激光与光电子学进展

三量子位纯态的混合纠缠

种波，王嘉瑜*，陈博杨，田东平
西安建筑科技大学理学院，陕西 西安 710055

摘要 提出了一种特殊的真正的三量子位纯态的混合纠缠，与Greenberger-Horne-Zeilinger(GHZ)纠缠和W纠缠不同的是，它同时具有GHZ纠缠和W纠缠的性质。用两个由四个非多余基向量组成的不等价集合来构造混合纠缠态并引入一种新的测量方法，即采用总纠缠度的方法来量化三量子位纯态的纠缠情况(包括混合纠缠)。揭示了Walther等已报道的实验中最终态下出现混合纠缠，且其中W纠缠比GHZ纠缠占比更大这一现象。

关键词 量子光学；三量子位纯态；混合纠缠；总纠缠度；不等价集

中图分类号 O469 **文献标志码** A **DOI**: 10.3788/LOP202259.1127001

Mixed Entanglement of Triqubit Pure States

Chong Bo, Wang Jiayu*, Chen Boyang, Tian Dongping
School of Science, Xi'an University of Architecture & Technology, Xi'an 710055, *Shaanxi, China*

Abstract A special real mixed entanglement of triqubit pure states is proposed. Different from Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ) entanglement and W entanglement, it has the properties of GHZ entanglement and W entanglement at the same time. The mixed entangled states are constructed using two inequivalent sets composed of four non-superfluous basis vectors. A new measurement method, the total tangle, is introduced for quantifying total entanglement (including mixed entanglement) of the triqubit pure states. It is revealed that there is mixed entanglement in the final state in the experiment reported by Walther et. al., and the proportion of W entanglement is larger than that of GHz entanglement.

Key words quantum optics; triqubit pure state; mixed entanglement; total tangle; inequivalent sets

1 引 言

纠缠是量子力学的核心，是量子通信和量子计算中的基础性物理资源，因此，定性和定量地表征纠缠具有重要意义。两量子位纠缠容易理解[1-3]，Wootters等[1]论述了任意两量子位态形成的纠缠。近年来，Zhu等[2]研究了两粒子自旋的纠缠动力学和量子不和，Schwaiger等[3]研究了两类可操作的两方和多方纠缠测度，即源纠缠和可达纠缠的性质和关系。刘雪莹等[4]研究了非旋波近似下Tavis-Cummings(TC)模型中两非全同量子比特间的纠缠动力学问题，分析了同一耦合强度下不同跃迁频率的量子比特和光场对两量子比特间纠缠演化的影响。丛红璐等[5]对TC模型的能谱和量子纠缠进行了精确求解。徐玉虎等[6]分析了两量子比特拉比(Rabi)模型中的纠缠动力学问题，分析了不同跃迁频率和不同光场-量子比特耦合强度下量子比特的纠缠演化特性。关于多量子位的纠缠，仍在深入研究中。随着量子信息理论的迅速发展，人们不仅在多量子位态是否纠缠方面取得很多研究成果，而且在多量子态如何被纠缠以及纠缠的程度方面也成果颇多。因此对多量子位纠缠的分类和量化变得

收稿日期：2021-05-21；**修回日期**：2021-06-16；**录用日期**：2021-07-13
通信作者：*386273041@qq.com

越来越重要。

关于三量子位的纠缠情况，近些年来也取得了许多研究成果[7-18]。Guo等[11]提出了多方系统状态施密特数的推广，证明了纠缠是单调的，对纯态和混合态都是有效的。Zhao等[12]证明了多体态约简密度矩阵的秩与纠缠密切相关，且可以用来表征纠缠。Enríquez等[13]分析了复合量子系统最大纠缠态的识别问题。Akbari-Kourbolagh等[15]基于局部和不确定性关系，给出了任意选择子系统观测量的三重系统纠缠的一个充分判据。罗卫东等[19]运用数值计算结合解析解对三量子比特在光场初态为真空态的相互作用过程中的纠缠情况进行了研究。而先前，Acín等[7]和Dür等[8]分别获得了两个重要的结果：Acín等利用广义Schmidt分解证明了存在由5个基向量组成的3个不等价集；Dür等通过可逆的局部变换证明了存在两类不同的真正的三方纠缠：第一类为Greenberger-Horne-Zeilinger（GHZ）型，其代表是GHZ态；第二类为W型，其代表是W态。Pan等[20]用不同的方法展示了GHZ态和W态的实验实现。然而，Dür等指出，他们的结果并不完全和文献[7，9]的结果相容。文献[10]还从几个不同的方面报道了一些具有特殊纠缠态的三量子位纯态。因此，对三方纠缠的分类仍未完全解决。关于三量子位纯态纠缠的量化，文献[1]中指出平方项C^2量化了两方纠缠，文献[8]中对W纠缠引入了E_τ，文献[21]中对三方纠缠引入了三方纠缠度τ。

文献[22]中n方纠缠是多粒子纠缠的一种类型，它涉及所有的n个粒子，并具有这样的特性：追踪n个粒子中的任何一个或几个，剩余的粒子就不再纠缠。文献[8-9]中已经证明，在任何局部操作和经典通信（LOCC）下，都不能精确地转换GHZ状态和W状态。回顾Walther等[23]报道的一个有趣的实验，即基于局部正算子值测度（POVMs）和经典通信实现了从GHZ态到近似W态的局部转换。实验中纠缠改变的性质同样值得研究。

需要说明的是，本文接下来要讨论的混合纠缠依然是纯态，不是混合态，只是因为混合纠缠所包含的纠缠类型不止一种，因此称为混合纠缠态，完整说法为混合纠缠纯态。

本文分别以平方项C^2和三方纠缠度τ作为对两方和三方纠缠的度量，完整分析了基于最多5个基向量的所有线性组合的三量子位纯态下的真正的三方纠缠。发现除了GHZ纠缠和W纠缠外，还有一种特殊的真正的三方纠缠，即混合纠缠，它同时具有GHZ纠缠和W纠缠的特性。用由四个非多余基向量构成的两个不等价集来构造混合纠缠态。然后，在集合I的基础上，引入了一个新的测量方式即总纠缠度$\tau^{(T)}$来量化总纠缠情况，包括三量子位纯态的所有两方和三方纠缠，这自然提供了对混合纠缠的量化。最后，通过研究结果讨论了文献[23]中Walther等的实验，揭示了实验中纠缠改变的一些本质。

2　基本原理

首先明确一下Acín等[7]利用广义Schmidt分解证明了存在由5个基向量组成的3个不等价集，即

$$\begin{gathered}\{|000\rangle,|001\rangle,|010\rangle,|100\rangle,|111\rangle\}\\ \{|000\rangle,|001\rangle,|110\rangle,|100\rangle,|111\rangle\},\\ \{|000\rangle,|101\rangle,|110\rangle,|100\rangle,|111\rangle\}\end{gathered}\tag{1}$$

以及GHZ态和W态：

$$|\mathrm{GHZ}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle+|111\rangle),\tag{2}$$

$$|\mathrm{W}\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle+|010\rangle+|100\rangle)。\tag{3}$$

GHZ纠缠的一个主要特性是在损失粒子[24]的情况下变得非常脆弱。也就是说，对于GHZ纠缠态，在3个量子位上追踪其中一位的原始态得到的任何约化态将不再纠缠，即便原始态是纠缠的。因此，GHZ纠缠也被称为三方纠缠，并被三方纠缠度τ[21]量化。在三量子位纯态下，$\tau>0$存在GHZ纠缠，最大GHZ纠缠（在GHZ态下）存在$\tau=1$。

与GHZ纠缠相比，W纠缠在3个量子位中任意一个量子位的处理下都是稳固的，而没有三方纠缠。也就是说，对于具有W纠缠的量子态，在3个量子位上的其中一位上追踪原始态得到的3个约化态都保持两方纠缠，而$\tau=0$始终保持在原始态。因此，W纠缠被认为是由3个两方纠缠组成的。用平方项C_{ij}^2来量化量子位i和j的两方纠缠，得到了以下判据：如果三量子位A、B和C的纯态包含W纠缠，那么有

$$\min\{C_{AB}^2,C_{AC}^2,C_{BC}^2\}>0,\tag{4}$$

式中，C_{AB}^2、C_{AC}^2、C_{BC}^2分别表示AB、AC、BC量子位的两方纠缠。

由文献[8]可知，当式（4）成立时，有

$$E_\tau=C_{AB}^2+C_{AC}^2+C_{BC}^2,\tag{5}$$

式中：E_τ为W态的纠缠度；C_{AB}^2、C_{AC}^2、C_{BC}^2分别表示

AB、AC、BC量子位的两方纠缠。否则，无论3个两方纠缠中的一个或两个大于零，W纠缠始终为零。在W态，E_τ达到它的最大值为4/3。

GHZ纠缠和W纠缠的共同特点是它们都是由3个量子位组成的。因此，它们被称为真正的三方纠缠。在不失普适性的前提下，假设三量子位的量子态由3个自旋－1/2粒子组成。将自旋z分量$m=1/2$的粒子态表示为$|0\rangle$，$m=-1/2$表示为$|1\rangle$，则在三量子位态下，如表1所示，有8个基向量且总自旋z分量为±3/2或±1/2。根据总自旋z分量的符号，可以将8个基向量分为两个集，即正集$|000\rangle$，$|001\rangle$，$|010\rangle$和$|100\rangle$，以及由其余基向量组成的负集。根据同一基向量中单自旋z分量具有相同"sing"的粒子数，可将8个基向量分为两个集，$|000\rangle$和$|111\rangle$的三方集和其余基向量组成的双集。根据对应粒子单自旋z分量在不同基向量上的符号，可将8个基向量分为4个互补对$|000\rangle$和$|111\rangle$、$|001\rangle$和$|110\rangle$、$|010\rangle$和$|101\rangle$、$|100\rangle$和$|011\rangle$。每组中的两个总自旋z分量的和等于0。表1列出了上述8个基向量的分类。

表1　根据自旋z分量的不同对8个基向量进行的分类

Table 1　Classifications of eight basis vectors by different relations of their spin z components

Positive/Negative	Triple	Double
Positive	$\|000\rangle$	$\|001\rangle\|010\rangle\|100\rangle$
Negative	$\|111\rangle$	$\|110\rangle\|101\rangle\|011\rangle$

下面分析三量子位纯态的真正的三方纠缠，它基于最多5个基向量的所有线性组合。

对于$\tau>0$，两个基向量的线性组合的量子态只能是GHZ纠缠。这是一种真正的三量子位纠缠的形式，而且只有当两个基向量是4个互补对中的一对时，这些量子态在文献[8]中被称为广义GHZ态。

3个基向量线性组合的量子态可以包含GHZ纠缠或W纠缠。当量子态由4个互补对中的一个加上剩下的基向量中的一个基向量组合时，对于$\tau>0$，有GHZ纠缠而没有W纠缠，因为3个两方纠缠中有两个为零。这些态在文献[8]中被称为扩展的GHZ态，在文献[10]中被称为薄片(slice)态。当量子态由3个基向量$|001\rangle$、$|010\rangle$和$|100\rangle$组合时，且$E_\tau>0$时，只存在W纠缠。值得注意的是，由$|001\rangle$，$|010\rangle$和$|100\rangle$组成的纠缠态和由$|101\rangle$，$|110\rangle$，$|000\rangle$组成的纠缠态是一样的，在文献[7]中被称为3-Bell态，因为这两个态可通过第一个量子位的自旋翻转变换而相互转换。

除了GHZ纠缠和W纠缠外，4个基向量组合的态还可以有一种特殊的真正的三方纠缠，即混合纠缠。在三量子位A、B、C的混合纠缠态下，$\tau>0$时存在三方纠缠；另一方面，3个约化密度矩阵$\boldsymbol{\rho}_{AB}$、$\boldsymbol{\rho}_{AC}$、$\boldsymbol{\rho}_{BC}$均保持了$E_\tau>0$时的两方纠缠。具有混合纠缠态的量子态可以由表1中非多余的4个基向量组成的两个不等价集构造成线性组合，解释如下：

第一种构造混合纠缠态的集合包含4个互补对中的一个加上剩下的两个基向量，其中两个总自旋z分量的和是±1，例如，

$$\{|000\rangle,|001\rangle,|100\rangle,|111\rangle\}。\tag{6}$$

由文献[7]可知，基于这个集合的态可以写为

$$|\Psi\rangle=\lambda_1|000\rangle+\lambda_2|001\rangle+\lambda_3 e^{i\varphi}|100\rangle+\lambda_4|111\rangle,\tag{7}$$

式中：Ψ表示上述集合的态；λ_i表示每个向量前的系数，且第3个系数来承载唯一相关的相位且所有的$\lambda_i>0$；$0\leqslant\varphi\leqslant\pi$，$\sum_i\lambda_i^2=1$。这个态的纠缠度为

$$\begin{aligned}\tau&=4\lambda_1^2\lambda_4^2\\C_{AB}^2&=4\lambda_2^2\lambda_3^2\\C_{AC}^2&=4\lambda_2^2\lambda_4^2,\\C_{BC}^2&=4\lambda_3^2\lambda_4^2\end{aligned}\tag{8}$$

式中：τ表示三方纠缠度；C_{AB}^2、C_{AC}^2、C_{BC}^2分别描述AB、AC、BC量子位的两方纠缠。

由于$\lambda_i>0$时所有的两方和三方纠缠度均大于零，因此式(7)中的态必然存在混合纠缠。在这种混合纠缠中，GHZ纠缠只与互补对$|000\rangle$和$|111\rangle$有关；W纠缠与3个基向量$|000\rangle$、$|100\rangle$和$|111\rangle$有关，但基向量$|000\rangle$的系数λ_1对W纠缠没有影响，所以基向量$|111\rangle$是两个不同纠缠即GHZ纠缠和W纠缠的公共基向量。

基于所有$\lambda_i>0$和$\sum_i\lambda_i^2=1$的式(6)集合的混合纠缠，来自于式(8)的GHZ纠缠度τ严格小于1；当λ_1和λ_4都趋近于$1/\sqrt{2}$时，则趋近于该极限值。类似地，W纠缠度E_τ严格小于4/3；当λ_2、λ_3、λ_4趋近于$1/\sqrt{3}$时，则趋近于极限值。也就是说，在基于式(6)集合的混合纠缠中，τ和E_τ在两个开放区间内分别为$\tau\in(0,1)$和$E_\tau\in\left(0,\dfrac{4}{3}\right)$。

用于构造混合纠缠态的第二类集合包含4个没有互补对的基向量，其中4个总自旋z分量的和为零，例如，

$$\{|001\rangle,|010\rangle,|100\rangle,|111\rangle\}。\tag{9}$$

基于这个集合的量子态可以写为

$$|\Psi\rangle=\lambda_1|001\rangle+\lambda_2|010\rangle+\lambda_3 e^{i\varphi}|100\rangle+\lambda_4|111\rangle, \tag{10}$$

式中：Ψ表示上述集合的态；λ_i表示每个向量前的系数，且第三个系数来承载唯一相关的相位，$\lambda_i>0$；$0\leqslant\varphi\leqslant\pi$，$\sum_i\lambda_i^2=1$。这个态的纠缠度为

$$\begin{aligned}&\tau=16\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\\&C_{AB}^2=4\left(\lambda_1\lambda_4-\lambda_2\lambda_3\right)^2\\&C_{AC}^2=4\left(\lambda_2\lambda_4-\lambda_1\lambda_3\right)^2,\\&C_{BC}^2=4\left(\lambda_3\lambda_4-\lambda_1\lambda_2\right)^2\end{aligned} \tag{11}$$

式中：τ表示三方纠缠度；λ_i表示每个向量前的系数；C_{AB}^2、C_{AC}^2、C_{BC}^2分别表示AB、AC、BC量子位的两方纠缠情况。

由于所有$\lambda_i>0$的两方和三方纠缠均大于0，因此式(10)中的态可以出现混合纠缠。和式(7)中量子态的混合纠缠的一个明显区别是，式(10)中量子态的混合纠缠中GHZ纠缠和W纠缠都与所有的4个基向量有关。

式(9)集合的一个重要特征是式(10)中量子态混合纠缠存在有例外情况的可能。尽管GHZ纠缠度τ总是大于零，但对于合适的系数值，3个两方纠缠中的一个或多个可以为零，从而使W纠缠度E_τ等于零。因此，在这些特殊情况下，混合纠缠态可以消失。所有的3个两方纠缠都是零但只剩下三方纠缠。结合式(11)和$\sum_i\lambda_i^2=1$，可以得到在这种情况下，所有$\lambda_i=1/2$，式(10)中的量子态变为

$$|\Psi\rangle=\frac{1}{2}\left(|001\rangle+|010\rangle+|100\rangle+|111\rangle\right)。 \tag{12}$$

此时GHZ纠缠度τ达到它的最大值1。如果对3个量子位元应用Hadamard变换，式(12)中的量子态就转换为式(2)中的GHZ态。因此式(12)的量子态是伪装的GHZ态，但具有不同的形式。上面提到的例外情况是基于式(9)集合的混合纠缠的奇点，因此这里只关注式(9)集合且不考虑奇点，因此式(10)中的量子态总是具有混合纠缠。在不考虑奇点的情况下，基于式(9)集合的混合纠缠与基于式(6)集合的混合纠缠相似，即τ和E_τ在$\tau\in(0,1)$和$E_\tau\in\left(0,\frac{4}{3}\right)$两个开放区间内。

对于混合纠缠来说，式(6)集合和式(9)集合的一个共同的组成特征是在4个基向量中，没有多余的基向量。也就是说，忽略式(6)集合和式(9)集合中的4个基向量中的任意一个，那么基于它们的量子态的混合纠缠消失。因此式(6)集合或式(9)集合中的这4个基向量是混合纠缠的最小组合，且不能再压缩。

除了混合纠缠外，还有4个基向量态下的真正的三方纠缠的其他情况，如只有GHZ纠缠、只有W纠缠和GHZ纠缠以及3个两方纠缠中的一个或两个。表2列出了GHZ、W和混合纠缠的平方项和三方纠缠的差异。

表2 不同纠缠态下的C_{AB}^2、C_{AC}^2、C_{BC}^2和三方纠缠度τ的性质

Table 2 Values of three squared concurrences C_{AB}^2, C_{AC}^2 and C_{BC}^2, and 3-tangle τ for different entanglements

Entanglement	C_{AB}^2	C_{AC}^2	C_{BC}^2	τ
GHZ entanglement	$=0$	$=0$	$=0$	>0
W entanglement	>0	>0	>0	$=0$
Mixed entanglement	>0	>0	>0	>0

由于由式(1)中5个基向量组成的3个不相等集合总是可以分解为式(6)类型或式(9)类型加上一个附加基向量的集合，很明显纠缠的可能性包括以上讨论的情况。

到目前为止，已经知道在混合纠缠态中不仅有三方纠缠，还有两方纠缠。由于平方项仅量化了两方纠缠，而三方纠缠度仅量化了三方纠缠，接下来的问题是如何量化混合纠缠。事实上，这个问题和总纠缠态的量化有关，它由三方纯态中的所有两方和三方纠缠组成，因为混合纠缠只集中在真正的三方纠缠上。

现在考虑3个量子位A、B、C组成的纯态，并集I被定义为

$$I=I_A\cup I_B\cup I_C=\tau+C_{AB}^2+C_{AC}^2+C_{BC}^2+S_A^2+S_B^2+S_C^2, \tag{13}$$

式中：C_{AB}^2，C_{AC}^2，C_{BC}^2分别表示AB、AC、BC量子位的两方纠缠情况；S_A^2、S_B^2、S_C^2分别为量化量子位A、B、C的局部实性。$I_i=\tau+C_{ij}^2+C_{ik}^2+S_i^2$，且$i,j,k\in\{A,B,C\}$。$S_i^2$是衡量单粒子局域实在性的物理量，具有局域幺正操作不变性，体现的是处于纠缠态中粒子的个体特性。并集I的一个明显优点是它同时与两方和三方纠缠有关。

由于并集I包含3个量子位的局部实相，这与纠缠无关。作为一个良好的对纠缠的度量，本文定义了一个新的度量方式，即总纠缠度。对于包含所有两方和三方纠缠的三量子位纯态的总纠缠，总纠缠度为

$$\tau^{(T)}\equiv\frac{\left(I_A+I_B+I_C\right)-I}{3-1}, \tag{14}$$

结合式(13)可得

$$\tau^{(T)}=\tau+\frac{1}{2}\left(C_{AB}^{2}+C_{AC}^{2}+C_{BC}^{2}\right)。\qquad(15)$$

如果只关注真正的三方纠缠，那么总纠缠度$\tau^{(T)}$可以重写为

$$\tau^{(T)}=\tau+\frac{E_{\tau}}{2},\qquad(16)$$

式(14)～(16)中：$\tau^{(T)}$表示三量子位的总纠缠度；C_{AB}^{2}、C_{AC}^{2}、C_{BC}^{2}分别表示AB、AC、BC量子位的两方纠缠情况；I_i定义为$I_i=\tau+C_{ij}^{2}+C_{ik}^{2}+S_i^{2}$；$E_\tau$为W态纠缠度。

希望使用式(15)中的$\tau^{(T)}$描述总纠缠度，因为在三量子位纯态中不仅存在真正的三方纠缠，而且还存在其他3种两方纠缠。通过总纠缠度$\tau^{(T)}$，可以量化一个三量子位纯态的总纠缠度。例如当且仅当态ρ的总纠缠度$\tau^{(T)}=0$时，态ρ就是可分离的，并且当且仅当ρ的总纠缠度$\tau^{(T)}=1$时，ρ处于最大纠缠(仅在GHZ态下)。

通过总纠缠度，可以量化混合纠缠。对于式(7)中的混合态纠缠，$\tau^{(T)}$为

$$\tau^{(T)}=2\left(\lambda_2^2\lambda_3^2+\lambda_2^2\lambda_4^2+\lambda_3^2\lambda_4^2\right)+4\lambda_1^2\lambda_4^2。\qquad(17)$$

当$\lambda_i>0$和$\sum_i\lambda_i^2=1$时，$\tau^{(T)}$严格小于1。对于式(10)量子态的混合纠缠，$\tau^{(T)}$为

$$\tau^{(T)}=2\left(\lambda_1^2\lambda_2^2+\lambda_1^2\lambda_3^2+\lambda_1^2\lambda_4^2+\lambda_2^2\lambda_3^2+\lambda_2^2\lambda_4^2+\lambda_3^2\lambda_4^2\right)+4\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4,\qquad(18)$$

式(17)和式(18)中：$\tau^{(T)}$为总纠缠度；λ_i表示每个向量前的系数。

通过$\lambda_i>0$和$\sum_i\lambda_i^2=1$，可以得到$\tau^{(T)}\leqslant1$，其中当且仅当所有的$\lambda_i=1/2$时，有$\tau^{(T)}=1$，这就是所谓的混合纠缠的典型特例。

3　分析与展望

3.1　对Walther等实验的分析

现在考虑Walther等[23]关于局部转换GHZ态到近似W态的实验。他们方法的第一步是将GHZ态改写为式(12)中的形式，然后他们认为式(12)中的GHZ态是一个不必要的项$|111\rangle$和W态的叠加。事实上，在式(12)的GHZ态中4个基向量中的任意一个都可以看作是W态的一个不必要的项。由式(11)可知，如果4个系数中任意一个等于零，则三方纠缠度τ为零，而3个两方纠缠度大于零，因此只有W纠缠而没有GHZ纠缠。基向量$|001\rangle$，$|010\rangle$，和$|100\rangle$是非常熟悉的W基向量的态，所以把基向量$|111\rangle$看作多余的项是很自然的。

由于在任何LOCC下都不能精确地转换GHZ态和W态，因此不可能通过LOCC使式(12)中态的4个系数中的任何一个降为零。Walther等提出了一种特殊的方案，该方案基于一种局部量子测量(POVM)和LOCC，GHZ态可以转换为一个任意的近似W态。该方案的主要目的是将式(12)中最大GHZ态纠缠转化为LOCC下式(10)中的混合态纠缠。由式(11)可知，实验的关键是降低其中一个基向量的系数，即基向量$|111\rangle$的系数λ_4。当系数λ_4趋于零时，GHZ态的纠缠度τ将趋于零，而W态的纠缠度E_τ将趋于最大值的4/3，剩下的3个系数将趋于$1/\sqrt{3}$。但在LOCC条件下，$\lambda_4=0$的极限是不可能的，因此GHZ纠缠态将始终保持在最终态，尽管它可以是任意小的。因此在实验的最终态下，出现了混合纠缠，其中W纠缠比GHZ纠缠所占比更大，也就是说，只有近似的W态，而没有从GHZ态局部转换而来的精确的W态。

3.2　展望

前文仅是对三量子位混合纠缠的完整分析。其实更多的如四量子位态，也存在混合纠缠，只是情况非常复杂。和三量子位类似，四量子位的GHZ纠缠态为

$$|\mathrm{GHZ}\rangle_4=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0000\rangle+|1111\rangle\right),\qquad(19)$$

四量子位的W纠缠态为

$$|\mathrm{W}\rangle_4=\frac{1}{2}\left(|0001\rangle+|0010\rangle+|0100\rangle+|1000\rangle\right),\qquad(20)$$

那么有

$$|\varPsi\rangle_4=\frac{1}{\sqrt{6}}\left(|0000\rangle+|1111\rangle+|0001\rangle+|0010\rangle+|0100\rangle+|1000\rangle\right),\qquad(21)$$

式中，$|\varPsi\rangle_4$是同时存在GHZ纠缠和W纠缠的量子态。

然而，四量子位的纠缠除了GHZ纠缠、W纠缠以及包含GHZ纠缠和W纠缠的态$|\varPsi\rangle_4$，还有很多种形式。例如：

$$|\varPhi\rangle_4=\frac{1}{2}\left(|00\rangle_{AB}+|11\rangle_{AB}\right)\otimes\left(|00\rangle_{CD}+|11\rangle_{CD}\right),\qquad(22)$$

其实是两个贝尔基态的直积形式，其中，A粒子只和B粒子相互纠缠，C粒子只和D粒子相互纠缠，即这两对粒子是可分离的。再比如：

$$|\Omega\rangle_4=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0000\rangle_{ABCD}+|0111\rangle_{ABCD}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_A\left(|000\rangle_{BCD}+|111\rangle_{BCD}\right),\tag{23}$$

由式(23)可以看出,这种态是A粒子与B、C、D粒子的直积形式,其中,B、C、D粒子存在GHZ纠缠,而A粒子与其他3个粒子是可分离的。

同样,存在态$|\Omega\rangle'_4$,且

$$|\Omega\rangle'_4=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(|0001\rangle_{ABCD}+|0010\rangle_{ABCD}+|0100\rangle_{ABCD}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle_A\left(|001\rangle_{BCD}+|010\rangle_{BCD}+|100\rangle_{BCD}\right)。\tag{24}$$

式(22)~(24)中:A、B、C、D分别代表量子位A、B、C、D。

态$|\Omega\rangle'_4$中A量子位与其他3个量子位也是可分离的,只是量子位B、C、D的纠缠形式为W纠缠。

除上述举例的几种纠缠形式,四量子位的纠缠还有Cluster纠缠,因此,四量子位的纠缠情况就变得非常复杂。实际上,关于四量子位的纠缠形式,除了GHZ纠缠、W纠缠、Cluster纠缠,仍存在其他的纠缠形式且尚不明确。因此,基于所有四量子位纠缠形式的混合纠缠的讨论在目前条件下还无法进行。

另外,量子噪声是影响纠缠度的一个重要因素,在量子噪声下系统纠缠度会降低。例如在白噪声影响下[25],三量子位GHZ态将变为混合态,即

$$\zeta^W_{\mathrm{GHZ}}=p|\mathrm{GHZ}_3\rangle\langle\mathrm{GHZ}_3|+\frac{1-p}{8}\boldsymbol{I}',\tag{25}$$

式中:ζ^W_{GHZ}表示三量子位GHZ态在噪声下的混合态;p是描述量子态纯度的参数,且$p\in[0,1]$;$\boldsymbol{I}'$是8×8的单位矩阵。

在白噪声影响下,三量子位GHZ纯态会变为混合态,混合态中的GHZ纠缠度与p有关。并且,当$p>1/2$时,就无法准确观察到系统中的纠缠类型了。实际上,关于混合态纠缠的度量,目前还没有一种理想的方法取得国内外学者的认可。因此,量子噪声下对混合态系统中的纠缠做定量讨论的条件还不成熟。

4 结 论

讨论了三量子位纯态纠缠的分类和量化。提出了混合纠缠和由4个非多余基向量组成的两个不等价集合。引入了总纠缠度$\tau^{(T)}$来量化三量子位纯态的总纠缠度(包括混合纠缠态)。此外,还分析了文献[23]中Walther等的实验,这有助于澄清它的性质,且这些结果有助于更好地理解多方纠缠。

参 考 文 献

[1] Wootters W K. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits[J]. Physical Review Letters, 1998, 80(10): 2245-2248.

[2] Zhu M W, Liu Y, Lu J, et al. Quantum correlation for two-qubit systems interacting with macroscopic objects[J]. Quantum Information Processing, 2016, 15(7): 2805-2817.

[3] Schwaiger K, Kraus B. Relations between bipartite entanglement measures[J]. Quantum Information and Computation, 2018, 18(1/2): 85-113.

[4] 刘雪莹, 任学藻, 徐玉虎. 非旋波近似下Tavis-Cummings模型的纠缠特性[J]. 激光与光电子学进展, 2018, 55(10): 102701.
Liu X Y, Ren X Z, Xu Y H. Entanglement properties of Tavis-Cummings model without rotating wave approximation[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2018, 55(10): 102701.

[5] 丛红璐, 任学藻. Tavis-Cummings模型的能谱和量子纠缠的精确解[J]. 激光与光电子学进展, 2017, 54(9): 092701.
Cong H L, Ren X Z. Exact solutions of energy spectrum and quantum entanglement in Tavis-Cummings model[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2017, 54(9): 092701.

[6] 徐玉虎, 任学藻, 刘雪莹. 两任意量子比特Rabi模型的纠缠演化特性[J]. 光学学报, 2018, 38(1): 0127001.
Xu Y H, Ren X Z, Liu X Y. Entanglement evolution characteristics of quantum Rabi models with two arbitrary qubits[J]. Acta Optica Sinica, 2018, 38(1): 0127001.

[7] Acín A, Andrianov A, Costa L, et al. Generalized Schmidt decomposition and classification of three-quantum-bit states[J]. Physical Review Letters, 2000, 85(7): 1560-1563.

[8] Dür W, Vidal G, Cirac J I. Three qubits can be entangled in two inequivalent ways[J]. Physical Review A, 2000, 62(6): 062314.

[9] Carteret H A, Sudbery A. Local symmetry properties of pure three-qubit states[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 2000, 33(28):

4981-5002.

[10] Pan F, Liu D, Lu G Y, et al. Extremal entanglement for triqubit pure states[J]. Physics Letters A, 2005, 336(4/5): 384-389.

[11] Guo Y, Fan H. A generalization of Schmidt number for multipartite states[J]. International Journal of Quantum Information, 2015, 13(3): 1550025.

[12] Zhao C, Yang G W, Li X Y. Separability criterion for arbitrary multipartite pure state based on the rank of reduced density matrix[J]. International Journal of Theoretical Physics, 2016, 55(9): 3816-3826.

[13] Enríquez M, Wintrowicz I, Życzkowski K. Maximally entangled multipartite states: a brief survey[J]. Journal of Physics: Conference Series, 2016, 698: 012003.

[14] Barasiński A. Restriction on the local realism violation in three-qubit states and its relation with tripartite entanglement[J]. Scientific Reports, 2018, 8: 12305.

[15] Akbari-Kourbolagh Y, Azhdargalam M. Entanglement criterion for tripartite systems based on local sum uncertainty relations[J]. Physical Review A, 2018, 97(4): 042333.

[16] Zangi S M, Li J L, Qiao C F. Quantum state concentration and classification of multipartite entanglement[J]. Physical Review A, 2018, 97(1): 012301.

[17] Enríquez M, Delgado F, Życzkowski K. Entanglement of three-qubit random pure states[J]. Entropy, 2018, 20(10): 745.

[18] Walter M, Gross D, Eisert J. Multipartite entanglement[M]. Bruß D, Leuchs G. Weinheim: Wiley-VCH GmbH, 2016: 293-330.

[19] 罗卫东, 周旋, 周小清, 等. 在外场作用下三量子比特量子纠缠演化特性的研究[J]. 激光与光电子学进展, 2021, 58(21): 2127001.
Luo W D, Zhou X, Zhou X Q, et al. Evolution characteristics of three-qubit quantum entanglement under external field effect[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2021, 58(21): 2127001.

[20] Pan J W, Bouwmeester D, Daniell M, et al. Experimental test of quantum nonlocality in three-photon Greenberger-Horne-Zeilinger entanglement [J]. Nature, 2000, 403(6769): 515-519.

[21] Coffman V, Kundu J, Wootters W K. Distributed entanglement[J]. Physical Review A, 2000, 61(5): 052306.

[22] Wong A, Christensen N. Potential multiparticle entanglement measure[J]. Physical Review A, 2001, 63(4): 044301.

[23] Walther P, Resch K J, Zeilinger A. Local conversion of Greenberger-Horne-Zeilinger states to approximate *W* states[J]. Physical Review Letters, 2005, 94(24): 240501.

[24] Gisin N, Bechmann-Pasquinucci H. Bell inequality, Bell states and maximally entangled states for *n* qubits[J]. Physics Letters A, 1998, 246(1/2): 1-6.

[25] Shi M J, Ren C L, Chong B, et al. GHZ argument for four-qubit entangled states in the presence of white and colored noise[J]. Physics Letters A, 2008, 372(17): 2980-2983.