

# 激光与光电子学进展

## 双凸对称理想薄透镜傍轴物像公式的系统误差分析

邵云\*

南京晓庄学院电子工程学院, 江苏 南京 211171

**摘要** 首先指出凸透镜的实际厚度是一个不容被忽视的问题,然后逐步推导出空气中双凸对称厚透镜在傍轴情形下的物像关系及焦距,通过举例和作图,揭示出厚、薄两种凸透镜理论在焦距和像距上的具体差异,并分析出其中的一些规律性。通过取近似,推导出较薄凸透镜焦距及理想薄凸透镜焦距误差的近似表达式,指出后者与焦距近似无关。此外还推得“物焦比”大于 2 时较薄凸透镜像距和理想薄凸透镜像距的近似表达式,发现其间误差也与焦距无关,而仅与透镜的厚度、折射率及“物焦比”有关。最后指出,取“物焦比”大于 2 的原因在于物距处在 2 倍焦距以内时不便于取近似,而将凸透镜分为厚凸透镜、理想薄凸透镜、较薄凸透镜这 3 种类别的原因则在于严格区分。

**关键词** 几何光学; 双凸对称厚透镜; 理想薄凸透镜; 较薄凸透镜; 误差

中图分类号 O435.1

文献标志码 A

DOI: 10.3788/LOP202259.1308001

## Systematic Error Analysis of Paraxial Object Image Formula for Biconvex Symmetric Ideal Thin Lens

Shao Yun\*

School of Electronic Engineering, Nanjing Xiaozhuang University, Nanjing 211171, Jiangsu, China

**Abstract** This study demonstrates that the actual thickness of a convex lens is a problem that cannot be ignored, then gradually deduces the object image relationship and focal length of a biconvex symmetric thick lens in the paraxial case in air. The specific differences in focal length and image distance between thick and thin convex lens theories are revealed through examples and drawings, and some of the rules are analyzed. The approximate expression of the focal length of a thin convex lens and the approximate expression of the focal length error of an ideal thin convex lens are derived using approximation, and the latter is almost independent of the focal length. This study also derives that the approximate expressions of image distances of a thin convex lens and ideal thin convex lens on the condition of “the ratio of object distance to focal length” is greater than 2, and the error between them has nothing to do with the focal length, but only with the thickness, refractive index and “the ratio of object distance to focal length” of the lens. At the end of the study, the reason for setting “the ratio of object distance to focal length” greater than 2 is that it is difficult to take approximation when the object distance is within 2 times the focal length, and the reason for dividing the convex lens into the thick convex lens, ideal thin convex lens, and thin convex lens lies in strict distinction.

**Key words** geometrical optics; biconvex symmetric thick lens; ideal thin convex lens; thin convex lens; error

### 1 引言

理想的薄透镜是指厚度趋于零的透镜,而通常的薄透镜则是指厚度远小于镜面曲率半径的透镜。然而,由于口径(即光通量)以及镜框支撑强度的要

求,通常的凸透镜的厚度一般在 5~6 mm<sup>[1-3]</sup>,但是人们却常常把它当作理想的薄透镜来使用,利用理想薄透镜的理论公式来计算它的焦距及像距等,这将导致计算出的结果都存在实际误差,在某些特殊情况下,误差还特别大。显然,这是一个较容易被忽视

收稿日期: 2021-07-29; 修回日期: 2021-08-09; 录用日期: 2021-08-17

基金项目: 江苏省教育科学“十三五”规划课题(D/2020/01/55)

通信作者: \*shaoyun1973@163.com

的基础问题,尤其在生产和基础物理教学领域。本文将通过推导出双凸对称厚透镜的物像关系式及焦距公式,逐步揭示出厚(厚度较大)、薄(厚度较小)、理想薄(厚度趋于0)这3种凸透镜理论之间的具体差异,并从中寻找出一些规律性。

## 2 空气中双凸对称厚透镜的物像关系及焦距

如图1所示,根据共轴球面的逐次成像理论,光轴上物点Q将先经球面 $\Sigma_1$ 折射成像于 $Q'_1$ ,继而以 $Q'_1$ 为虚物点,经球面 $\Sigma_2$ 折射成像于透镜右侧最终的实像点 $Q'_2$ 。

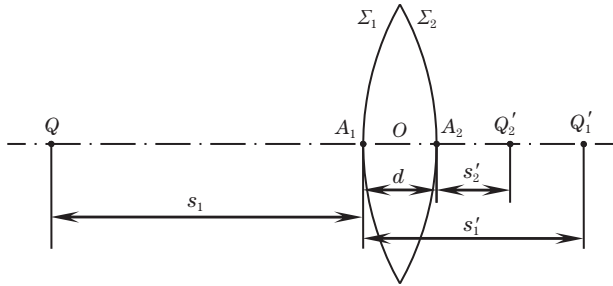


图1 光轴上物点Q经双凸对称厚透镜二次折射成像示意图  
Fig. 1 Schematic diagram of secondary refraction imaging of object point Q on optical axis by biconvex symmetric thick lens

设空气的折射率 $n_0 = 1.00$ ,双凸对称厚透镜的折射率为 $n_L$ ,厚度为 $d$ ,其左、右球面 $\Sigma_1$ 、 $\Sigma_2$ 的半径大小均为 $r$ ,则根据单折射球面物、像方的焦距公式及符号法则<sup>[4]</sup>,可得左侧球面 $\Sigma_1$ 的物、像方焦距分别为

$$f_1 = \frac{n_0 r}{n_L - n_0} = \frac{r}{n_L - 1}, \quad (1)$$

$$f'_1 = \frac{n_L r}{n_L - n_0} = \frac{n_L r}{n_L - 1}, \quad (2)$$

右侧球面 $\Sigma_2$ 的物、像方焦距分别为

$$f_2 = \frac{n_L (-r)}{n_0 - n_L} = \frac{n_L r}{n_L - 1}, \quad (3)$$

$$f'_2 = \frac{n_0 (-r)}{n_0 - n_L} = \frac{r}{n_L - 1}, \quad (4)$$

对称球面 $\Sigma_1$ 与 $\Sigma_2$ 的物、像方焦距分别交叉相等当在情理之中。

参见图1,对于一次成像 $Q'_1$ ,根据单折射球面的物像关系式也即高斯公式可得

$$\frac{f'_1}{s'_1} + \frac{f_1}{s_1} = 1; \quad (5)$$

而对于二次成像 $Q'_2$ ,根据高斯公式及符号法则,同时考虑到透镜的厚度 $d$ ,则有

$$\frac{f'_2}{s'_2} + \frac{f_2}{-(s'_1 - d)} = 1, \quad (6)$$

式中, $-(s'_1 - d)$ 便是二次折射成像的虚物距。联立式(1)~(6),消去 $s'_1$ 后可解得

$$\frac{d}{n_L r} = \frac{s_1}{s_1(n_L - 1) - r} + \frac{s'_2}{s'_2(n_L - 1) - r}, \quad (7)$$

这就是空气中双凸对称厚透镜的物像关系式。通过式(7)可进一步解得

$$s'_2 = \frac{r}{(n_L - 1) - \frac{1}{\frac{d}{n_L r} - \frac{s_1}{s_1(n_L - 1) - r}}}, \quad (8)$$

这便是物点经空气中双凸对称厚透镜成像的像距结果<sup>[5-6]</sup>。显然,若令式(7)或式(8)中的 $s_1 \rightarrow \infty$ 或 $s'_2 \rightarrow \infty$ ,则得此厚透镜的焦距为

$$f = f' = \frac{r}{n_L - 1} \left[ 1 - \frac{n_L r}{2n_L r - (n_L - 1)d} \right], \quad (9)$$

需要注意的是,这里的物距 $s_1$ 、像距 $s'_2$ 、焦距 $f$ 和 $f'$ 都是以图1中凸透镜的左、右端点 $A_1$ 、 $A_2$ 为参考的。倘若以通常的光心 $O$ 为参考,并设此时的物距为 $s_H$ ,像距为 $s'_H$ ,焦距为 $f_H$ 和 $f'_H$ ,其中下标H表示厚透镜,则结合几何关系,式(7)~(9)需分别修订为

$$\frac{d}{n_L r} = \frac{s - d/2}{(s - d/2)(n_L - 1) - r} + \frac{s'_H - d/2}{(s'_H - d/2)(n_L - 1) - r}, \quad (10)$$

$$s'_H = \frac{r}{(n_L - 1) - \frac{1}{\frac{d}{n_L r} - \frac{s - d/2}{(s - d/2)(n_L - 1) - r}}} + \frac{d}{2}, \quad (11)$$

$$f_H = f'_H = \frac{r}{n_L - 1} \left[ 1 - \frac{n_L r}{2n_L r - (n_L - 1)d} \right] + \frac{d}{2}, \quad (12)$$

此即传统意义下双凸对称厚透镜的物像关系式、像距公式和焦距公式。它们与常见的以主点为参考的相应公式本质是一致的<sup>[1,7]</sup>。

令式(10)~(12)中的 $d \rightarrow 0$ ,则得到如下理想双凸薄凸透镜的物像关系式(高斯公式)、像距公式和焦距公式(磨镜者公式),其中下标B表示薄凸透镜。

$$\frac{2(n_L - 1)}{r} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s'_B}, \quad (13)$$

$$s'_B = \frac{rs}{2(n_L - 1)s - r}, \quad (14)$$

$$f_B = f'_B = \frac{r}{2(n_L - 1)}. \quad (15)$$

## 3 普通玻璃理想双凸对称薄透镜焦距和像距的系统误差

为一般起见,设双凸对称透镜的材质为普通玻璃,折射率 $n_L = 1.50$ ,则由式(15)得通常标示焦距分别为

2.5、5.0、10.0 cm 的凸透镜的球面半径  $r$  也分别是 2.5、5.0、10.0 cm。但是,严格的焦距值却需由式(12)算得。设凸透镜的厚度统一为  $d=0.6$  cm,将相关数据代入式(12)即算得严格的焦距值分别为 2.7、5.2、10.2 cm。由此可见,这里的普通玻璃理想薄凸透镜焦距的绝对误差几乎是一定值  $-0.2$  cm,相对误差则分别为  $-7.4\%$ 、 $-3.8\%$ 、 $-2.0\%$ 。通常的厂家都是按照式(15)即磨镜者公式来制作凸透镜的,从以上分析可知,厂家所标示的焦距值越小,该凸透镜焦距的相对误差则可能越大。

将  $n_L=1.50$ ,  $d=0.6$  cm 代入式(11)和式(14)可得

$$s'_H = \frac{r}{0.5 - \frac{1}{\frac{0.4}{r} - \frac{s-0.3}{0.5(s-0.3)-r}}} + 0.3, \quad (16)$$

$$s'_B = \frac{rs}{s-r}, \quad (17)$$

再将  $r=2.5$  cm、 $r=5.0$  cm、 $r=10.0$  cm 分别代入式(16)和式(17),运用 Excel 软件,即可算出这 3 种普通玻璃凸透镜在各种物距  $s$  下像距的准确值(厚透镜)与近似值(理想薄透镜),并作出相应的像距-物距变化曲线,如图 2~4 所示。从这些图中可见,当物距越接近于焦距时,无论实像虚像,使用理想薄透镜像距公式所带来的误差就越大。数据也表明,当物距渐趋透镜的半厚度  $d/2$  时,理想薄透镜像距比厚透镜像距小约 0.20 cm;而当物距约等于 3 倍焦距时,理想薄透镜像距则比厚透镜像距小约 0.35 cm。

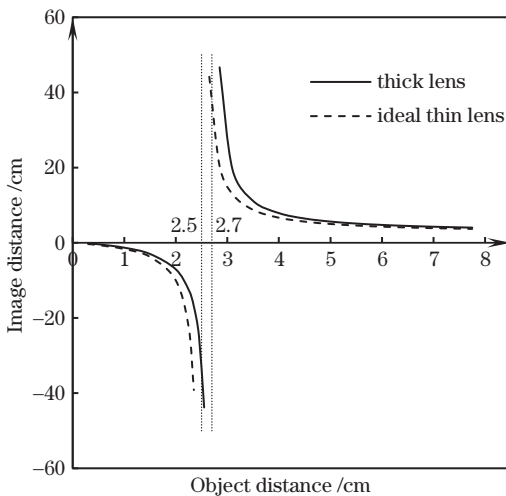


图 2 标示 2.5 cm 实际 2.7 cm 焦距的双凸对称透镜的像距随物距变化曲线

Fig. 2 Curve of image distance versus object distance of biconvex symmetric lens with 2.5 cm actual 2.7 cm focal length

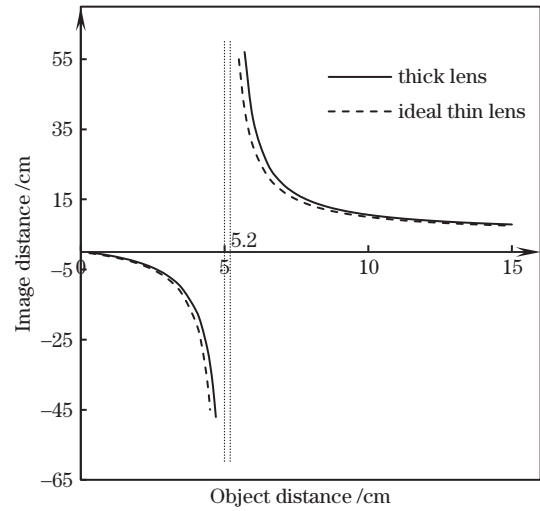


图 3 标示 5.0 cm 实际 5.2 cm 焦距的双凸对称透镜的像距随物距变化曲线

Fig. 3 Curve of image distance versus object distance of biconvex symmetric lens with 5.0 cm actual 5.2 cm focal length

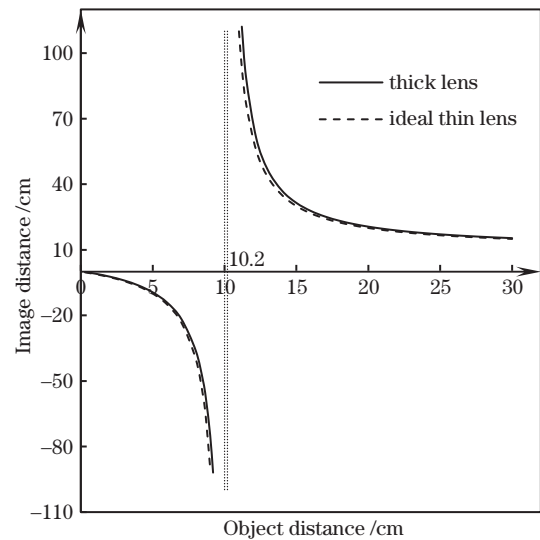


图 4 标示 10.0 cm 实际 10.2 cm 焦距的双凸对称透镜的像距随物距变化曲线

Fig. 4 Curve of image distance versus object distance of biconvex symmetric lens with 10.0 cm actual 10.2 cm focal length

#### 4 较薄双凸对称透镜焦距、部分像距的近似表达式及相应的理想薄透镜误差

当双凸对称透镜满足通常的薄透镜条件  $r \gg d$  时,仔细考察式(12)可以发现,其右边  $[\ ]$  内分母中的  $2n_L r \gg (n_L - 1)d$  理当成立。于是对式(12)取近似,可得

$$f_H = f'_H \approx \frac{r}{2(n_L - 1)} - \frac{d}{4n_L} + \frac{d}{2}, \quad (18)$$

此即较薄双凸对称透镜焦距的近似表达式。联立式(15)和式(18),则得此时理想薄凸透镜焦距( $f_B$ )的系统误差近似为

$$f_B - f_H \approx \frac{d}{4n_L} - \frac{d}{2}, \quad (19)$$

将  $n_L = 1.50, d = 0.6 \text{ cm}$  代入式(19)即得

$$f_B - f_H \approx -0.2 \text{ cm}。 \quad (20)$$

这与上一节的结果一致,可见  $-0.2 \text{ cm}$  的焦距误差恰是普遍适用的,究其原因,在于式(19)近似与焦距无关。可以预见,  $2n_L r \gg (n_L - 1)d$  或  $r \gg d$  的近似程度越高,也即透镜相对越薄,则式(18)和式(19)越准确。

当物距  $s \rightarrow d/2$  时,由式(11)可得

$$s'_H \rightarrow \frac{rd}{(n_L - 1)d - n_L r} + \frac{d}{2}。 \quad (21)$$

对于较薄凸透镜,  $(n_L - 1)d \ll n_L r$  显然成立,于是式(21)又可以近似地写成

$$s'_H \rightarrow d \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{n_L} \right), \quad (22)$$

与此同时,当  $s \rightarrow d/2$  时,由式(14)可得

$$s'_B \rightarrow \frac{rd}{2(n_L - 1)d - 2r}, \quad (23)$$

同样考虑到  $(n_L - 1)d \ll n_L r$ , 则式(23)又可以改写成

$$s'_B \rightarrow -\frac{d}{2}。 \quad (24)$$

于是,联立式(22)和式(24),即得当物距  $s \rightarrow d/2$  时,理想薄凸透镜像距与较薄凸透镜像距之间的误差近似为

$$s'_B - s'_H \approx -d \left( 1 - \frac{1}{n_L} \right), \quad (25)$$

可见,该结果同样与透镜的焦距(相当于  $r$ )近似无关。将  $n_L = 1.50, d = 0.6 \text{ cm}$  代入式(25)即得

$$s'_B - s'_H \approx -0.2 \text{ cm}。 \quad (26)$$

这就从理论上解释了第2节中当物距  $s \rightarrow d/2$  时,理想薄凸透镜像距总比厚透镜像距小约  $0.20 \text{ cm}$  的现象。

当物距处在2倍焦距以内时,实践表明(见后),式(11)和式(14)不便于取近似,误差较大,因此本文接下来只讨论物距大于2倍焦距时的像距误差。

鉴于  $f_H$  的表达式(12)较为复杂,且事实上  $f_H$  与  $f_B$  相差甚小[见式(20)],因此不妨以  $f_B$  即式(15)作为参考,从而令

$$s - d/2 = \alpha \frac{r}{2(n_L - 1)}, \quad \alpha > 2, \quad (27)$$

式中,常数  $\alpha$  可以理解为焦距的倍数。将式(27)代入式(11)则得

$$s'_H = \frac{r}{(n_L - 1) - \frac{1}{\frac{d}{n_L r} - \frac{\alpha}{(n_L - 1)(\alpha - 2)}}} + \frac{d}{2}, \quad (28)$$

易见在式(28)中  $\frac{d}{n_L r} \ll \frac{\alpha}{(n_L - 1)(\alpha - 2)}$  对于较薄透

镜同样成立,因此,若取1级近似,则式(28)可整理成

$$s'_H \approx \frac{\alpha r}{2(n_L - 1)(\alpha - 1)} - \frac{d(\alpha - 2)^2}{4n_L(\alpha - 1)^2} + \frac{d}{2}, \quad (29)$$

此即当物距大于2倍(实际可放宽至1.2倍,见后)焦距时较薄凸透镜像距的一种近似的表达式。

而将式(27)代入式(14),则得

$$s'_B = \frac{r[\alpha r + (n_L - 1)d]}{2(n_L - 1)^2 d + 2(n_L - 1)(\alpha - 1)r}, \quad (30)$$

对式(30)取同样的数学近似后可得

$$s'_B \approx \frac{\alpha r}{2(n_L - 1)(\alpha - 1)} - \frac{d}{2(\alpha - 1)^2}, \quad (31)$$

此即当物距大于2倍焦距时理想薄凸透镜像距的一种近似的表达式,其中  $d$  纯粹由式(27)引入。

于是,联立式(29)和式(31),便得当物距大于2倍焦距时,理想薄凸透镜的像距在  $r \gg d$  时的误差为

$$s'_B - s'_H \approx \frac{d(\alpha - 2)^2}{4n_L(\alpha - 1)^2} - \frac{d}{2(\alpha - 1)^2} - \frac{d}{2}, \quad (32)$$

可见,该误差同样也与透镜的焦距(即  $r$ )近似无关,但却与“物距/焦距”的近似值  $\alpha$  紧密相关。将折射率  $n_L = 1.50$  代入式(32),则得

$$s'_B - s'_H \approx - \left[ 1 + \frac{3 - (\alpha - 2)^2}{3(\alpha - 1)^2} \right] \frac{d}{2}。 \quad (33)$$

当式(33)中  $\alpha = 2, 3, 4, \dots$  时,可算得  $s'_B - s'_H \approx -d, -7d/12, -13d/27, \dots$ 。经检验,该结果与第2节中从式(16)和式(17)严格计算的结果几乎完全一致。这就基本验证了本节近似处理的合理性,以及式(32)的正确性,即当  $\alpha > 2$  时,理想薄凸透镜像距相较于较薄凸透镜像距的绝对误差仅与“物焦比” $\alpha$ 、厚度  $d$ 、折射率  $n_L$  有关,而与焦距的具体大小(即  $r$ )无关。图5是根据式(33)得出的  $s'_B - s'_H$  随  $\alpha (> 2)$  连续变化的曲线图,其中  $d$  取前文的  $0.6 \text{ cm}$ , 渐近线的纵坐标便是前文的焦距差  $-0.2 \text{ cm}$ , 见式(20)。另外,经检验,除了  $\alpha \rightarrow 0$  或  $2$  外,式(32)和式(33)两式对于物距处在2倍焦距以内的情形 ( $0 < \alpha < 2$ ) 确实不能成立,且  $\alpha$  越靠近1,误差越大。



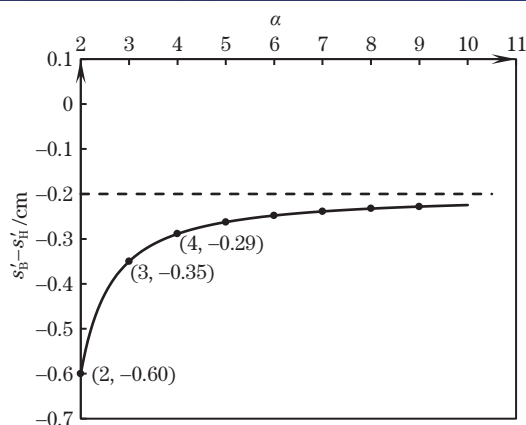


图5 理想薄凸透镜像距的绝对误差  $s'_b - s'_H$  随“物焦比”  $\alpha$  ( $> 2$ ) 的变化曲线

Fig. 5 Curve of absolute error  $s'_b - s'_H$  of image distance of ideal thin convex lens changing with “the ratio of object distance to focal length”  $\alpha$  ( $> 2$ )

## 5 总结与说明

通常双凸对称透镜的厚度难以避免,造成了教材上通常使用的理想薄透镜公式存在先天性的系统误差。本文例举的3个典型的普通玻璃凸透镜的结果显示:理想薄凸透镜焦距的系统误差均在 $-0.2$  cm左右;当物距等于3倍焦距时,理想薄凸透镜的实像像距的系统误差均在 $-0.35$  cm左右;当物距渐趋透镜的半厚度 $d/2$ ( $0.3$  cm)时,理想薄凸透镜的虚像像距的系统误差则均在 $-0.20$  cm左右;而当物距趋于焦距时,无论实像或虚像,理想薄凸透镜像距的系统误差都会迅速增大,直至趋于 $\infty$ 。从图2~4亦可见,随着凸透镜的焦距也即球面半径 $r$ 的减小,理想薄凸透镜的焦距和像距(等“物焦比” $\alpha$ )的相对误差均在增大。

利用取近似,本文得到了 $r \gg d$ 下,较薄凸透镜焦距的近似表达式(18)和理想薄凸透镜焦距误差的近似表达式(19);物距 $s \rightarrow d/2$ 时这两种透镜像距的差值表达式(25);当物距大于2倍焦距时较薄凸透镜像距的近似表达式(29),及此时理想薄凸透镜像距误差的近似表达式(32)。发现以上这3种理想薄凸透镜绝对误差均与焦距(即 $r$ )近似无关。其中式(19)、式(25)仅与透镜的厚度 $d$ 、折射率 $n_L$ 有关,而式(32)则还依赖于“物焦比” $\alpha$ 。经数据检验,本文第3节中所有的近似结果皆与第2节中的精确结果近似吻合,且越满足薄透镜条件 $r \gg d$ ,吻合度越高。

进一步的研究发现,第3节中较薄凸透镜像距的近似表达式(29),对于1.2~2倍焦距内的物距情形实际也能适用;但是理想薄凸透镜像距的近似表达式(31)则基本不能适用于0~2倍焦距内的物距情形。因此,理想薄凸透镜像距误差的近似表达式(32)不能适用于0~2倍焦距的物距范围。经检验,该物距范围内的误差确实与焦距(即 $r$ )有关,且 $\alpha$ 越靠近1,关联越大。这

便是该节限制 $\alpha > 2$ 的起因。对于2倍焦距以内物距情形下的较薄凸透镜的像距,还是应该采用第1节中厚透镜的精确表达式(10)~(12)来分析为宜。

需要说明的是,本文将凸透镜分为厚凸透镜<sup>[8]</sup>、理想薄凸透镜( $d \rightarrow 0$ )、较薄凸透镜( $r \gg d$ )<sup>[9]</sup>这3种,是为了严格地区分及表述的需要,毕竟它们的像距、焦距表达式(11)、式(12)与式(14)、式(15)与式(29)、式(18)是各不相同的。

## 6 结 论

重点介绍了较薄双凸对称透镜的焦距和“物焦比”大于2时的像距的近似表达式,并据此证明了理想薄凸透镜的焦距和对应像距的系统误差均与焦距无关的现象。后续拟将对较薄双凹对称透镜的焦距和像距的近似表达式进行研究,争取也获得较理想的结果。

## 参 考 文 献

- [1] 高立华,高松华,林小锦.薄透镜厚度引起焦距测量误差的探究[J].大学物理实验,2012,25(2):72-74.  
Gao L H, Gao S H, Lin X J. Study on errors in measuring the focus of a thin lens caused by its thickness [J]. Physical Experiment of College, 2012, 25(2): 72-74.
- [2] 孙平,张仲.薄透镜焦距测量中的误差及处理[J].广西工学院学报,2001,12(2):16-19.  
Sun P, Zhang Z. The handling of errors in measuring the focus of thin lens [J]. Journal of Guangxi Institute of Technology, 2001, 12(2): 16-19.
- [3] 朱林彦,杨周琴.薄透镜焦距测量中的误差及处理[J].物理实验,1995,15(3):123-125.  
Zhu L Y, Yang Z Q. Errors and treatment in focal length measurement of thin lens [J]. Physics Experimentation, 1995, 15(3): 123-125.
- [4] 赵凯华.新概念物理教程-光学[M].北京:高等教育出版社,2004.  
Zhao K H. New concept physics course: optics [M]. Beijing: Higher Education Press, 2004.
- [5] 赵清锋.基于折射定律对透镜成像的理论计算及近似处理[J].物理教师,2020,41(8):62-64.  
Zhao Q F. Theoretical calculation and approximate processing of lens imaging based on refraction law [J]. Physics Teacher, 2020, 41(8): 62-64.
- [6] 张相武.再用费马原理推导透镜的物像公式[J].延安大学学报(自然科学版),2004,23(4):31-33.  
Zhang X W. Derivation of lens equation by using Fermat's principle again [J]. Journal of Yanan University (Natural Science Edition), 2004, 23(4): 31-33.
- [7] 盛树武,李林海,辛志慧,等.凸透镜焦距测量不确定度分析及系统偏差校正[J].光学学报,2021,41(14):1412001.  
Sheng S W, Li L H, Xin Z H, et al. Uncertainty analysis and system deviation correction of convex lens focal length measurement [J]. Acta Optica Sinic, 2021, 41(14): 1412001.

- [8] 金超群, 杨宝喜, 胡小邦, 等. 低相干光干涉高精度透镜中心厚度的测量方法[J]. 中国激光, 2017, 44(6): 0604002.  
Jin C Q, Yang B X, Hu X B, et al. Measurement method of lens central thickness with high precision based on low coherence interferometry[J]. Chinese Journal of Lasers, 2017, 44(6): 0604002.
- [9] 刘经佑, 雷枫. 基于透过式低相干光学干涉测量透镜中心厚度[J]. 激光与光电子学进展, 2019, 56(12): 121201.  
Liu J Y, Lei F. Measurement of lens-center thickness based on low-coherence interference with transmitted illumination [J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2019, 56(12): 121201.