

激光与光电子学进展

模式分解法在星间超远距离衍射传输仿真中的应用与分析

赵梦园^{1,2}, 马晓珊^{1*}, 彭晓东^{1,3}, 杨震¹, 张佳锋^{1,2}, 孟新¹

¹中国科学院国家空间科学中心复杂航天系统电子信息技术重点实验室, 北京 100190;

²中国科学院大学, 北京 100049;

³中国科学院大学杭州高等研究院基础物理与数学科学学院, 浙江 杭州 310024

摘要 星间超远距离传输仿真在精密激光测距任务中发挥着重要的作用。激光在星间的传输距离可达几百至百万公里量级, 由于探测过程中的波前像差和衍射效应, 无法直接采用经典高斯光束追迹的方法对其进行仿真。本文应用模式分解法对星间超远距离衍射传输进行仿真, 通过与解析解和夫琅禾费衍射积分计算结果的对比分析以验证仿真精度, 分析分解阶数、初始高斯光束腰半径与圆孔半径之比等参数对仿真精度的影响, 从而为空间精密激光测距任务仿真提供一种兼顾计算精度和效率的数值模拟方法。

关键词 衍射与光栅; 空间精密激光测距; 衍射传输; 模式分解法; 超远距离

中图分类号 O436.1

文献标志码 A

DOI: 10.3788/LOP202259.2105002

Application and Analysis of Mode Expansion Method in Simulation of Intersatellite Ultra-Long Distance Diffraction Propagation

Zhao Mengyuan^{1,2}, Ma Xiaoshan^{1*}, Peng Xiaodong^{1,3}, Yang Zhen¹,
Zhang Jiafeng^{1,2}, Meng Xin¹

¹Key Laboratory of Electronics and Information Technology for Space System, National Space Science Center, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;

²University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China;

³School of Fundamental Physics and Mathematical Sciences, Hangzhou Institute for Advanced Study, University of Chinese Academy of Sciences, Hangzhou 310024, Zhejiang, China

Abstract In high precision laser ranging, simulation of intersatellite ultra-long distance propagation plays a crucial role. The lasers' propagation distance between satellites takes hundreds to millions of kilometers; due to wavefront aberration and the diffraction effect in the detection approach, the lasers' propagation cannot be directly simulated using the classical Gaussian beam tracing approach. A mode expansion method is used in this study to simulate the ultra-long distance intersatellite diffraction propagation. The simulation accuracy is confirmed by comparing with the analytical approaches and Fraunhofer diffraction integral. The mode order influence and ratio of the initial Gaussian beam waist radius to the aperture radius on the simulation accuracy are examined. Thus, this numerical simulation approach with both computation accuracy and efficiency is offered for the high precision simulation laser ranging in space.

Key words diffraction and grating; high precision laser ranging in space; diffraction propagation; mode expansion method; ultra-long distance

1 引言

精密激光干涉测距技术在空间探测任务中的应用

日趋广泛, 比如重力场测量^[1]和空间引力波探测等^[2]。这些探测任务超高的测距精度要求^[3-4], 导致测量系统非常复杂, 技术挑战极大, 存在大量未彻底解决、甚至

收稿日期: 2021-09-25; 修回日期: 2021-10-26; 录用日期: 2021-11-02

基金项目: 国家重点研发计划(2020YFC2200100)

通信作者: *maxs@nssc.ac.cn

未发现的技术困难和风险,部分关键技术及指标难以地面试验验证,仿真工作对于任务论证、载荷设计、技术验证、科学运行均有重要意义。在探测过程中,激光经过光纤传输、受到有效孔径剪切或由于光学元件的波前像差等原因,可能使得波前偏离高斯分布或产生衍射效应^[5-6],无法直接采用经典高斯光束追迹的方法进行仿真。在空间超精密激光干涉测量系统中,干涉信号的计算需要确定经过超远距离衍射传输后激光的电场复振幅分布。因此,有必要开展任意波前的超远距离衍射传输仿真。

针对任意光束的传输仿真,最传统的计算方法是直接衍射积分法,但该方法不通用,仅在特殊的情况下才有解^[6]。20世纪70年代开始,基于将任意波前分解为一系列其他波前叠加的一类方法陆续被提出,包括模式分解法(MEM)^[5-6]、角谱分解法(ASD)^[7]以及高斯光束分解法(GBD)^[8],这类方法可以统称为波前分解法。其中,ASD利用快速傅里叶变换(FFT)将波前分解为平面波,通过逆FFT计算传播后的波前^[7]。GBD和MEM则分别将任意波前分解为多个基模高斯光束和高阶模式。近年来,上述方法在近场和几公里的远场范围得到了充分研究,例如文献[5]和[6]。对于重力场测量和引力波探测等空间超精密激光干涉测量系统,激光传输距离达到了几百甚至百万公里,属于任意光束超远距离传

输问题。针对这一问题,波前分解法的适用性和仿真精度有待充分评估。经过初步分析可知,ASD方法并不适用。原因在于该方法要求FFT窗口能够覆盖完整波前,而对于超远距离传输,找到恰当的窗口大小非常困难,GBD和MEM方法则不存在随着传输距离调整窗口的问题^[6]。GBD将任意波前分解的一系列基模高斯光束置于一定大小的网格之中,每个基模都位于网格的不同位置,在对基模进行光束追迹时可能出现传输方向不一致的问题。而MEM分解得到的模式在分解平面上具有相同的位置和传输方向,有效避免了上述问题。综上所述,本文将MEM应用于任意光束超远距离传输仿真,与解析方法和直接衍射积分的结果进行对比,并分析影响计算精度的关键参数,为空间超精密激光干涉测量系统仿真奠定基础。

2 模式分解法

任意波前可视为一系列完备且正交的基函数的叠加^[9]。基函数,又称为模式(mode)。这是MEM的基本原理^[5]。MEM采用的高阶模有埃尔米特-高斯模式(Hermite-Gaussian mode)和拉盖尔-高斯模式(Laguerre-Gaussian mode)。以埃尔米特-高斯模式为例,在直角坐标系下,该模式在空间中点 (x, y, z) 处的电场复振幅分布^[5]为

$$HG_{mn}(x, y, z, \omega_{0d}) = \frac{c_{mn}}{\omega(z)} H_m \left[\frac{\sqrt{2} x}{\omega(z)} \right] H_n \left[\frac{\sqrt{2} y}{\omega(z)} \right] \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{\omega^2(z)} \right] \cdot \exp \left[-ik \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} \right] + i(m+n+1)\eta(z), \quad (1)$$

$$c_{mn} = (\sqrt{\pi m! n! 2^{m+n-1}})^{-1}, \quad (2)$$

式中: m 和 n 分别为 x 轴和 y 轴方向上的索引; ω_{0d} 表示模式腰半径; c_{mn} 为归一化常数; $H(\cdot)$ 表示埃尔米特多项式; $k=2\pi/\lambda$ 表示波数, λ 为波长; $\eta(z)$ 是Gouy相移; $\omega(z)$ 和 $R(z)$ 分别表示模式的光斑半径和波前曲率半径。

根据MEM的基本原理,对于任意波前 $W(x, y)$,将其分解为各阶高阶模,传输一定距离 z 后,在与传输方向垂直的平面上叠加得到的电场分布 E_{MEM} ^[5]为

$$E_{MEM}(x, y, z) = \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^{N-m} a_{mn} HG_{mn}(x, y; 0, \omega_{0d}) \cdot \exp(-ikz), \quad (3)$$

式中: a_{mn} 是各模式对应的幅值; N 为模式分解阶数。确定各阶模所对应的幅值 a_{mn} 是MEM的关键,具体计算方法^[5]为

$$a_{mn} = \iint HG_{mn}(x, y; 0, \omega_{0d}) W^*(x, y) dx dy, \quad (4)$$

式中*表示共轭运算。从式(4)可以看出, a_{mn} 在分解平面上进行计算,取决于模式腰半径 ω_{0d} ,与传输距离无关^[5]。MEM的归一化均方误差 e_{ab} 可以按照下式进行计算^[10]:

$$e_{ab} = 1 - \frac{\sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^{N-m} a_{mn}^2}{2\pi \int_0^{R_a} W^2(r) r dr}, \quad (5)$$

式中: $W(r)$ 为由 $W(x, y)$ 从直角坐标系变换到极坐标系得到的任意波前电场复振幅分布; R_a 为圆孔半径。采用该误差,在给定分解阶数时,任意圆形对称波前在任意圆形孔径上发生剪切时最优模式腰半径 ω_{opt} ^[10-12]为

$$\omega_{opt} = R_a / \sqrt{N/2}, \quad (6)$$

基于该优化准则,可实现给定分解阶数下的最小误差,也即最高精度。

3 结果验证

3.1 高斯光束圆孔衍射

解析解是特定条件下的近似,比如经典的Campbell^[13]和Tanaka^[14]解析解,分别适用于高斯光束在菲涅耳和夫琅禾费区域的圆孔衍射问题。为验证MEM的准确性,采用与上述解析解同样的输入条件,将基于最优模式腰半径的MEM计算结果与解析解计算结果进行对比分析。

图1~6是分别采用MEM和解析解,计算腰半径为5 mm的圆形高斯光束发生圆孔衍射并传播一定距离,在垂直于传输方向的平面内、一定横向距离范围内的幅值、相位分布,以及MEM相对于解析解的误差。采用一定横向距离范围内的相对误差 e_{MEM} 定义^[6]为

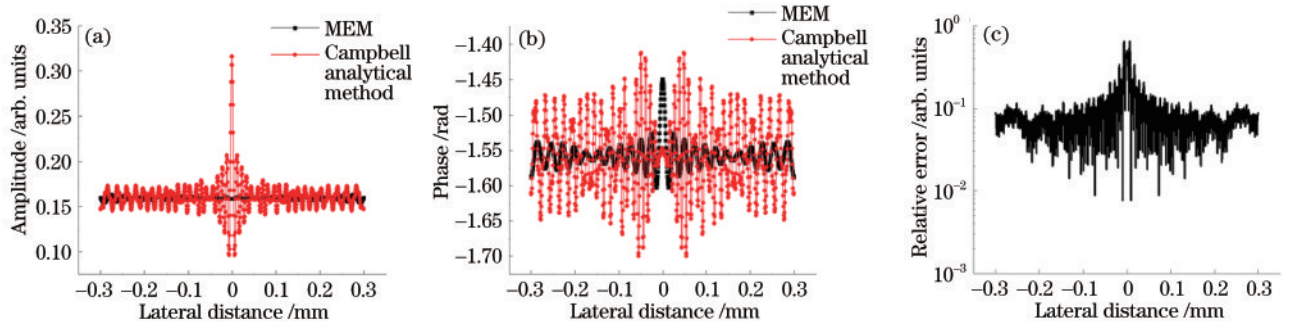


图 1 腰半径为 5 mm 的圆形高斯光束发生圆孔衍射后传播 5 mm 后,分别采用 MEM 和 Campbell 解析解计算得到的(a)幅值、(b)相位分布以及(c)相对误差

Fig. 1 (a) Amplitude, (b) phase and (c) relative error distributions calculated by MEM and Campbell analytical method of circular aperture diffraction of Gaussian beam with beam waist of 5 mm, and propagation distance is 5 mm

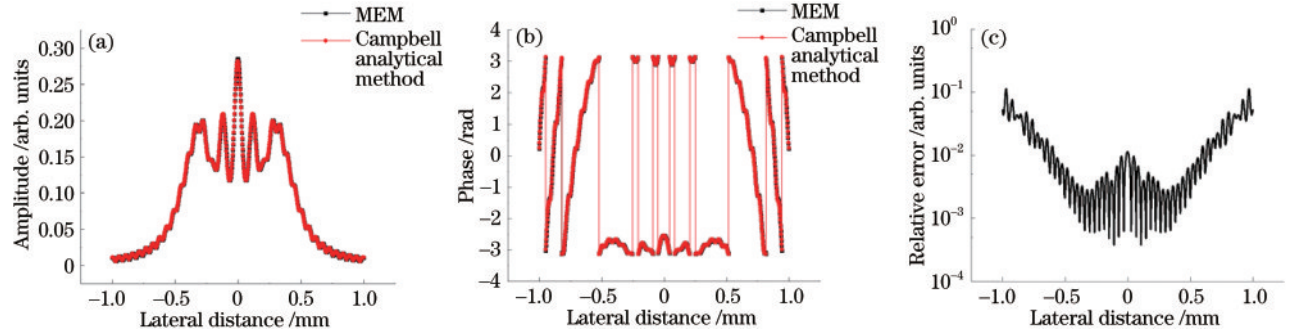


图 2 腰半径为 5 mm 的圆形高斯光束发生圆孔衍射后传播 50 mm 后,分别采用 MEM 和 Campbell 解析解计算得到的(a)幅值、(b)相位分布以及(c)相对误差

Fig. 2 (a) Amplitude, (b) phase and (c) relative error distributions calculated by MEM and Campbell analytical method of circular aperture diffraction of Gaussian beam with beam waist of 5 mm, and propagation distance is 50 mm

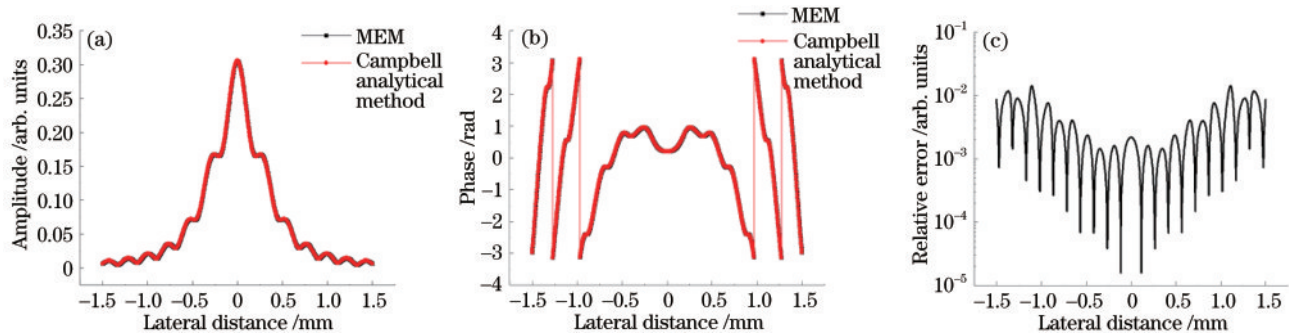


图 3 腰半径为 5 mm 的圆形高斯光束发生圆孔衍射后传播 200 mm 后,分别采用 MEM 和 Campbell 解析解计算得到的(a)幅值、(b)相位分布以及(c)相对误差

Fig. 3 (a) Amplitude, (b) phase and (c) relative error distributions calculated by MEM and Campbell analytical method of circular aperture diffraction of Gaussian beam with beam waist of 5 mm, and propagation distance is 200 mm

$$e_{MEM} = \left| \frac{E_a - E_{MEM}}{E_a} \right|, \quad (7)$$

式中, E_a 为解析解计算得到的电场复振幅分布,近场采用 Campbell 解析解,远场采用 Tanaka 解析解。仿真参数设置见表 1。

图 1~5 计算的传输距离分别是 5 mm、50 mm、200 mm、2 km、 2×10^6 km。其中,传输距离 5、50、200 mm 在近场范围内,2 km 和 2×10^6 km 在远场范围内,且 2×10^6 km 属于超远距离。综合这些结果可以

看出,随着传输距离增加,采用 MEM 的仿真结果与解析解之间的相对误差并非简单的线性变化。从图 1 可知,在距离圆孔较近的位置, MEM 相对于解析解的误差最大接近于 1,难以很好地描述衍射现象。这是因为在离圆孔很近时,衍射现象非常明显,表现为电场复振幅的高频振荡,难以用有限的阶数对这种现象进行模拟。随着传输距离增加, MEM 与解析解的相对误差逐渐减小,降至约 $10^{-5} \sim 10^{-1}$,如图 2 和图 3 所示,50 mm 和 200 mm 传输距离的最大相对误差分别约为 10% 和

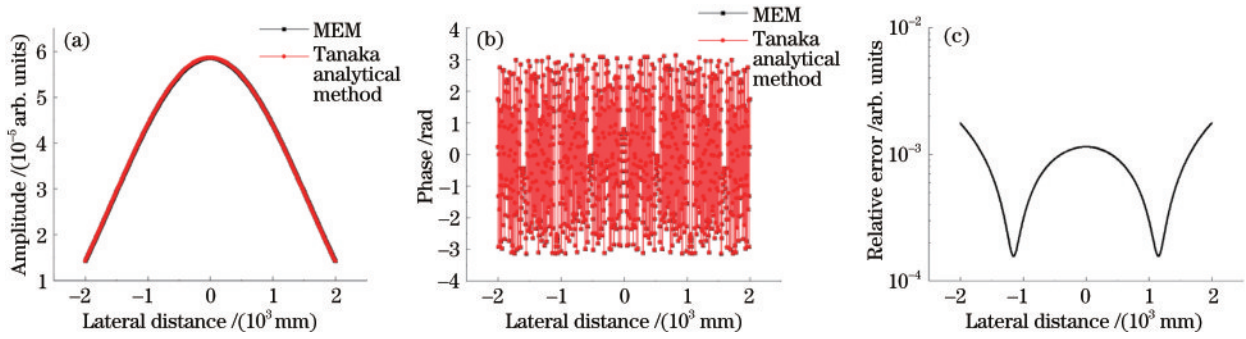


图 4 腰半径为 5 mm 的圆形高斯光束发生圆孔衍射后传播 2 km 后,分别采用 MEM 和 Tanaka 解析解计算得到的 (a) 幅值、(b) 相位分布以及 (c) 相对误差

Fig. 4 (a) Amplitude, (b) phase and (c) relative error distributions calculated by MEM and Tanaka analytical method of circular aperture diffraction of Gaussian beam with beam waist of 5 mm, and propagation distance is 2 km

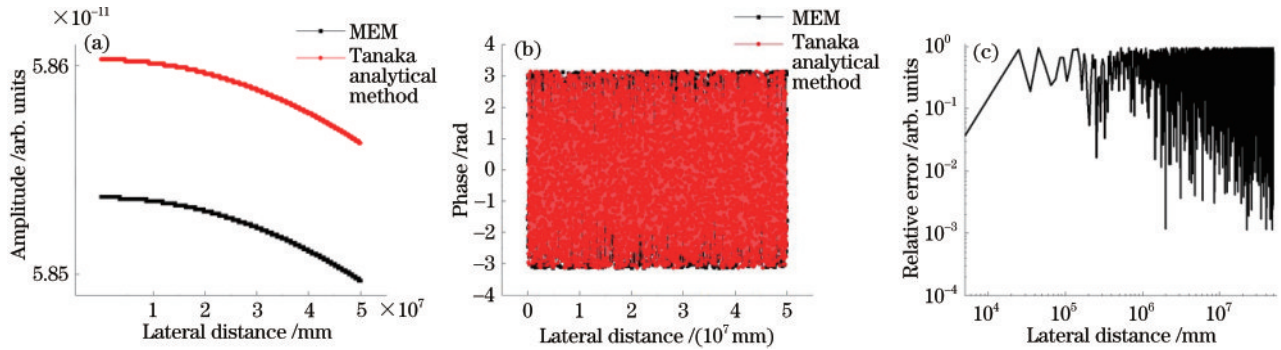


图 5 腰半径为 5 mm 的圆形高斯光束发生圆孔衍射后传播 2×10^6 km 后,分别采用 MEM 和 Tanaka 解析解计算得到的 (a) 幅值、(b) 相位分布以及 (c) 相对误差

Fig. 5 (a) Amplitude, (b) phase and (c) relative error distributions calculated by MEM and Tanaka analytical method of circular aperture diffraction of Gaussian beam with beam waist of 5 mm, and propagation distance is 2×10^6 km

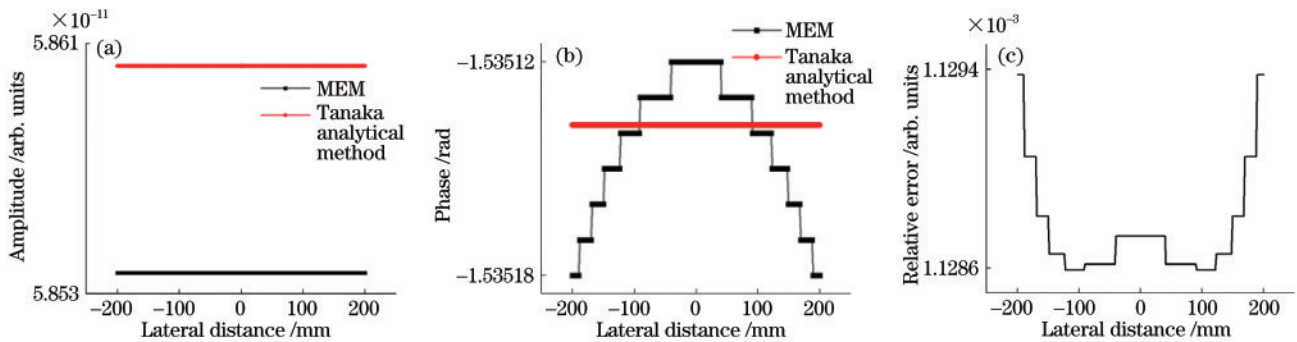


图 6 腰半径为 5 mm 的圆形高斯光束发生圆孔衍射后传播 2×10^6 km 后,分别采用 MEM 和 Tanaka 解析解计算得到的 (a) 幅值、(b) 相位分布以及 (c) 相对误差。其中横向范围为 $-20 \sim 20$ cm

Fig. 6 (a) Amplitude, (b) phase and (c) relative error distributions calculated by MEM and Tanaka analytical method of circular aperture diffraction of Gaussian beam with beam waist of 5 mm, and propagation distance is 2×10^6 km. Lateral range is from -20 cm to 20 cm

表 1 高斯光束圆孔衍射 MEM 参数设置

Table 1 Parameters for MEM of circular aperture diffraction of Gaussian beam

Parameter	Value
Gaussian beam waist	5.0 mm
Distance to beam waist	0
Aperture radius	0.5 mm
Distance between beam origin and aperture center	0
Mode order	100
Propagation distance after decomposing	near field: 5 mm, 50 mm, 200 mm far field: 2 km, 2×10^6 km

1%。当光束传输到远场时,最大相对误差持续下降,小于1%,但最小相对误差略有增加,如图4所示。当衍射光束传输 2×10^6 km后,光束扩展至几十公里的横向范围,MEM仿真得到的电场复振幅分布与解析解相比有较大误差,如图5所示。这是由于有限的分解阶数难以精确覆盖如此大的空间范围而导致的计算误差。在实际的空间应用中,通常以望远镜作为接收单元,空间资源限制了望远镜的接收口径,以激光干涉空间天线(LISA)类空间引力波探测计划为例,接收孔径不超过40 cm^[15],因此在 $-20 \sim 20$ cm的横向范围内进行分析,从图6中可以看出,在该范围内的相对误差量级为 10^{-3} 。

为进一步评估MEM在百万公里传输距离的计算

精度,针对高斯光束圆孔衍射,采用直接求解夫琅禾费衍射积分的方法^[16]与其进行比较。夫琅禾费衍射积分定义^[16]为

$$E(x, y, z) = -\frac{i}{\lambda z} e^{ik\left(\frac{x^2+y^2}{2z} + z\right)} \iint_{\Sigma} E(x_0, y_0, 0) e^{ik\frac{xx_0 + yy_0}{z}} dx_0 dy_0, \quad (8)$$

式中 $E(x_0, y_0, 0)$ 表示圆孔平面的电场分布。该衍射积分的适用条件为 $z \gg (x-x_0^2) + (y-y_0^2)$ 并且 $0.5k(x_0^2 + y_0^2) \ll z$ ^[17],显然百万公里的传输距离能够满足上述条件。MEM和夫琅禾费衍射的计算结果如图7所示。其中初始高斯光束和MEM的参数同表1。

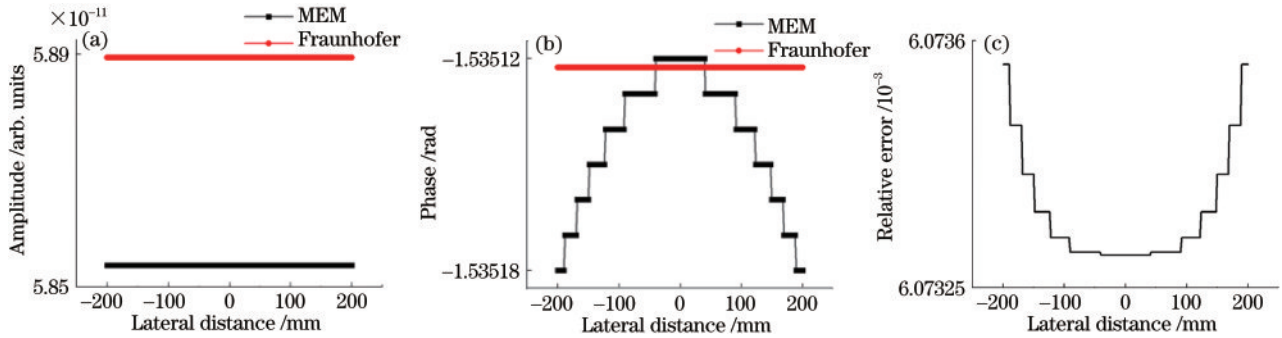


图7 腰半径为5 mm的高斯光束发生圆孔衍射后传输 2×10^6 km,分别采用MEM和夫琅禾费衍射积分计算得到的(a)幅值、(b)相位分布,以及(c)相对误差。其中横向范围为 $-20 \sim 20$ cm

Fig 7 (a) Amplitude, (b) phase and (c) relative error distributions calculated by MEM and Fraunhofer diffraction integral of circular aperture diffraction of Gaussian beam with beam waist of 5 mm, and propagation distance is 2×10^6 km. Lateral range is from -20 cm to 20 cm

当传输距离为 2×10^6 km时,在 $-20 \sim 20$ cm的横向范围内,虽然从图7中可以看出MEM和夫琅禾费衍射积分的计算结果之间存在一定差距,但实际上该差距是从小数点几位后开始出现的,此时相对误差量级为 10^{-3} ,与MEM和解析解之间相对误差的量级相同。综合上述对比结果可以看出:对于高斯光束圆孔衍射,基于最优模式腰半径的MEM在模拟百万公里超远距离激光传输时,具有与解析解和夫琅禾费衍射积分同样的模拟精度。

3.2 任意波前圆孔衍射

上述结果验证针对的是高斯光束圆孔衍射。在实际应用中,望远镜、光纤等光学器件的像差使得激光波前偏离高斯分布成为任意波前,此时的激光传输不能仅用高斯光束圆孔衍射来描述,Campbell和Tanaka等解析解不再适用。为了验证MEM在这种情况下的准确性,将其与该任意波前的夫琅禾费衍射积分计算结果进行对比。

望远镜的波前像差可以用Zernike多项式表示,加入该像差后的光束电场复振幅分布 E_a ^[18]为

$$E_a(x, y, z) = E_g(x, y, z) \exp[i\Delta Z(x, y)], \quad (9)$$

式中, $E_g(x, y, z)$ 表示高斯光束的电场复振幅分布; $\Delta Z(x, y)$ 表示直角坐标系下的Zernike像差,按照下式进行计算^[18]:

$$\Delta Z(x, y) = \sum_{i=0}^M a_i z_i(x, y), \quad (10)$$

式中: a_i 为第*i*阶Zernike多项式的系数; $z_i(x, y)$ 表示第*i*阶Zernike多项式。本文中采用的系数取值及对应的Zernike多项式的形式见表2。

表2 Zernike多项式及其系数

Table 2 Zernike polynomials and their coefficients

Index <i>i</i>	Coefficient a_i	Zernike polynomial $z_i(r, \theta)$
0	0	1
1	0	$2r \cos \theta$
2	-0.0043	$2r \sin \theta$
3	-0.0006	$\sqrt{3}(2r^2 - 1)$
4	-0.0036	$\sqrt{6} r^2 \cos 2\theta$
5	0	$\sqrt{6} r^2 \sin 2\theta$
6	0	$\sqrt{8}(3r^3 - 2r) \cos \theta$
7	-0.0015	$\sqrt{8}(3r^3 - 2r) \sin \theta$
8	0.0040	$\sqrt{5}(6r^4 - 6r^2 + 1) \sin \theta$
9	0	$\sqrt{8} r^3 \cos 3\theta$
10	-0.0027	$\sqrt{8} r^3 \sin 3\theta$
11	-0.0015	$\sqrt{10}(4r^4 - 3r^3) \cos 2\theta$
12	0	$\sqrt{10}(4r^4 - 3r^3) \sin 2\theta$
13	0	$\sqrt{10} r^4 \cos 4\theta$
14	0.0004	$\sqrt{10} r^4 \sin 4\theta$

表格中的 Zernike 多项式 $z_i(r, \theta)$ 可参考文献[19], 该多项式是极坐标系下的形式, 计算时需要先转换到直角坐标系下。按照上表计算得到的 $\Delta Z(x, y)$ 在口径 40 cm 的望远镜平面上的分布如图 8 所示。

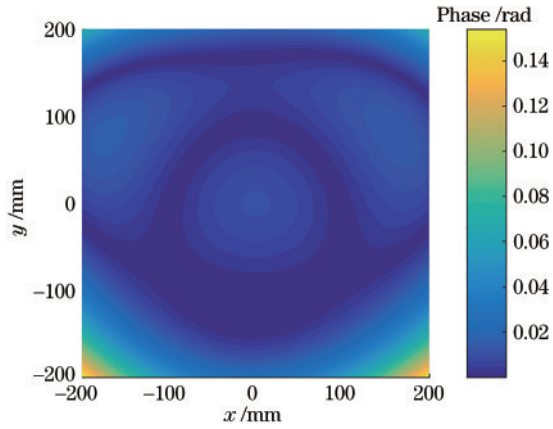


图 8 望远镜波前像差分布
Fig. 8 Wavefront error distribution of telescope

将图 8 所示的波前像差加入高斯光束后, 分别采用 MEM 和夫琅禾费衍射积分计算此时的光束发生圆孔衍射并传输 2×10^6 km 的幅值和相位分布。仿真参数设置见表 3。计算结果分别如图 9 和图 10 所示。

表 3 附加波前像差的高斯光束圆孔衍射 MEM 参数设置
Table 3 Parameters for MEM of circular aperture diffraction of Gaussian beam with additional wavefront error

Parameters	Value
Gaussian beam waist	200 mm
Distance to beam waist	0
Aperture radius	200 mm
Distance between beam origin and aperture center	0
Mode order	50
Propagation distances after decomposing	2×10^6 km

通过对比 MEM 和夫琅禾费衍射积分的计算数值后可以看出, 当计算结果保留 15 位小数时, 对于幅值, 在 10^{-7} 数量级下, 二者从小数点后第 2 位开始出现差异。

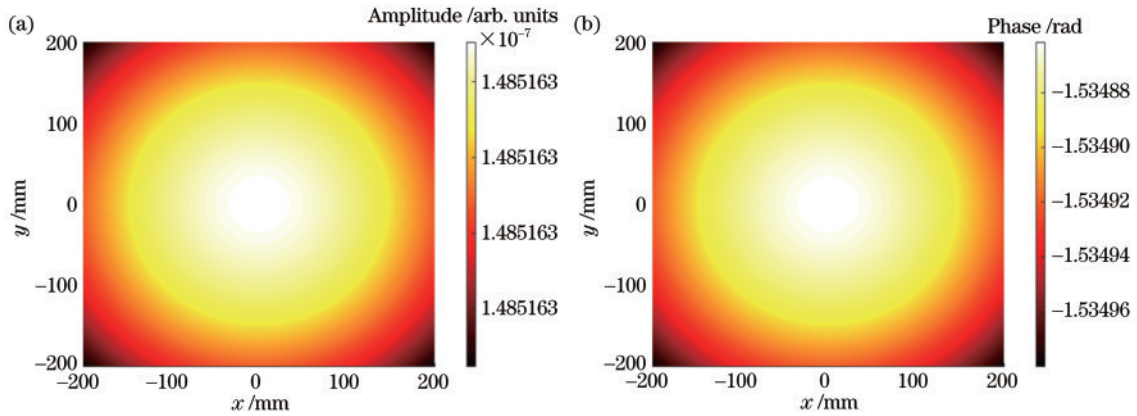


图 9 加入望远镜波前像差后的高斯光束发生圆孔衍射后, 传输 2×10^6 km, 在 $-20 \sim 20$ cm 范围内横截面上由 MEM 计算得到的 (a) 幅值和 (b) 相位分布
Fig. 9 (a) Amplitude and (b) phase distribution calculated by MEM in cross section of circular diffraction of Gaussian beam with additional wavefront error. Propagation distance is 2×10^6 km and range of cross section is from -20 cm to 20 cm

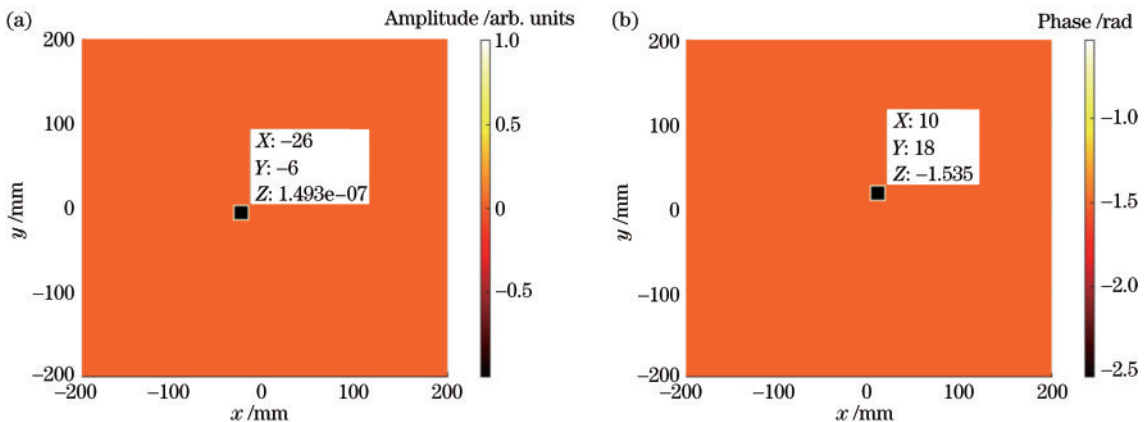


图 10 加入望远镜波前像差后的高斯光束发生圆孔衍射后, 传输 2×10^6 km, 在 $-20 \sim 20$ cm 范围内横截面上由夫琅禾费衍射积分计算得到的 (a) 幅值和 (b) 相位分布
Fig. 10 (a) Amplitude and (b) phase distribution calculated by Fraunhofer diffraction integral in cross section of circular diffraction of Gaussian beam with additional wavefront error. Propagation distance is 2×10^6 km and range of cross section is from -20 cm to 20 cm

对于相位,则是从小数点后第3位开始,且夫琅禾费衍射积分计算结果的相位部分仅在最后两位小数处有微小变化。对这种现象进行分析,可能的原因是此时夫琅禾费衍射积分的数值计算精度有限。由此初步推断, MEM可以满足加入波前像差的高斯光束圆孔衍射的仿真要求,后续还需要对加入波前像差的高斯光束圆孔衍射百万公里传输采用MEM的计算精度进一步评估。

4 关键参数分析

MEM的计算精度受模式腰半径、分解阶数、圆孔半径和传输距离等因素的影响。由于任意波前难以得到通用形式,因此本文在固定传输距离的情况下,重点分析初始高斯光束腰半径与圆孔半径的比值 w_0/R_a 以及分解阶数对计算精度的影响。设置不同的 w_0/R_a 值和不同的分解阶数,对比MEM计算结果与Tanaka解析解和夫琅禾费衍射积分之间的相对误差,参数取值见表4。图11(a)和11(b)分别为当分解阶数取100

表4 不同高斯光束腰半径与圆孔半径的比值 w_0/R_a 和分解阶数
Table 4 Parameters for incoming Gaussian beams with different w_0/R_a , and mode order

Parameter	Value
w_0/R_a	50, 10, 1
Propagation distances after decomposing	2×10^6 km
Mode order	50, 100, 150

时, w_0/R_a 分别取 50、10、1, MEM 和 Tanaka 解析解、夫琅禾费衍射积分之间的相对误差在横向范围 $-20 \sim 20$ cm 内的分布。图12(a)和12(b)分别为当 w_0/R_a 取 10, 分解阶数分别取 50、100、150, MEM 和 Tanaka 解析解、夫琅禾费衍射积分之间的相对误差在横向范围 $-20 \sim 20$ cm 内的分布,其中模式腰半径根据式(6)进行设置。

从图11可知,当分解阶数一定时,无论是和Tanaka解析解还是和夫琅禾费衍射积分相比,相对误

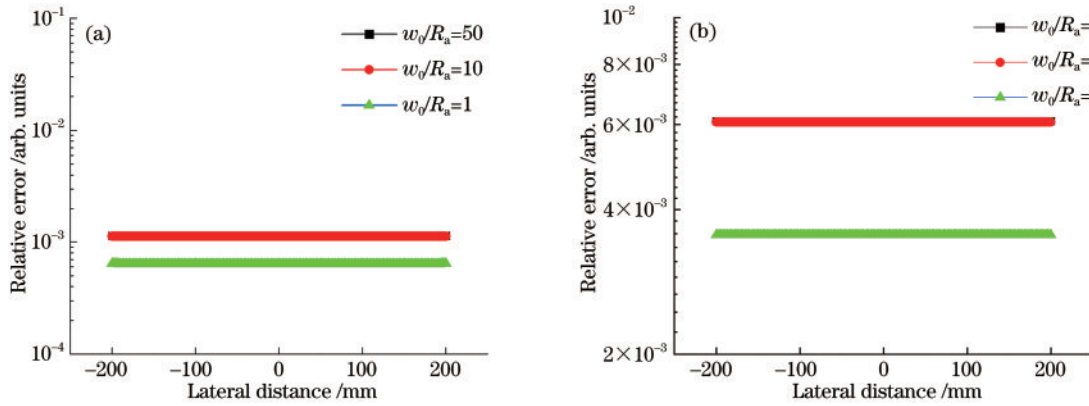


图11 当分解阶数取100, w_0/R_a 分别取 50、10、1 时, MEM 和 Tanaka 解析解、夫琅禾费衍射积分之间的相对误差在横向范围 $-20 \sim 20$ cm 内的分布。(a) MEM 和 Tanaka 解析解之间的相对误差; (b) MEM 和夫琅禾费衍射积分之间的相对误差

Fig 11 Relative error distribution between MEM and Tanaka analytical method or Fraunhofer integral when the mode order is 100 and w_0/R_a is 50, 10, and 1 respectively. Lateral range is $-20 \sim 20$ cm. (a) Relative error between MEM and Tanaka analytical method; (b) relative error between MEM and Fraunhofer integral

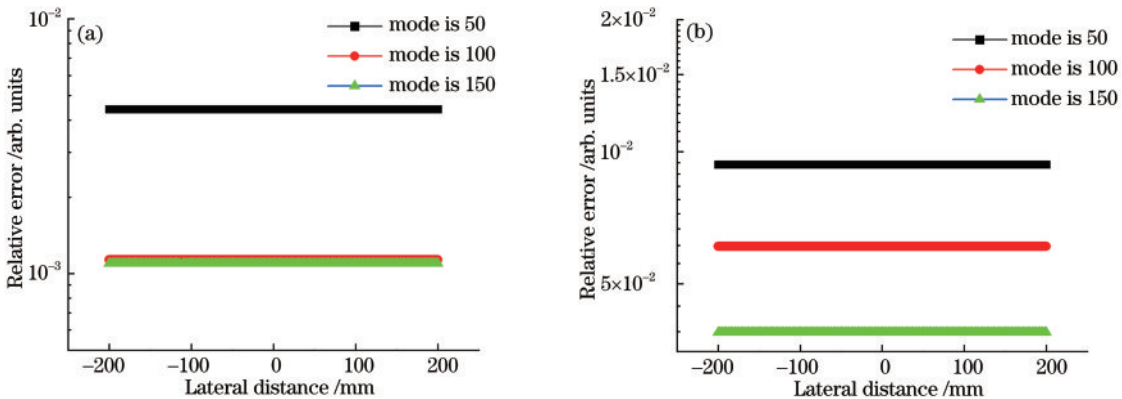


图12 当 w_0/R_a 取 10, 分解阶数分别 50、100、150 时, MEM 和 Tanaka 解析解、夫琅禾费衍射积分之间的相对误差在横向范围 $-20 \sim 20$ cm 内的分布。(a) MEM 和 Tanaka 解析解之间的相对误差; (b) MEM 和夫琅禾费衍射积分之间的相对误差

Fig 12 Relative error distribution between MEM and Tanaka analytical method or Fraunhofer integral when w_0/R_a is 10 and mode order is 50, 100, and 150 respectively. Lateral range is $-20 \sim 20$ cm. (a) Relative error between MEM and Tanaka analytical method; (b) relative error between MEM and Fraunhofer integral

差在 $w_0/R_a=50$ 和 10 处相差不大, 在 $w_0/R_a=1$ 时有明显下降, 但都在 10^{-3} 量级。原因在于, 虽然 $w_0/R_a=50$ 和 10 时光束的剪切程度更大, 衍射效应更强, 但经过 2×10^6 km 的传输, 光束扩展至几十公里的横向范围, 这种强衍射效应也逐渐减弱, 因此对于不同剪切程度的高斯光束在横向范围 $-20 \sim 20$ cm 内的相对误差没有数量级的差异。

理论上当分解阶数趋于无穷大时, MEM 的结果趋于精确解。但实际上分解阶数仅能取有限值, 而且计算时间会随着阶数的提高明显增加, 因此在选择分解阶数时需要平衡相对误差和计算时间。通过图 12 可以发现, 当 w_0/R_a 一定时, 相对误差随分解阶数的上升而下降, 这与理论相符。分解阶数为 50 和 150 时, 相对误差的数量级都在 10^{-3} , 说明即使大幅提高分解阶数, 极大增加计算复杂度, 并不能显著提高计算精度。这一结果说明, 对于百万公里超远距离激光传输仿真, 即使采用较低的分解阶数, 也能够计算精度和计算效率之间达到较好平衡。

5 结 论

本文应用 MEM 开展了超远距离激光衍射传输仿真, 分别针对高斯光束和任意波前光束的圆孔衍射, 通过对比分析 MEM 与解析解和夫琅禾费衍射积分的计算结果, 验证 MEM 方法的计算精度; 综合分析了分解阶数、腰半径与圆孔半径的比值等参数对 MEM 计算精度的影响, 从而在较低的分解阶数下, 实现任意波前超远距离衍射传输高精度仿真。

此外值得注意的是, 本文对 MEM 计算精度的验证是通过解析解和衍射积分开展的, 为了进一步评估其仿真精度, 可采用更为有效的实验验证手段。通过在实验室搭建光学平台开展激光衍射传输实验, 将 MEM 仿真结果与实验结果进行对比验证, 这将是后续的研究重点。

参 考 文 献

- [1] 王芸, 林翎凌, 郭忠凯, 等. 空间应用激光干涉测距技术发展综述[J]. 航天返回与遥感, 2021, 42(2): 68-78.
Wang Y, Lin X L, Guo Z K, et al. Review of high precision distance metrology in space applications[J]. Spacecraft Recovery & Remote Sensing, 2021, 42(2): 68-78.
- [2] 罗子人, 张敏, 靳刚, 等. 中国空间引力波探测“太极计划”及“太极 1 号”在轨测试[J]. 深空探测学报, 2020, 7(1): 3-10.
Luo Z R, Zhang M, Jin G, et al. Introduction of Chinese space-borne gravitational wave detection program “Taiji” and “Taiji-1” satellite mission[J]. Journal of Deep Space Exploration, 2020, 7(1): 3-10.
- [3] Darbeheshti N, Wegener H, Müller V, et al. Instrument data simulations for GRACE Follow-on: observation and noise models[J]. Earth System Science Data, 2017, 9(2): 833-848.
- [4] Wanner G. Complex optical systems in space: numerical

modelling of the heterodyne interferometry of LISA Pathfinder and LISA[D]. Hannover: Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover, 2010: 1-21.

- [5] Mahrtdt C. Laser link acquisition for the GRACE follow-on laser ranging interferometer[D]. Hannover: Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover, 2014: 12-59.
- [6] Schuster S. Tilt-to-length coupling and diffraction aspects in satellite interferometry[D]. Hannover: Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover, 2017: 147-163.
- [7] Qiu J C, Shen J Q. Beam shape coefficient calculation for a Gaussian beam: localized approximation, quadrature and angular spectrum decomposition methods[J]. Applied Optics, 2018, 57(2): 302-313.
- [8] Worku N G, Gross H. Propagation of truncated Gaussian beams and their application in modeling sharp-edge diffraction[J]. Journal of the Optical Society of America A, 2019, 36(5): 859-868.
- [9] Bond C, Brown D, Freise A, et al. Interferometer techniques for gravitational-wave detection[J]. Living Reviews in Relativity, 2016, 19(1): 3.
- [10] Borghi R, Gori F, Santarsiero M. Optimization of Laguerre-Gauss truncated series[J]. Optics Communications, 1996, 125(4/5/6): 197-203.
- [11] 颜蓉, 马善钧, 吕百达. 拉盖尔-高斯截断级数展开法的应用[J]. 强激光与粒子束, 2006, 18(6): 931-934.
Yan R, Ma S J, Lü B D. Application of Laguerre-Gauss truncated series expansion[J]. High Power Laser and Particle Beams, 2006, 18(6): 931-934.
- [12] Liu Y X, Lü B D. Truncated Hermite-Gauss series expansion and its application[J]. Optik, 2006, 117(9): 437-442.
- [13] Campbell C. Fresnel diffraction of Gaussian laser beams by circular apertures[J]. Optical Engineering, 1987, 26: 270-275.
- [14] Tanaka K, Saga N, Mizokami H. Field spread of a diffracted Gaussian beam through a circular aperture[J]. Applied Optics, 1985, 24(8): 1102.
- [15] 王智, 沙巍, 陈哲, 等. 空间引力波探测望远镜初步设计与分析[J]. 中国光学, 2018, 11(1): 131-151.
Wang Z, Sha W, Chen Z, et al. Preliminary design and analysis of telescope for space gravitational wave detection[J]. Chinese Optics, 2018, 11(1): 131-151.
- [16] Wang Z, Yu T, Zhao Y, et al. Research on telescope TTL coupling noise in intersatellite laser interferometry[J]. Photonic Sensors, 2020, 10(3): 265-274.
- [17] 刘良清. Matlab 辅助激光光学分析与应用[EB/OL]. (2014-05-12)[2021-03-10]. <https://www.doc88.com/p-5137813511582.html>.
Liu L Q. Matlab aided laser optical analysis and application[EB/OL]. (2014-05-12)[2021-03-10]. <https://www.doc88.com/p-5137813511582.html>.
- [18] Bhatia A B, Wolf E. On the circle polynomials of Zernike and related orthogonal sets[J]. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1954, 50(1): 40-48.
- [19] Genberg V L, Michels G J, Doyle K B. Orthogonality of Zernike polynomials[J]. Proceedings of SPIE, 2002, 4771: 276-286.