

分段线性 Morse 理论支持下的三维点云 拓扑特征提取与简化

韦永昱, 张春亢*, 邵小美, 吉雨田, 尹耀

贵州大学矿业学院, 贵州 贵阳 550025

摘要 针对目前基于 Morse 理论的三维点云拓扑特征提取算法难以删除“伪特征”点, 简化后存在噪声特征线的问题, 提出了一种基于分段线性 Morse 理论的三维点云特征提取与简化算法。首先计算函数指标, 对特征点进行提取, 以各特征点为顶点所包含的三角形为一个集合, 计算该集合中两两相邻的三角形法向量的点积, 将其最大值作为该点权重, 并设置合适的阈值去除“伪特征”点; 其次通过特征点生成特征线, 完成下降 Morse 复形的构建; 最后选择特征线上不同点的函数指标值, 分别计算持续值和考虑特征线实际留存价值的保留系数, 两者结合对原有“持续值”法进行改进, 得到新的特征线重要性度量指标, 并基于该指标实现对三维点云拓扑特征的简化与表达。结果表明, 相较其他算法, 所提特征提取算法显著减少了“伪特征”点提取, 使下降 Morse 复形构建的时间效率提高了 70.37%, 点云压缩率提高了 22.48%。新的特征线重要性度量方法能获取更简洁、连续且结构完整的特征线, 且特征提取与简化过程表现出较强的抗噪性。

关键词 分段线性 Morse 理论; 权重计算; 保留系数; 拓扑简化; 三维点云

中图分类号 P208

文献标志码 A

DOI: 10.3788/LOP202259.1828005

Extraction and Simplification of three-dimensional Point Cloud Topological Features Using Piecewise Linear Morse Theory

Wei Yongyu, Zhang Chunkang*, Shao Xiaomei, Ji Yutian, Yin Yao

College of Mining, Guizhou University, Guiyang 550025, Guizhou, China

Abstract In this paper, we proposed a feature extraction and simplification algorithm for three-dimensional (3D) point cloud based on piecewise linear Morse theory to solve problems in difficultly deleting pseudo feature points, and generating noise characteristic lines after simplification of existing 3D point cloud topological feature extraction algorithms based on Morse theory. First, we calculated the function index to extract the feature points. Regarding the triangles comprising each feature points as a collection, we calculated the dot product of the normal vectors of two adjacent triangles in the collection. Herein, the dot product maximum was considered the weight of the point, and the appropriate threshold was set to remove the pseudo feature points. Second, feature lines were produced by connecting feature points to complete the construction of descending Morse complex. Finally, the persistence and the retention index considering the actual retention value of the feature lines were calculated, respectively, by choosing the function index value of different points on the feature lines. With both indexes, the origin persistence method can be improved to attain a new feature line measurement index and the simplification and expression of 3D point cloud topological feature can be accomplished. The results show that, compared with other algorithms, the proposed feature extraction algorithm significantly reduces pseudo feature points. Furthermore, the time efficiency of the proposed algorithm for constructing the descending Morse complex increases by 70.37%, and the point cloud compression rate increases 22.48%. Additionally, the new importance measurement method for feature lines attains more concise, continuous, and structural complete feature lines, and the feature extraction and simplification processes show strong anti-noise performance.

Key words piecewise linear Morse theory; weight calculation; retention index; topology simplification; 3D point cloud

收稿日期: 2021-06-30; 修回日期: 2021-07-28; 录用日期: 2021-08-25

基金项目: 国家自然科学基金(41701464)、贵州大学培育项目(贵大培育[2019]26号)、贵州省科技计划(黔科合平台人才[2017]5788)、贵州省矿山动力灾害预警与控制技术科技创新人才团队项目(黔科合平台人才[2019]5619)

通信作者: *chkang_chd@163.com

1 引言

随着三维激光扫描技术的飞速发展,点云数据的处理受到广泛的关注,其中三维点云特征的描述与提取是点云数据处理中最基础也是最关键的一部分^[1]。与现有的模型特征提取方法比较,Morse理论有更严谨的数学理论基础,保证了模型拓扑特征提取算法的鲁棒性,基于其提取的模型拓扑特征具有严格的完整性和一致性。经典Morse理论广泛应用于医学影像分析^[2]、地表分析^[3]、空间热点分析^[4]等科学问题。但经典Morse理论对流形表面的连续性有一定要求,难以将其用于离散数据的研究与应用中。为此,Banchoff^[5-6]提出了分段线性Morse理论,该理论有效弥补经典Morse理论的空间连续性带来的不足,为拓扑数据的同源性分析提供了理论支撑^[7]。

目前已有学者将Morse理论用于对三维点云模型的拓扑特征精确提取、表达和建模。如文献[8]基于Morse理论对离散梯度进行扩展,多尺度地判定一点是否为特征点,但表面过于粗糙的模型会提取出过多的特征点。文献[9]在连续框架下不需要经过简化的步骤就可以得到较精准的特征点,但特征点提取阶段涉及方程组的阶数较高。然而基于Morse理论的拓扑特征提取与简化是一种非常耗时的拓扑模型构建理论与算法^[10],不必要甚至错误的特征即“伪特征”点的提取与简化消耗了大量不必要时间。提取特征点后,文献[11]构建了三维模型的Morse-Smale(MS)复形,并以“持续值”为显著度度量指标,通过“同态收缩算法^[12]”完成简化。文献[13-14]先提取MS复形,并分别以“关键线持续值”和线的显著度度量指标完成简化。这两种度量算法是基于MS复形对偶性的,在对具有微观度量指标的三维点云提取MS复形时,提取的特征线会存在噪声。文献[15]基于Morse理论相关算法过滤鞍点,实现“伪特征”点的删除和过度特征保护,但提出的利用特征线重要性度量方法进行简化后的模型存在少量噪声特征线。而模型简化的目的在于简化点云冗余数据或噪声的同时保留模型的几何特征^[16]。

针对现有特征提取算法存在对“伪特征”点的提取问题,本文对特征点进行权重计算并设置合适阈值得到精确特征点。针对目前模型简化存在的噪声特征线的问题,在考虑特征线实际留存价值的基础上,对“持续值”法进行改进,重新定义了特征线的重要性度量指标,并基于其实现拓扑特征简化与多层次表达。

2 特征点的提取与权重计算

2.1 指标函数计算与特征点判别

三角网格表达的三维空间表面模型在进行特征识别与提取时,法向量和曲率是描述平面几何特征的关键^[17],但法向量的计算更简单高效^[18]。如图1所示,将网格中各顶点 P_i 的单位法向量与 P_i 的所有相邻点的单

位法向量夹角的平均值作为判别特征点所需的显著性度量指标,称指标函数,计算公式为

$$h(P_i) = \frac{\sum_{j=1}^k \theta_{ij}}{k}, \quad (1)$$

式中: k 为以 P_i 为顶点的三角形数; θ_{ij} 为顶点 P_i 与其邻点的法向量夹角。

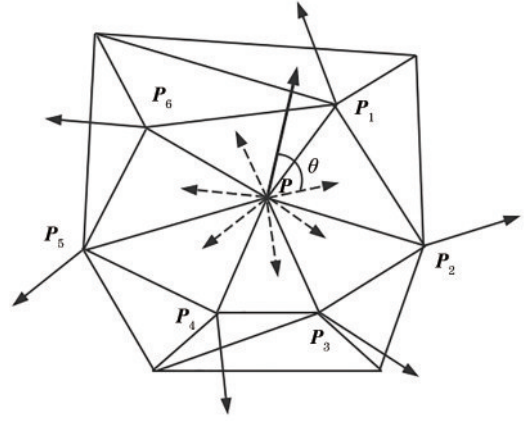


图1 指标函数计算

Fig. 1 Computation of index function

θ_{ij} 计算步骤如下。

1) 计算三角网格模型中每一个三角面片的权重,公式为

$$W_{ij} = \frac{1}{\|g^j - P_i\|}, \quad (2)$$

式中: g^j 为第 j 个三角形的重心坐标。

2) 计算顶点 P_i 的单位法向量的公式为

$$n_i = \frac{\sum_{j=1}^k W_{ij} \cdot n_j}{\left\| \sum_{j=1}^k W_{ij} \cdot n_j \right\|}. \quad (3)$$

3) 记两个向量分别为 $n_i = (x_i, y_i, z_i)$, $n_j = (x_j, y_j, z_j)$,则两点之间的法向量夹角 θ_{ij} 为

$$\theta_{ij} = \arccos \frac{x_i \cdot x_j + y_i \cdot y_j + z_i \cdot z_j}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2} \cdot \sqrt{x_j^2 + y_j^2 + z_j^2}}. \quad (4)$$

设函数 $f(x, y)$ 是定义在二维光滑流形 M 上的二阶可微函数,函数 f 的梯度为

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right). \quad (5)$$

对于一点 P ,若式(5)中的两个分量均为零,则点 P 称为 f 的特征点,特征点可分为极小点、鞍点和极大点3种基本类型,否则该点称为正则点^[9]。目前,基于分段线性Morse理论提取点云模型中特征点的方法主要有:基于三角网的邻点比较法^[19-20]、基于规则网格的邻点比较法^[21-22]和曲面拟合法^[23]。其中基于三角网的邻点比较法简单,是目前提取特征点较为常用的方法,故

采用基于三角网格的相邻比较法。

2.2 特征点的权重计算

以分段线性 Morse 理论为基础对特征点初次提取时,由于算法的敏感性和点云的非规则分布特性,提取出一定数量的“伪特征”点。在构建 Morse 复形前,对特征点进行权重计算,通过设置阈值挑选出精确特征点来反映模型的主要特征并保留轮廓结构。

权重值反映某一特征点的权重,设定权重范围 $W_{ij} \in [0, 1]$,通常将位于边界和角等特征变化明显区域的特征点保留,即赋予较大的权重;光滑或平坦区域中的特征点删除,即赋予较小的权重。此外,由于边界是保持模型轮廓的重要保证,对于边界顶点,权重应为最大值。如图 2 所示,对于三维网格中的每个顶点 P_i ,周围有一组把该点包围的三角形 $T_S = \{t_0, t_1, \dots, t_k\}$,即 T_S 中所有的三角形都包含顶点 P_i 。假设两个三角形 t_i 和 t_j 是相邻的,定义其权重为

$$W_{ij} = \frac{1 - \text{dot}(\mathbf{n}_i, \mathbf{n}_j)}{2}, \quad (6)$$

式中: \mathbf{n}_i 和 \mathbf{n}_j 分别为三角形 t_i 和 t_j 的归一化法向量。顶点 P_i 的权重表示为

$$\begin{cases} W = \max\{W_{ij}\} \\ i \neq j \\ i, j \in (0, k) \end{cases}. \quad (7)$$

3 拓扑简化

3.1 拓扑简化原理

按起始于鞍点、终止于极值点的寻径算法将特征

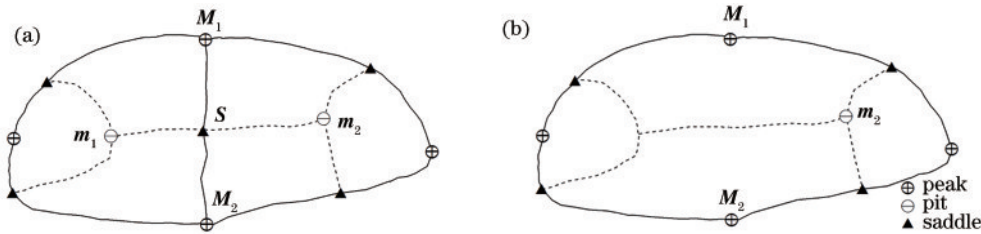


图 3 同态收缩简化方法。(a) 简化前; (b) 简化后

Fig. 3 Homomorphic shrinkage algorithm. (a) Before simplification; (b) after simplification

3.2 特征线重要性度量

文献[13]中的衡量特征线重要性的方法称为“特征线持续值”法,公式为

$$F(P_{i'}) = \begin{cases} h(P_{i'}) - \max[h(m)], & i' = 1, 2, \dots, n, \\ \min[h(M)] - h(P_{i'}), & \end{cases} \quad (8)$$

式中: $\max[h(m)]$ 为上升 Morse 复形中与鞍点连接的极小点的函数指标值的最大值; $\min[h(M)]$ 为下降 Morse 复形中与鞍点连接的极大点的函数指标值的最小值; $F(P_{i'})$ 为下降(上升) Morse 复形中所有点与极大(小)点之间的函数指标值之差。

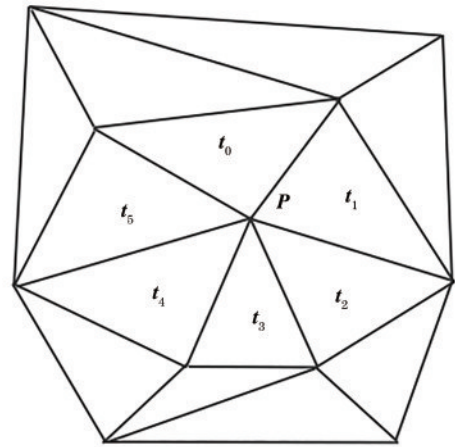


图 2 特征点的权重计算

Fig. 2 Weight computation of feature points

点连接为特征线,尽管已对特征点进行权重计算并设置阈值挑选了精确的特征点,但冗余或次要的特征仍然会形成对模型过度剖分现象,故需剔除模型的噪声或次要特征,提取出主要的特征。目前常用的同态收缩算法如图 3 所示,该方法是基于 MS 对偶性提出的,先计算特征线的重要性,依次删除重要性最小的特征线实现对复形的简化。极小点 m_1 和 m_2 分别与鞍点构成不同的特征点对, M_1 和 M_2 是与鞍点 S 相连的两个极大点。极小点 m_1 与鞍点 S 是符合“持续值”最小的特征点对,简化过程中将其删除的同时删除 $S-M_1$ 和 $S-M_2$ 两条上升路径,并对 $S-m_1$ 和 $S-m_2$ 两条下降路径进行收缩合并。因此极小点 m_2 也承接了极小点 m_1 原本的连接路径,形成了新的拓扑结构,保证了模型简化的拓扑一致性和完整性。

在三维点云模型中,以法矢变化量为显著性度量指标时,模型表面的平坦区域顶点之间的法矢夹角趋于 0,可知与鞍点连接的两个极小点的函数指标值均接近 0。文献[15]对基于 Morse 理论的三维点云拓扑特征的对偶性进行了研究,证明了三维点云上升 Morse 复形提取的无意义性。故本文仅提取三维模型表面的极大点和鞍点,构建与实际模型相符的下降 Morse 复形,并计算每条特征线上所有点的函数指标值的均值作为该条特征线的持续值(PV),公式为

$$V_p = \frac{\sum_1^n h(P_i)}{n}, \quad (9)$$

式中： $h(P_i)$ 为点 P_i 的指标函数； n 为特征线上所有点的点数。

仅使用持续值进行特征线的重要性评价时，会导致一定的片面性，如图 4 所示，在实际情况中，会存在一条特征线 L_1 的持续值大于 L_2 ，但在实际的三维模型中 L_2 的保留价值可能会更高。故本文构建保留系数 (PE) 用于判断特征线的实际留存价值，PE 越大代表保留的价值越高，公式为

$$E_p = \frac{[h(M_1) - h(S)][h(M_2) - h(S)]}{[h(S) - h(m_1)][h(S) - h(m_2)]}. \quad (10)$$

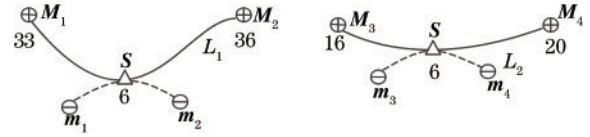


图 4 保留系数示意图

Fig. 4 Schematic of retention index

设置特征线权重值 λ ，对特征线的持续值与保留系数进行结合，重新定义特征线的重要性度量指标，公式为

$$X_T = \lambda V_p + (1 - \lambda) E_p. \quad (11)$$

本文三维点云拓扑特征提取与简化算法的具体步骤如图 5 所示。

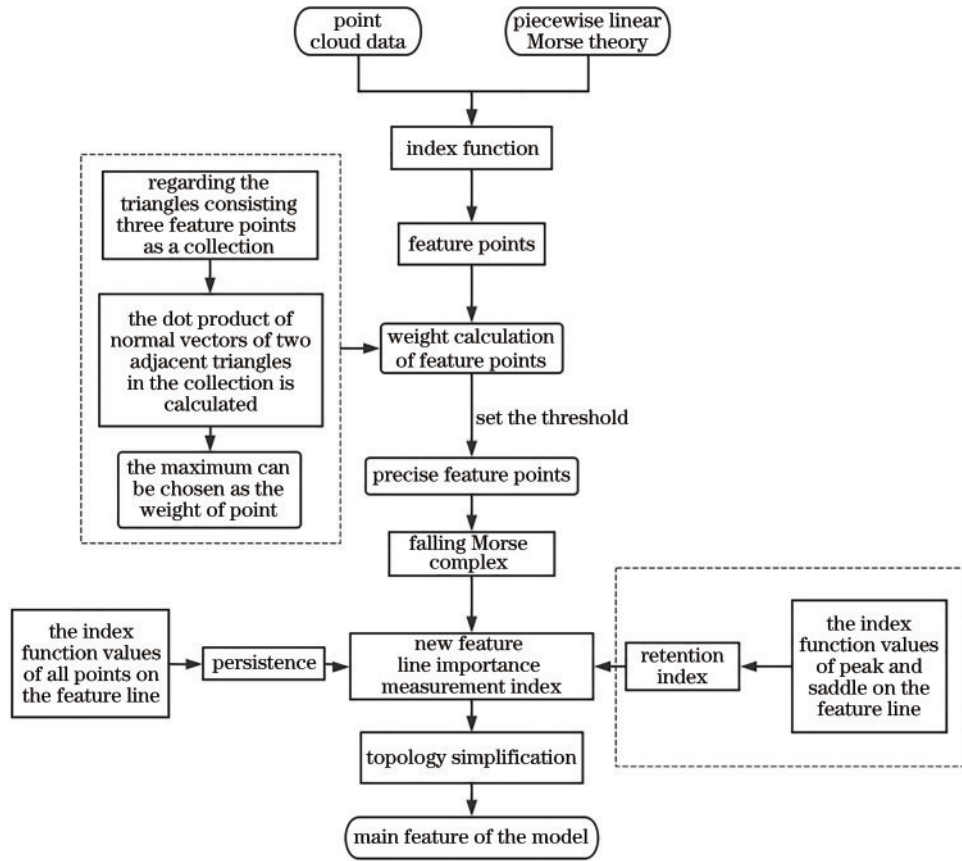


图 5 所提算法流程

Fig. 5 Flow chart of the proposed algorithm

4 实验分析

在 3.33 GHz Corel i7 处理器、16G 内存的电脑上实现算法。实验数据为 kerolamp 和 helix 模型，helix 模型结构相对较为单一，kerolamp 模型细节稍丰富。两组模型的原始点云模型如图 6 所示，构建的 Delaunay 三角网面片如图 7 所示。为提高特征提取率，根据式 (7) 计算各点权重值 W ，kerolamp 模型和 helix 模型鞍点输出阈值均为 0.2，helix 模型极大点输出阈值为 0.3。接

着构建下降 Morse 拓扑模型，如图 8 所示。并在相同的软硬件环境上对文献 [24] 的算法进行了复现，分别提取两个模型的下降复形，结果如图 9 所示。

由图 8 和图 9 可知，文献 [24] 中的方法构建的 kerolamp 模型的下降 Morse 复形部分特征线呈锯齿状且模型手柄处的特征线出现断裂，helix 模型特征冗余信息较多。这是由于文献 [24] 中的方法在识别有效特征时，受大量“伪特征”点干扰，主要特征点被遗漏或错判。所提算法在构建下降 Morse 复形前，通过设

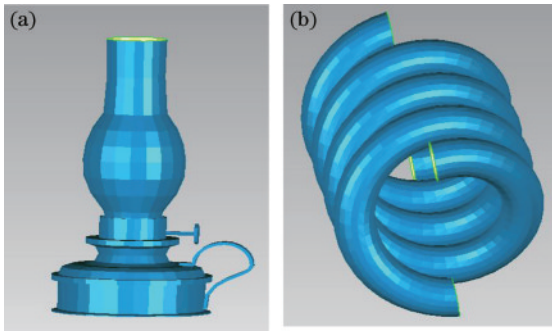


图 6 原始数据。(a) kerolamp 模型;(b) helix 模型
Fig. 6 Raw data. (a) kerolamp model; (b) helix model

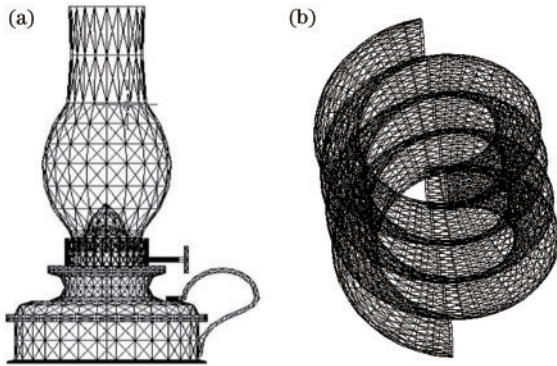


图 7 Delaunay 三角网构建。(a) kerolamp 模型;(b) helix 模型
Fig. 7 Delaunay triangulation construction. (a) kerolamp model;
(b) helix model

置合适的阈值对特征点进行精确提取,大量“伪特征”点被剔除,使得冗余特征线明显减少,同时得到比较完整的模型轮廓线,以此特征线构建的下降 Morse 复形可以实现对模型表面的分割。表 1 为两种算法对 kerolamp 模型构建下降 Morse 复形时所需特征点和运行时间的统计对比。从特征点的压缩效果分析可知:

表 1 不同提取方法对 kerolamp 模型的对比
Table 1 Comparison of different methods for kerolamp model

Method	Number of extracted features	Runing time /s	Point cloud compression ratio /%
Proposed method	1068	0.8	28.75
Method in Ref. [24]	1405	2.7	6.27

为获取模型的主要特征,基于式(9)和式(10)分别计算特征线持续值和保留系数,并利用推导的特征线重要性度量方法,设定不同的阈值对复形进行简化,逐步剔除噪声或次要特征线及其所对应的“伪特征”点。从图 10(a)和图 11(a)可知,两个模型的提取结果都存在部分噪声和次要特征线。从图 10(c)和图 11(c)可知,简化阈值设置过大,导致从两个模型提取的特征线存在断裂且不完整。从图 10(b)和图 11(b)可知,从两个模型分别得到简洁、连续且结构完整的特征线。这些特征线能构成整个模型的最佳轮廓特征,并能精确表达整个模型特征的主要拓扑信息,保持了拓扑特征的完整性与一致性。

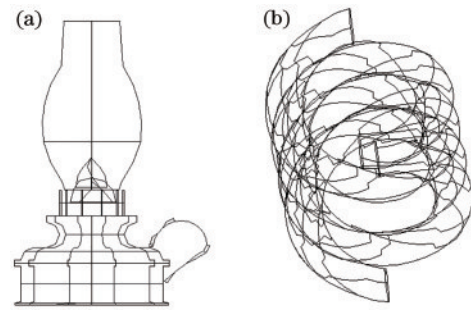


图 8 所提算法提取的分段线性 Morse 下降复形。
(a) kerolamp 模型;(b) helix 模型

Fig. 8 Piecewise linear falling Morse complex extracted by the proposed algorithm. (a) kerolamp model; (b) helix model

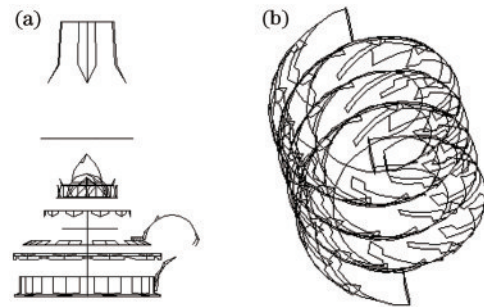


图 9 文献[24]中的方法提取的分段线性 Morse 下降复形。
(a) kerolamp 模型;(b) helix 模型

Fig. 9 Piecewise linear falling Morse complex extracted by the method in Ref. [24]. (a) kerolamp model; (b) helix model

与文献[24]中的方法相比,所提算法的点云压缩率提高了 22.48 个百分点,有效删除了“伪特性”点且完整清晰地保留了主要特征。从时间角度分析可知:与文献[24]中的方法相比,所提算法在运行效率上提高了 70.37%,若对海量点云数据进行运算能够节省大量的运行时间。

为了进一步分析算法的抗噪性能,通过 Matlab 软件给点云模型 1 加入不同强度的高斯白噪声,所加入的噪声强度分别为 10 dB, 20 dB, 50 dB。从图 12 可以看出:加入噪声为 10 dB 和 20 dB 时,与原始点云中提取的特征线相比,所提算法提取出的特征线出现细小的毛刺,但仍较完整地识别出了点云模型特征线;当加入噪声为 50 dB 时,某些边缘特征点缺失,导致特征线出现部分断裂,但所提算法仍能提取出大部分主要特征线,基本保留了原始模型的几何特征和轮廓外貌。因此,实验结果表明,所提算法针对含有不同程度噪声的模型都可以得到良好的提取效果,具有较强的抗噪性。



图 10 kerolamp 模型在不同阈值下的特征提取效果。(a) $\lambda=0.8, X_T=0.23$; (b) $\lambda=0.8, X_T=0.3$; (c) $\lambda=0.8, X_T=0.32$
Fig. 10 Feature extraction results for kerolamp model in different thresholds. (a) $\lambda=0.8, X_T=0.23$; (b) $\lambda=0.8, X_T=0.3$; (c) $\lambda=0.8, X_T=0.32$

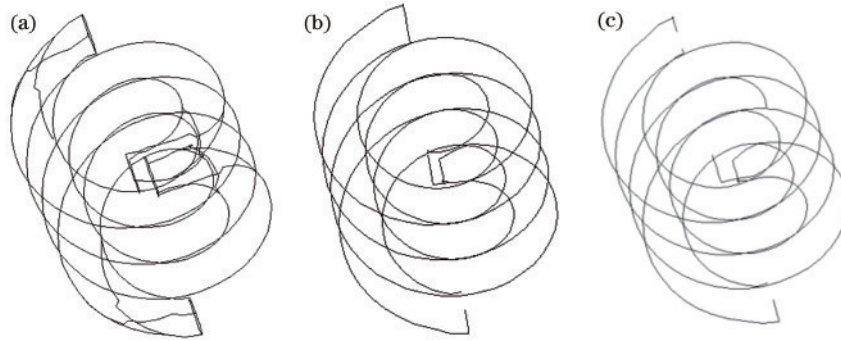


图 11 helix 模型在不同阈值下的特征提取效果。(a) $\lambda=0.7, X_T=0.15$; (b) $\lambda=0.7, X_T=0.2$; (c) $\lambda=0.7, X_T=0.22$
Fig. 11 Feature extraction results for helix model in different thresholds. (a) $\lambda=0.7, X_T=0.15$; (b) $\lambda=0.7, X_T=0.2$; (c) $\lambda=0.7, X_T=0.22$

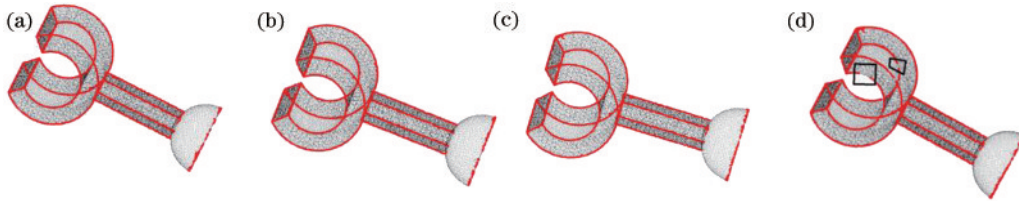


图 12 不同噪声影响下模型 1 的特征提取效果。(a) 0 dB; (b) 10 dB; (c) 20 dB; (d) 50 dB
Fig. 12 Feature extraction results for model 1 in different noise levels. (a) 0 dB; (b) 10 dB; (c) 20 dB; (d) 50 dB

5 结 论

基于 Morse 理论提取的特征能够实现对三维点云模型表面的完全分割,且特征具有拓扑完整性与一致性,是对大规模科学数据进行分析与可视化的强大工具。提出了一种基于分段线性 Morse 理论的三维点云特征提取与简化算法,通过对特征点进行权重计算并设置合适的阈值,实现对特征点的精确筛选,有效减少了“伪特征”点,显著提高了对拓扑特征线的构建效率。通过对保留系数和持续值进行结合,得到新特征线重要性度量方法,并基于此实现对三维点云模型拓扑特征的简化处理,获取了模型连续完整的主要特征,且特征提取与简化算法表现出了较强的抗噪性。

参 考 文 献

- [1] 钟文彬, 李旭瑞, 孙思, 等. 印制电路板点云的关键轮廓特征提取[J]. 激光与光电子学进展, 2020, 57(14): 141001.
- [2] Carr H, Snoeyink J, van de Panne M. Flexible isosurfaces: simplifying and displaying scalar topology using the contour tree[J]. Computational Geometry, 2010, 43(1): 42-58.
- [3] Reininghaus J, Kotava N, Guenther D, et al. A scale space based persistence measure for critical points in 2D scalar fields[J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2011, 17(12): 2045-2052.
- [4] Hu Y J, Miller H J, Li X. Detecting and analyzing mobility hotspots using surface networks[J]. Transactions in GIS, 2014, 18(6): 911-935.
- [5] Banchoff T. Critical points and curvature for embedded polyhedra[J]. Journal of Differential Geometry, 1967, 1(3/4): 245-256.
- [6] Banchoff T F. Critical points and curvature for embedded polyhedral surfaces[J]. The American Mathematical Monthly, 1970, 77(5): 475-485.
- [7] Wang C, Ren S Q. A discrete morse theory for digraphs [EB/OL]. (2020-07-27)[2021-02-01]. <https://arxiv.org/>

- abs/2007.13425.
- [8] 胡佳贝, 刘喆, 张鹏飞, 等. 基于离散 Morse 理论的散乱点云特征提取[J]. 光学学报, 2019, 39(6): 0615002.
Hu J B, Liu Z, Zhang P F, et al. Feature extraction of scattered point clouds based on discrete morse theory[J]. Acta Optica Sinica, 2019, 39(6): 0615002.
- [9] 刘梦婷, 方美娥, 张楠, 等. 连续框架下二维标量场 Morse-Smale 复形分割[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2016, 28(12): 2075-2081.
Liu M T, Fang M E, Zhang N, et al. A continuous framework of morse-Smale complex segmentation for two-dimensional scalar fields[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2016, 28(12): 2075-2081.
- [10] Gyulassy A, Bremer P T, Pascucci V. Shared-memory parallel computation of morse-Smale complexes with improved accuracy[J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2019, 25(1): 1183-1192.
- [11] 邱彦杰, 周雄辉. 反向工程中三角网格的加工特征识别[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2010, 22(4): 711-716.
Qiu Y J, Zhou X H. Machining features recognition from triangular meshes in reverse engineering[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2010, 22(4): 711-716.
- [12] Pfaltz J L. Surface networks[J]. Geographical Analysis, 1976, 8(1): 77-93.
- [13] Weinkauff T, Günther D. Separatrix persistence: extraction of salient edges on surfaces using topological methods[J]. Computer Graphics Forum, 2009, 28(5): 1519-1528.
- [14] 邱彦杰, 周雄辉, 柳伟. 基于 Morse-Smale 复形的三角网格特征线提取[J]. 上海交通大学学报, 2010, 44(8): 1074-1078.
Qiu Y J, Zhou X H, Liu W. Feature lines extraction from triangular mesh based on Morse-Smale complex[J]. Journal of Shanghai Jiao Tong University, 2010, 44(8): 1074-1078.
- [15] 张春亢, 李红梅, 张霞. 非对偶性点云拓扑特征识别与过渡特征保护[J]. 光学精密工程, 2020, 28(10): 2301-2310.
Zhang C K, Li H M, Zhang X. Topological feature recognition and blend feature protection for non-duality point clouds[J]. Optics and Precision Engineering, 2020, 28(10): 2301-2310.
- [16] 王成福, 耿国华, 胡佳贝, 等. 一种特征感知的三维点云简化算法[J]. 激光与光电子学进展, 2019, 56(11): 111004.
Wang C F, Geng G H, Hu J B, et al. Feature-aware three-dimensional point cloud simplification algorithm[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2019, 56(11): 111004.
- [17] 柏宏强, 夏永华, 杨明龙, 等. 基于三维激光点云特征线提取的溶洞多分辨率三维重建方法研究[J]. 激光与光电子学进展, 2020, 57(20): 202802.
Bai H Q, Xia Y H, Yang M L, et al. Multi-resolution 3D reconstruction of Karst caves based on the feature line extraction of 3D laser point cloud[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2020, 57(20): 202802.
- [18] 刘胜兰, 周儒荣, 张丽艳. 三角网格模型的特征线提取[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2003, 15(4): 444-448, 453.
Liu S L, Zhou R R, Zhang L Y. Feature line extraction from triangular mesh model[J]. Journal of Computer Aided Design & Computer Graphics, 2003, 15(4): 444-448, 453.
- [19] Magillo P, Danovaro E, Floriani L, et al. A discrete approach to compute terrain morphology[M]//Braz J, Ranchordas A, Araújo H J, et al. Computer vision and computer graphics. Theory and applications. Communications in computer and information science. Heidelberg: Springer, 2008, 21: 13-26.
- [20] Takahashi S, Ikeda T, Shinagawa Y, et al. Algorithms for extracting correct critical points and constructing topological graphs from discrete geographical elevation data[J]. Computer Graphics Forum, 1995, 14(3): 181-192.
- [21] Peucker T K, Douglas D H. Detection of surface-specific points by local parallel processing of discrete terrain elevation data[J]. Computer Graphics and Image Processing, 1975, 4(4): 375-387.
- [22] Toriwaki J I, Fukumura T. Extraction of structural information from grey pictures[J]. Computer Graphics and Image Processing, 1978, 7(1): 30-51.
- [23] Biasotti S, Patanè G, Spagnuolo M, et al. Shape approximation by differential properties of scalar functions[J]. Computers & Graphics, 2010, 34(3): 252-262.
- [24] Sahner J, Weber B, Prohaska S, et al. Extraction of feature lines on surface meshes based on discrete morse theory[J]. Computer Graphics Forum, 2008, 27(3): 735-742.