]</sup>证明,相位图用 Volkov 延拓方案时,二维傅里叶变换实际上是二维余弦变换。那么这两种方法的准确率应该是一样的。同时不需要使用扩展结果来获得 DCT 过程  $(\partial I / \partial z)|_{z=0}$  的展开相位。与 FFT-TIE 方法相比,计算  $(\partial I / \partial z)|_{z=0}$  后只处理了 1/4 的数据。

### 4 实验结果

本节采用实验相位图来测试 TIE 方法在噪声下的性能。实验全息图从典型的马赫-曾德尔离轴数字全息显微镜中获得。全息图的获取和相位图的提取过程可参考文献[42]。图 4(a)和 4(b)显示了骨髓癌细胞的全息图及其相应的包裹相位图,尺寸为 512 pixel×512 pixel。使用 DCT-TIE 和 FFT-TIE 方法展开的相位图分别如图 4(c)和 4(d)所示。DCT-TIE 和 FFT-TIE 方法的 RMSE 均为  $3.1 \times 10^{-7}$  rad,表明两种方法的精度相同,与第 2 节的分析一致。DCT-TIE 和 FFT-TIE 方法的处理时间分别为 0.194 s 和 0.225 s。结果表明,DCT-TIE 方法确实加快了 PU 过程。为测试相位是否被准确 PU,图 4 中 TIE 方法解调的相位被重新包裹到  $[-\pi, \pi]$  间,便于与图 4(b)进行比较,结果

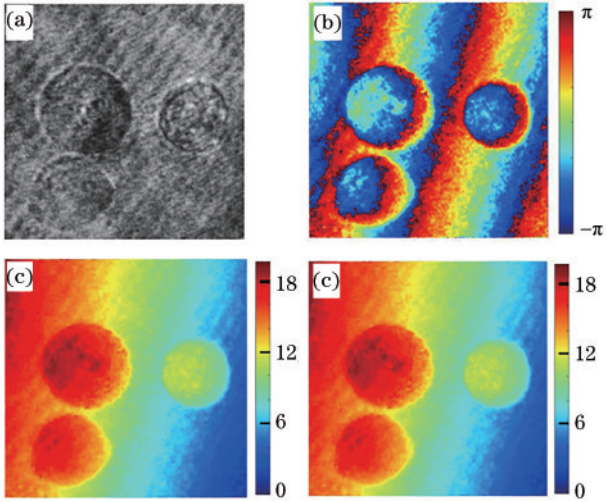


图 4 使用离轴数字全息显微镜的骨髓癌细胞实验结果。(a)全息图;(b)包裹相位图;(c) DCT-TIE 方法展开相位图;(d) FFT-TIE 方法展开相位图

Fig. 4 Experimental results of bone marrow cancer cells with off-axis digital holographic microscope. (a) Hologram; (b) corresponding wrapped phase map; (c) unwrapping phase map with DCT-TIE method; (d) unwrapping phase map with FFT-TIE method

如图 5(a)和 5(b)所示。对于相位展开的结果,使用基于最大-最小度量的方法对畸变进行补偿,结果见图 5(c),补偿过程详见文献[42],可以清晰地获得无畸变的骨髓癌细胞的相位信息。

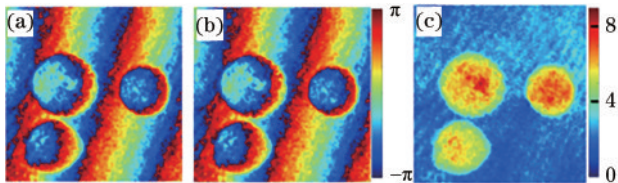


图 5 骨髓癌细胞相位图。(a)、(b)图 4(c)和 4(d)的重新包裹相位图;(c)补偿后展开相位图

Fig. 5 Phase maps of bone marrow cancer cells. (a), (b) Rewrapped phase maps of Fig. 4(c) and 4(d); (c) compensated unwrapped phase map

此处使用传统中药药材三七的相位图来测试 TIE 方法的性能。图 6(a)和 6(b)分别显示了全息图(1024 pixel×1024 pixel)和包裹相位图,相位起伏变化比骨髓癌细胞的变化更大。图 6(c)和 6(d)分别显示了使用 DCT-TIE 和 FFT-TIE 方法展开的相位图。与骨髓癌细胞的结果一样,两种方法的相位图相似。DCT-TIE 和 FFT-TIE 方法的 RMSE 均为  $2.0 \times 10^{-6}$  rad;而 DCT-TIE 和 FFT-TIE 方法的处理时间分别为 0.741 s 和 0.858 s。结果表明,在相同精度下, DCT-TIE 方法具有更快的处理速度。重新包裹的相位图如图 7 所示。三七相位图中心部分的主要特征与图 6(a)中的类似,但边缘部分的相位分布不同。正如第 3 节所述,相位剧烈变化可能会导致误差。

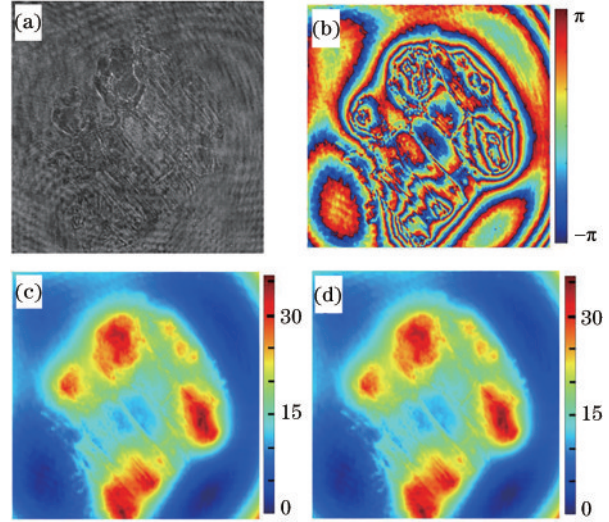


图 6 中药三七的实验结果。(a)全息图;(b)对应的包裹相位图;(c) DCT-TIE 方法展开相位图;(d) FFT-TIE 方法展开相位图

Fig. 6 Experimental results of Chinese medicine pseudo-ginseng. (a) Hologram; (b) corresponding wrapped phase map; (c) unwrapping phase map with DCT-TIE method; (d) unwrapping phase map with FFT-TIE method

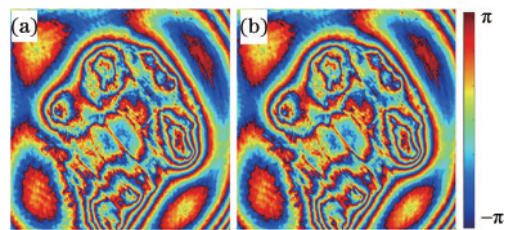


图 7 中药三七的重新包裹相位图。(a)图 5(c)的重新包裹相位图;(b)图 5(d)的重新包裹相位图

Fig. 7 Rewrapped phase maps of Chinese medicine pseudo-ginseng. (a) Rewrapped phase map of Fig. 5(c); (b) rewrapped phase map of Fig. 5(d)

## 5 讨论与分析

### 5.1 对 $(\partial I / \partial z)|_{z=0}$ 计算的延拓方案

从仿真和实验结果来看,数字全息相位恢复过程中 DCT-TIE 方法比 FFT-TIE 方法更为有效,处理时间更短。根据文献[38],若使用硬边界条件接收图像,则可以满足 Neumann 边界条件。在数值重建过程中,包裹相位图将适当延拓,以避免式(13)中 FFT 对原始  $(\partial I / \partial z)|_{z=0}$  的影响。若有效降低相位图延拓尺寸,则处理时间将缩短。此处提出的延拓方案是通过 RMP 来扩展相位图。为了描述扩展区域的相对大小,将项  $\Delta L / L$  设置为参数  $\alpha$ 。这里,  $L$  是相位图的边长,  $\Delta L$  是沿其延伸区域的长度。

如图 8 所示,本文将带有 RMP 方案的 DCT-TIE (RDCT-TIE)方法应用于 peaks 模拟和实验包裹相位图。相位展开时间和 RMSE 会受到参数  $\alpha$  的影响,两

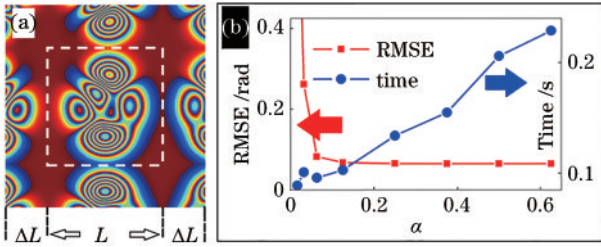


图8 RMP 延拓方案示意图。(a)模拟包裹相位图,白色虚线包围的区域为原始图;(b)使用不同参数 $\alpha$ 的RDCT-TIE方法展开的物体peaks的RMSE和处理时间

Fig.8 Sketch of RMP extending scheme. (a) Simulated wrapped phase map, and area surrounded by white dashed lines is original map; (b) RMSE and process time for object peaks unwrapped by RDCT-TIE method using different  $\alpha$

者关系可以参考图8(b)。RMSE随着 $\alpha$ 的增加而减小,当 $\alpha > 0.3$ 时,几乎保持不变,而处理时间随着 $\alpha$ 的增加而增加。当 $\alpha = 0.5$ 时,RMP方案与Volkov方案相同。在这项工作中,为确保更高的处理速度,选择参数 $\alpha$ 为0.375,展开的相位图(为了简洁,此处未显示)几乎与Volkov方案相同。RDCT-TIE与FFT-TIE方法的RMSE和处理时间可以参考表1,对于物体的peaks和cameraman, RMSE是与相应设置的相位图的差值,而对于其他物体,则是与使用FFT-TIE方法的相应展开相位图的差值。结果表明,与Volkov方案相比,采用RMP方案的DCT-TIE方法能以更快的速度展开相位图,且不损失精度。

表1 RDCT-TIE与FFT-TIE方法的RMSE和处理时间<sup>a</sup>

Table 1 RMSE and processing time for RDCT-TIE and FFT-TIE methods

Object	RDCT-TIE		FFT-TIE	
	RMSE / rad	Processing time / s	RMSE / rad	Processing time / s
Peaks	$6.47 \times 10^{-2}$	0.166	0.0648	0.212
Cameraman	$4.29 \times 10^{-1}$	0.641	0.4296	0.863
Myeloma cells	$2.62 \times 10^{-3}$	0.151	-	0.221
Pseudo-ginseng	$3.01 \times 10^{-4}$	0.611	-	0.858

由于此方案中扩展相位图的尺寸小于Volkov延拓方案,故处理时间相应缩短,这显示了DCT-TIE方法的潜力。这对于实时使用高精度的PU方法非常重要。如图7所示,使用非迭代TIE方法展开的相位图中存在误差,为解决这个问题,Martinez-Carranza等<sup>[33]</sup>提出了一种迭代方法,但每一步都应用的是FFT-TIE方法。可想而知,如果用本文提出的DCT-TIE方法,处理速度将得到有效提升。

## 5.2 与DCT-LS方法的比较

DCT-LS方法<sup>[22]</sup>作为一种典型的LS-PU方法,本节用模拟和实验包裹相位图将本文方法与其比较。实验结果如图9所示,peaks、骨髓癌细胞和中药三七的展开相位图与TIE方法类似。但是,cameraman的结果是不同的。与图5(a)相比,相位没有正确展开。DCT-LS方法的关键过程是求解泊松方程<sup>[29]</sup>:

$$\nabla^2 \phi(x, y) = \rho, \quad (15)$$

式中右侧与包裹相位的两步梯度有关,形式与式(4)相同。然而,在式(15)中,右侧是直接由单像素到单像素的包裹相位计算出来的,并且式(4)中是基于强度的轴向导数计算的。对于没有噪声的平滑变化相位,这两个方程应该是等价的。但是对于一些相位变化很大的物体,直接对像素进行操作可能会带来误差。对于式(4),强度的轴向偏导数的计算可以通过使用FFT或DCT来减少这些像素的影响。结果表明对于泊松方程的右侧得到方法不同,TIE方法对强相位变化物体比DCT-LS方法具有更强的鲁棒性。与DCT相结合,TIE方法将显示出高精度的实时相位测量的潜力。

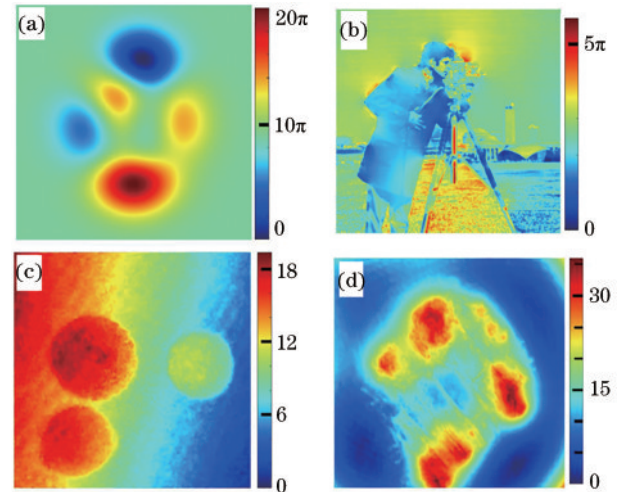


图9 使用DCT-LS方法的展开相位图。(a)Peaks;

(b) cameraman; (c)骨髓癌细胞;(d)中药三七

Fig.9 Unwrapping phase maps using DCT-LS method.

(a) Peaks; (b) cameraman; (c) bone marrow cancer cells;

(d) Chinese medicine pseudo-ginseng

## 6 结 论

介绍了基于DCT-TIE的数字全息相位解调方法,它结合了DCT和基于TIE的方法来进行二维相位展开。仿真和实验结果表明,与传统的基于TIE的PU方法相比,基于DCT-TIE的方法成功地加快了PU过程,且没有降低精度。原因是与FFT相比较,DCT后只需要处理1/4的数据。分析表明,通过选择一个合适的延拓方案来计算强度的轴向偏导数,可以进一步提高DCT-TIE方法的效率。与DCT-LS方法

相比, TIE 方法在剧烈相位变化对象中也表现出较强的鲁棒性。结果表明 DCT-TIE 方法在实时相位测量中具有较高的精度和潜在的应用价值。

## 参 考 文 献

- [1] Dardikman G, Singh G, Shaked N T. Four dimensional phase unwrapping of dynamic objects in digital holography [J]. *Optics Express*, 2018, 26(4): 3772-3778.
- [2] Rabus B, Pichierrri M. A new InSAR phase demodulation technique developed for a typical example of a complex, multi-lobed landslide displacement field, Fels glacier slide, Alaska[J]. *Remote Sensing*, 2018, 10(7): 995.
- [3] 任振波, 林彦民. 光学扫描全息术研究进展[J]. *光学学报*, 2020, 40(1): 0111009.  
Ren Z B, Lam EY.. Progress in optical scanning holography[J]. *Acta Optica Sinica*, 2020, 40(1): 0111009.
- [4] Ma J H, Zhao L, Yuan K M, et al. Crossed cerebellar diaschisis after acute ischemic stroke detected by intravoxel incoherent motion magnetic resonance imaging [J]. *Neurological Sciences*, 2022, 43(2): 1135-1141.
- [5] Duan C P, Tong J, Lu L, et al. Improving the performance of 3D shape measurement of moving objects by fringe projection and data fusion[J]. *IEEE Access*, 2021, 9: 34682-34691.
- [6] Zuo C, Huang L, Zhang M L, et al. Temporal phase unwrapping algorithms for fringe projection profilometry: a comparative review[J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2016, 85: 84-103.
- [7] 杨龙, 苏娟, 黄华, 李响. 一种基于深层次多尺度特征融合 CNN 的 SAR 图像舰船目标检测算法[J]. *光学学报*, 2020, 40(2): 0215002.  
Yang L, Su J, Huang H, et al. SAR ship detection based on convolutional neural network with deep multiscale feature fusion[J]. *Acta Optica Sinica*, 2020, 40(2): 0215002.
- [8] 李佳慧, 王晓晨. 高分三号全极化 SAR 散射特性分析与精度评价[J]. *中国激光*, 2020, 47(3): 0310002.  
Li J H, Wang X C. Analysis and Accuracy Evaluation of Scattering Characteristics of GF-3 Full-Polarized SAR [J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2020, 47(3): 0310002.
- [9] Liu K, Wang Y C, Lau D L, et al. Dual-frequency pattern scheme for high-speed 3-D shape measurement [J]. *Optics Express*, 2010, 18(5): 5229-5244.
- [10] Wei L, Qi W D, Xu Y Y, et al. Closed-form, robust and accurate multi-frequency phase unwrapping: frequency design and algorithm[J]. *Signal Processing*, 2017, 138: 159-166.
- [11] 肖焱山, 曹益平, 武迎春. 条纹投影轮廓术中新的相位高度映射算法[J]. *中国激光*, 2011, 38(12): 1208004.  
Xiao Y S, Cao Y P, Wu Y C. A new phase-to-height mapping algorithm in fringe projection profilometry[J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2011, 38(12): 1208004.
- [12] Zhang J M, Long J L, Xi J T, et al. Error analysis in the absolute phase maps recovered by fringe patterns with three different wavelengths[J]. *Journal of Modern Optics*, 2018, 65(3): 237-245.
- [13] Fan J P, Lu X X, Xu X F, et al. Simultaneous multi-wavelength phase-shifting interferometry based on principal component analysis with a color CMOS[J]. *Journal of Optics*, 2016, 18(5): 055703.
- [14] Estrada J C, Servin M, Vargas J. 2D simultaneous phase unwrapping and filtering: a review and comparison[J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2012, 50(8): 1026-1029.
- [15] Strand J, Taxt T. Performance evaluation of two-dimensional phase unwrapping algorithms[J]. *Applied Optics*, 1999, 38(20): 4333-4344.
- [16] Goldstein R M, Zebker H A, Werner C L. Satellite radar interferometry: two-dimensional phase unwrapping [J]. *Radio Science*, 1988, 23(4): 713-720.
- [17] Flynn T J. Two-dimensional phase unwrapping with minimum weighted discontinuity[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 1997, 14(10): 2692-2701.
- [18] Jian G. Reliability-map-guided phase unwrapping method [J]. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 2016, 13(5): 716-720.
- [19] Li L, Zheng Y, Yang K, et al. Modified three-wavelength phase unwrapping algorithm for dynamic three-dimensional shape measurement[J]. *Optics Communications*, 2021, 480: 126409.
- [20] Huang L, Yan L P, Chen B Y. Phase restoration of digital holographic microscopy with an adaptive reliability mask for phase unwrapping in microstructure testing[J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2021, 138: 106416.
- [21] Pritt M D, Shipman J S. Least-squares two-dimensional phase unwrapping using FFT's [J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 1994, 32(3): 706-708.
- [22] 戴思清, 豆嘉真, 张继巍, 等. 基于数字全息术的近场成像与应用[J]. *光学学报*, 2020, 40(1): 0111008.  
Dai S Q, Dou J Z, Zhang J W, et al. Digital holography based near-field imaging and its application[J]. *Acta Optica Sinica*, 2020, 40(1): 0111008.
- [23] Medhi B, Hegde G M, Gorthi S S, et al. Improved quantitative visualization of hypervelocity flow through wavefront estimation based on shadow casting of sinusoidal gratings[J]. *Applied Optics*, 2016, 55(22): 6060-6071.
- [24] 王华英, 刘佐强, 廖薇, 等. 基于最小范数的四种相位解包裹算法比较[J]. *中国激光*, 2014, 41(2): 0209016.  
Wang H Y, Liu Z Q, Liao W, et al. Comparison of four phases unwrapping algorithm based on method of minimum norm[J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2014, 41(2): 0209016.
- [25] Wang X, Fang S P, Zhu X D. Weighted least-squares phase unwrapping algorithm based on a non-interfering image of an object[J]. *Applied Optics*, 2017, 56(15): 4543-4550.
- [26] 冯方, 田爱玲, 刘丙才, 等. 基于数字全息扫描成像的划痕缺陷全场三维测试[J]. *中国激光*, 2020, 47(4): 0409003.  
Feng F, Tian A L, Liu B C, et al. Full-field three-dimensional test for scratch defects using digital

- holographic scanning imaging system[J]. Chinese Journal of Lasers, 2020, 47(4): 0409003.
- [27] Guo Y, Chen X T, Zhang T. Robust phase unwrapping algorithm based on least squares[J]. Optics and Lasers in Engineering, 2014, 63: 25-29.
- [28] Wang M M, Zhou C L, Si S C, et al. Robust wrapping-free phase retrieval method based on weighted least squares method[J]. Optics and Lasers in Engineering, 2017, 97: 34-40.
- [29] Ghiglia D C, Pritt M D. Two-dimensional phase unwrapping: theory, algorithms, and software[M]. New York: John Wiley & Sons, 1998: 178-215.
- [30] López-García L, García-Arellano A, Cruz-Santos W. Fast quality-guided phase unwrapping algorithm through a pruning strategy: applications in dynamic interferometry [J]. Applied Optics, 2018, 57(12): 3126-3133.
- [31] Kulkarni R, Rastogi P. Phase unwrapping algorithm using polynomial phase approximation and linear Kalman filter[J]. Applied Optics, 2018, 57(4): 702-708.
- [32] Zhang X L, Zhang X C, Xu M, et al. Phase unwrapping in digital holography based on non-subsampled contourlet transform[J]. Optics Communications, 2018, 407: 367-374.
- [33] Martínez-Carranza J, Falaggis K, Kozacki T. Fast and accurate phase-unwrapping algorithm based on the transport of intensity equation[J]. Applied Optics, 2017, 56(25): 7079-7088.
- [34] Pandey N, Ghosh A, Khare K. Two-dimensional phase unwrapping using the transport of intensity equation[J]. Applied Optics, 2016, 55(9): 2418-2425.
- [35] Zuo C, Chen Q, Qu W J, et al. Direct continuous phase demodulation in digital holography with use of the transport-of-intensity equation[J]. Optics Communications, 2013, 309: 221-226.
- [36] Volkov V V, Zhu Y, de Graef M. A new symmetrized solution for phase retrieval using the transport of intensity equation[J]. Micron, 2002, 33(5): 411-416.
- [37] Zuo C, Chen Q, Asundi A. Boundary-artifact-free phase retrieval with the transport of intensity equation: fast solution with use of discrete cosine transform[J]. Optics Express, 2014, 22(8): 9220-9244.
- [38] Zuo C, Chen Q, Li H R, et al. Boundary-artifact-free phase retrieval with the transport of intensity equation II: applications to Microlens characterization[J]. Optics Express, 2014, 22(15): 18310-18324.
- [39] Teague M R. Deterministic phase retrieval: a Green's function solution[J]. Journal of the Optical Society of America, 1983, 73(11): 1434-1441.
- [40] Streibl N. Phase imaging by the transport equation of intensity[J]. Optics Communications, 1984, 49(1): 6-10.
- [41] 张悦萌, 蔡萍, 隆军, 等. 多波长数字全息计量技术综述[J]. 激光与光电子学进展, 2020, 57(10): 100002. Zhang Y M, Cai P, Long J, et al. Review of multi-wavelength digital holography metrology[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2020, 57(10): 100002.
- [42] Wang H Y, Dong Z, Wang X, et al. Phase compensation in digital holographic microscopy using a quantitative evaluation metric[J]. Optics Communications, 2019, 430: 262-267.