

# 基于二步相移法的钢轨三维面形复原

张王, 高晓蓉, 李金龙\*, 张渝, 罗林

西南交通大学物理科学与技术学院, 四川 成都 610031

**摘要** 传统的光栅条纹相移法提取相位时至少需要 3 幅光栅图像, 使得测量系统的工作频率较高, 图像预处理工作量大。针对这些问题, 将希尔伯特变换引入二步相移法。希尔伯特变换具有  $90^\circ$  相移和滤除直流分量的特性, 对光栅条纹图像进行希尔伯特变换处理后, 利用推导的相位提取公式计算相位。测量系统的非线性效应会引起条纹图像的失真, 计算出的相位不准确, 导致最后的三维复原精度低。推导了二步相移法中系统非线性效应引起的相位误差的公式, 并对相位进行迭代补偿, 削弱了非线性效应的影响。通过计算机仿真验证了所提方法的可行性, 并将所提方法用于钢轨表面的三维面形复原, 为钢轨磨损和表面缺陷的测量提供了有效方法。

**关键词** 机器视觉; 三维测量; 希尔伯特变换; 二步相移法; 钢轨轮廓; 非线性相位误差

中图分类号 TP391.41; TP391.9

文献标志码 A

DOI: 10.3788/LOP202259.1015003

## Three-Dimensional Surface Reconstruction of Rail Based on Two-Step Phase-Shift Method

Zhang Wang, Gao Xiaorong, Li Jinlong\*, Zhang Yu, Luo Lin

School of Physical Science and Technology, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, Sichuan, China

**Abstract** The traditional grating fringe phase-shift method requires at least three grating images to extract the phase, which increases the measurement system's frequency and the image preprocessing workload. The Hilbert transform is used in a two-step phase-shift method to solve these problems. The Hilbert transform has the properties of a  $90^\circ$  phase shift and the ability to filter out the direct-current component. The phase extraction formula is used to calculate the phase after the grating fringe image has been processed by Hilbert transform. The nonlinear effect of the measurement system will distort the fringe images and the calculated phase will be inaccurate, which lead to the low accuracy of the final three-dimensional restoration. In the two-step phase-shift method, the formula of phase error caused by the nonlinear effect of the system is deduced, and the phase is iteratively compensated to weaken the influence of the nonlinear effect. The feasibility of the proposed method is verified via computer simulation, and the proposed method is applied to the three-dimensional surface shape reconstruction of the rail surface, providing an effective method for measuring rail wear and surface defects.

**Key words** machine vision; three-dimensional measurement; Hilbert transform; two-step phase-shift method; rail profile; nonlinear phase error

## 1 引言

随着激光技术、计算机技术以及图像处理技术

等的发展, 光学三维测量技术由于非接触、精度高、测量速度快等特点, 在生物医学、逆向工程、机器视觉、工业检测、人脸识别等领域具有广泛的应用前

收稿日期: 2021-04-02; 修回日期: 2021-05-10; 录用日期: 2021-05-18

基金项目: 国家自然科学基金(61771409)

通信作者: jinlong\_lee@126.com

景<sup>[1-6]</sup>。常见的三维测量轮廓术有傅里叶变换轮廓术<sup>[7-8]</sup>、相位测量轮廓术<sup>[9-10]</sup>、小波变换轮廓术<sup>[11]</sup>等。

钢轨是列车运行的重要部件,起着引导列车行驶和支撑列车运行的重要作用,因此钢轨是影响列车安全运行的关键因素。钢轨磨损过度或其表面存在缺陷将会给列车运行带来极大的安全问题。因此,针对钢轨的磨损和表面缺陷检测,研究者们进行了大量的研究。

谭周文等<sup>[12]</sup>利用激光扫描钢轨轮廓并与标准轮廓对比,较精确地获得了钢轨的磨损值,但无法直观地呈现钢轨的磨损情况。闵永智等<sup>[13]</sup>提出了一种基于图像灰度梯度特征的钢轨表面缺陷检测方法,该方法能够减弱锈迹、光照变化等对检测结果的干扰,但其本质属于二维检测,无法获取缺陷的三维信息以鉴定缺陷的损伤程度。彭方进<sup>[14]</sup>提出了基于灰度标准差与投影积分的钢轨表面区域定位算法和基于多尺度灰度对比度的增强算法,这些算法能够排除复杂背景的干扰,实现钢轨表面缺陷的增强,具有较高的鲁棒性,也属于二维检测。王乐等<sup>[15]</sup>提出了一种基于偏振融合的钢轨廓形线结构光成像方法,该方法削弱了过曝现象,改善了光条质量。肖龙飞等<sup>[16]</sup>采用 Stoilov 五步相移法提取光栅条纹相位,复原的钢轨三维形貌精度高,但需要多幅图像,测量过程繁琐。

本文在相位测量轮廓术的框架中将希尔伯特变换引入到两步相移法,并对系统非线性效应引起的相位误差进行了迭代补偿。将所提方法用于钢轨的三维面形复原,并和 Stoilov 算法复原的结果进行对比。仿真实验结果表明,所提方法测量精度高,能有效降低系统非线性效应的影响,且只需要两幅光栅图像。

## 2 相位测量原理

相位测量轮廓术的测量光路如图 1 所示, A 和 B 分别是投影仪和相机的光心, AB 与参考平面 R 平行, d 是两光心间的距离, L 是 B 到参考平面之间的距离, h 是被测物表面 H 点到参考平面的距离。

将强度按正弦变化的标准光栅条纹投影到参考平面时,形成的条纹为

$$I_R(x, y) = R_1(x, y) \times \{A(x, y) + B(x, y) \cos[\varphi_0(x, y)]\}, \quad (1)$$

式中:  $R_1(x, y)$  为参考平面的反射率;  $A(x, y)$  为背景强度;  $B(x, y)$  为调制强度;  $\varphi_0(x, y) = 2\pi fx$  是光

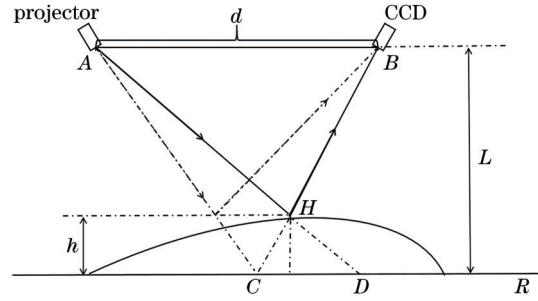


图 1 测量光路图

Fig. 1 Diagram of measuring optical path

栅在参考平面上的相位函数,  $f$  为光栅基频。

将标准正弦光栅条纹投影到三维物体的表面时,由于受到物体表面三维形貌的调制,光栅条纹变形为

$$I_o(x, y) = R_2(x, y) \times \{A(x, y) + B(x, y) \cos[\varphi(x, y)]\}, \quad (2)$$

式中:  $R_2(x, y)$  为被测物体表面的反射率;  $\varphi(x, y)$  是物体高度分布引起的相位调制。物体高度调制引起的相位差为

$$\Delta\varphi(x, y) = \varphi(x, y) - \varphi_0(x, y). \quad (3)$$

通过相机拍摄参考平面及被测物表面的条纹,计算出包裹相位后再进行相位展开,最后由相位-高度映射函数即可得到被测物三维面形信息,达到测量的目的。

## 3 基于希尔伯特变换的两步相移法

### 3.1 希尔伯特变换原理

对于一个一维信号,它的时域希尔伯特变换为

$$H[f(t)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{t - \tau} d\tau, \quad (4)$$

式中:  $H[\cdot]$  为希尔伯特变换算子。从变换式(4)可以看出,  $f(t)$  的时域希尔伯特变换是  $f(t)$  与  $1/\pi t$  的卷积,即

$$H[f(t)] = f(t) * h(t) = f(t) * \frac{1}{\pi t}, \quad (5)$$

式中:  $h(t) = 1/\pi t$  是希尔伯特变换的时域卷积核。由式(5),可以将  $f(t)$  的希尔伯特变换看作是线性时不变系统的输出,系统的冲激响应为  $1/\pi t$ 。该冲激响应系统的传递函数为

$$G(\omega) = -j \operatorname{sgn}(\omega) = \begin{cases} -j, & \omega > 0 \\ 0, & \omega = 0, \\ j, & \omega < 0 \end{cases} \quad (6)$$

式中:  $\operatorname{sgn}(\omega)$  是符号函数;  $\omega$  是信号角频率;  $j$  是虚数

位。从传递信号可知,一维信号经过希尔伯特变换后,其幅值不发生变化,相位出现 $90^\circ$ 的相移,且可以滤除信号中的直流分量。

由于一维希尔伯特变换在一维信号处理上表现的良好性能,研究者们希望能找到合适的方法能够将希尔伯特变换用在二维信号处理上。现有的针对二维信号的希尔伯特变换主要有:总体希尔伯特变换(THT)<sup>[17]</sup>、方向希尔伯特变换(PHT)<sup>[18]</sup>、单象希尔伯特变换(SOHT)<sup>[19]</sup>、四元希尔伯特变换(QHT)<sup>[20]</sup>、二象希尔伯特变换(BHT)<sup>[21]</sup>等。其中以二象希尔伯特变换效果最佳,基本具备了一维希尔伯特变换的优良性能,包括 $90^\circ$ 相移和滤除信号中的直流分量特性。采用二象希尔伯特变换对光栅条纹进行处理,二象希尔伯特的卷积核为

$$h(x, y) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{\pi^2 xy} \times \frac{1}{\pi^2 xy} \times \frac{1}{y} \right). \quad (7)$$

对于二维信号 $f(x, y)$ ,其二象希尔伯特变换也可用卷积实现:

$$H[f(x, y)] = f(x, y) * h(x, y). \quad (8)$$

### 3.2 相位提取

将标准正弦光栅分别投影到参考平面上和钢轨上,相机采集到的光栅图像光强分布可以表示为

$$I_{R1}(x, y) = R_1(x, y) \times \{A(x, y) + B(x, y) \cos[\varphi_0(x, y)]\}, \quad (9)$$

$$I_{O1}(x, y) = R_2(x, y) \times \{A(x, y) + B(x, y) \cos[\varphi(x, y)]\}. \quad (10)$$

再将具有相移量 $\delta$  ( $\delta \neq n\pi, n = 0, 1, 2, \dots$ )的正弦光栅分别投影到参考平面上和钢轨上,相机采集到的光栅图像光强分布可以表示为

$$I_{R2}(x, y) = R_1(x, y) \times \{A(x, y) + B(x, y) \cos[\varphi_0(x, y) + \delta]\}, \quad (11)$$

$$I_{O2}(x, y) = R_2(x, y) \times \{A(x, y) + B(x, y) \cos[\varphi(x, y) + \delta]\}. \quad (12)$$

再对以上4幅图像各自进行两次希尔伯特变换,滤除其直流分量且仍保留光强按余弦变化的图像:

$$I'_{R1}(x, y) = H\{-H[I_{R1}(x, y)]\} = R_1(x, y)B(x, y) \cos[\varphi_0(x, y)], \quad (13)$$

$$I'_{O1}(x, y) = H\{-H[I_{O1}(x, y)]\} = R_2(x, y)B(x, y) \cos[\varphi(x, y)], \quad (14)$$

$$I'_{R2}(x, y) = H\{-H[I_{R2}(x, y)]\} = R_1(x, y)B(x, y) \cos[\varphi_0(x, y) + \delta], \quad (15)$$

$$I'_{O2}(x, y) = H\{-H[I_{O2}(x, y)]\} = R_2(x, y)B(x, y) \cos[\varphi(x, y) + \delta]. \quad (16)$$

对经过希尔伯特变换的参考平面上的两幅光栅图像及钢轨上的变形条纹分别进行计算,提取各自的相位信息:

$$\phi_0(x, y) = \arctan \left[ \frac{I'_{R1}(x, y) \cos \delta - I'_{R2}(x, y)}{I'_{R1}(x, y) \sin \delta} \right], \quad (17)$$

$$\phi(x, y) = \arctan \left[ \frac{I'_{O1}(x, y) \cos \delta - I'_{O2}(x, y)}{I'_{O1}(x, y) \sin \delta} \right], \quad (18)$$

式中: $\phi_0(x, y)$ 为参考平面上条纹相位 $\varphi_0(x, y)$ 的截断相位; $\phi(x, y)$ 为钢轨上变形条纹相位 $\varphi(x, y)$ 的截断相位。对截断相位进行相位展开后,根据提前标定好的相位-高度映射关系即可获取钢轨表面的三维信息,以检测表面是否有缺陷,获得缺陷的尺寸信息。

### 3.3 系统非线性相位误差补偿

由于测量系统包含投影仪和相机,投影仪和摄像机都存在非线性Gamma效应,采集到的光栅条纹受到非线性的影响产生光强失真,影响相位计算的精度,导致最后恢复出的三维形貌不准确。因此,削弱系统非线性Gamma效应的影响能够有效提高三维面形复原精度。

计算机生成的正弦光栅条纹为

$$I^S(x, y) = A(x, y) + B(x, y) \cos[\varphi_0(x, y)]. \quad (19)$$

将计算机生成的光栅条纹输入投影仪后,输出的光强分布为

$$I^P(x, y) = [I^S(x, y)]^{\gamma_P}, \quad (20)$$

式中: $\gamma_P$ 为投影仪的非线性参数值。

投影仪将光栅条纹投射到参考平面上后,被相机采集到的条纹光强分布为

$$I^C(x, y) = [R(x, y)I^P(x, y) + I^A(x, y)]^{\gamma_C}, \quad (21)$$

式中: $R(x, y)$ 为参考平面的反射率; $\gamma_C$ 为相机的非线性参数值; $I^A(x, y)$ 是进入相机的环境光强。

将式(19)~(21)联立,可得相机获取的条纹光强分布:

$$I^C(x, y) = \left\{ R(x, y) \left\{ A(x, y) + B(x, y) \cos[\varphi_0(x, y)] \right\}^{\gamma_r} + I^A(x, y) \right\}^{\gamma_c} \quad (22)$$

根据多项式定理, 可将式(22)表示为

$$I^C(x, y) = \sum_{i=0}^{\gamma} a_i \left\{ \cos[\varphi_0(x, y)] \right\}^i, \quad (23)$$

式中:  $\gamma = \gamma_r \gamma_c$ 。对式(23)进行余弦降幂处理, 得到

$$I^C(x, y) = a(x, y) + \sum_{i=0}^k b_i(x, y) \cos[i\varphi_0(x, y)], \quad (24)$$

式中:  $k$  是高阶谐波阶数;  $b_i(x, y)$  是第  $i$  阶谐波系数。由于非线性效应的影响, 相机最终采集到的条纹发生了严重的失真, 对于后续的相位提取精度造

成了较大的影响, 最终降低三维形貌恢复的精度。

对于二步相移法中的两幅光栅, 也考虑非线性效应, 并进行两次希尔伯特变换:

$$I^{C'}_{R1}(x, y) = \sum_{i=0}^k b_i(x, y) \cos[i\varphi_0(x, y)], \quad (25)$$

$$I^{C'}_{R2}(x, y) = \sum_{i=0}^k b_i(x, y) \cos\{i[\varphi_0(x, y) + \delta]\}. \quad (26)$$

利用式(25)、(26)计算非线性效应下的截断相位:

$$\phi_0^C(x, y) = \arctan \left[ \frac{I^{C'}_{R1}(x, y) \cos \delta - I^{C'}_{R2}(x, y)}{I^{C'}_{R1}(x, y) \sin \delta} \right]. \quad (27)$$

根据式(27)、(17)计算出非线性效应下的相位误差为

$$\begin{cases} \Delta\phi(x, y) = \phi_0^C(x, y) - \phi_0(x, y) = \frac{\cos[\phi_0(x, y) + \delta] \cdot M - \cos[\phi_0(x, y)] \cdot N}{\sin \delta + \sin[\phi_0(x, y) + \delta] \cdot M - \sin[\phi_0(x, y)] \cdot N} \\ M = \sum_{i=2}^k \frac{b_i(x, y)}{b_1(x, y)} \cos[i\phi_0(x, y)] \\ N = \sum_{i=2}^k \frac{b_i(x, y)}{b_1(x, y)} \cos\{i[\phi_0(x, y) + \delta]\} \end{cases}, \quad (28)$$

式中:  $b_i(x, y)/b_1(x, y)$  是第  $i$  阶谐波系数与基频谐波系数的比值。对于一般的测量系统, 非线性效应产生的谐波阶数取到 7, 更高阶的谐波系数已经非常小了, 对精度的影响极小。对采集到的光栅图像

进行傅里叶变换, 可以求得其各阶系数与基频谐波系数的比值, 用以进行迭代补偿。

依据式(28)对相位误差进行迭代补偿:

$$\phi_0^{n+1}(x, y) = \phi_0^n(x, y) - \frac{\cos[\phi_0^n(x, y) + \delta] \cdot M - \cos[\phi_0^n(x, y)] \cdot N}{\sin \delta + \sin[\phi_0^n(x, y) + \delta] \cdot M - \sin[\phi_0^n(x, y)] \cdot N}, \quad (29)$$

式中:  $n(n=1, 2, 3, \dots)$  是迭代次数; 迭代的初始值  $\phi_0^1(x, y) = \phi_0^C(x, y)$ ; 迭代的收敛条件为  $\max|\phi_0^{n+1}(x, y) - \phi_0^n(x, y)| < 0.001 \text{ rad}$ 。

## 4 计算机仿真

为验证所提算法的可行性, 进行了仿真实验。通过计算机模拟仿真生成了一段钢轨表面三维图像, 其上有最大深度为 2 mm 的缺陷, 如图 2 所示。

分别利用 Stoilov 算法和两步相移法对钢轨进行了三维面形还原。使用仿真软件生成两种方法的参考条纹和投影到钢轨表面上的变形条纹, 并设置投影仪非线性参数为 1.1, 相机非线性参数为 1.2。为接近真实测量效果, 对两种算法各自的条纹均加入

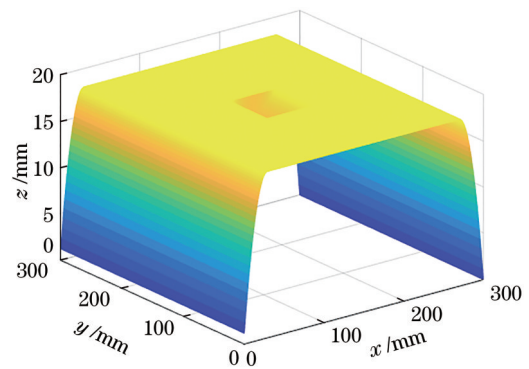


图 2 钢轨表面三维图

Fig. 2 Simulated 3D drawing of rail surface

了随机噪声。使用二步相移法进行复原时, 分为对非线性相位误差不补偿和补偿两种。

图 3 为无非线性效应下的标准正弦光栅图像和它的光强分布图像,图 4 为非线性效应下的标准正弦光栅图像和它的光强分布图像。对比可见,在非线线性效应下,光栅图像产生了高次谐波,光栅图像的光强发生了失真,影响相位提取,导致重构结果不准确。图 5(a)是非线性效应下的光栅图像经过两次希尔伯特变换后的光强分布曲线。图 5(b)是

变换前的图像光强分布与变换后的图像光强分布作差后的分布情况,即两次希尔伯特变换滤除的部分,希尔伯特变换能够较好地滤除直流分量。在实际中,图像中的直流分量包含环境光和光栅条纹的背景分量,所提方法对于均匀分布的环境光能够较好地滤除,但对于成一像过程中引入的噪声需要提前进行滤波处理。

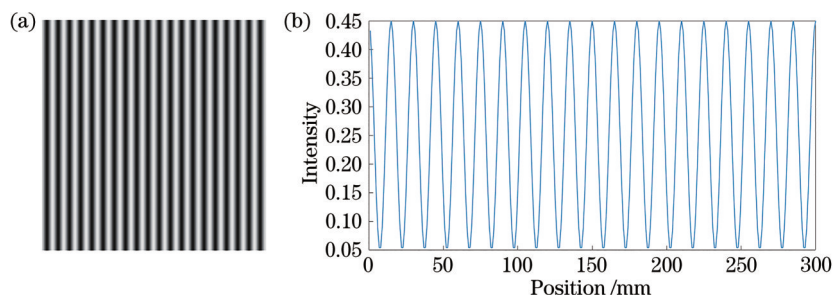


图 3 标准正弦光栅图像。(a)条纹图;(b)光强分布

Fig. 3 Standard sinusoidal fringe image. (a) Fringe image; (b) intensity distribution

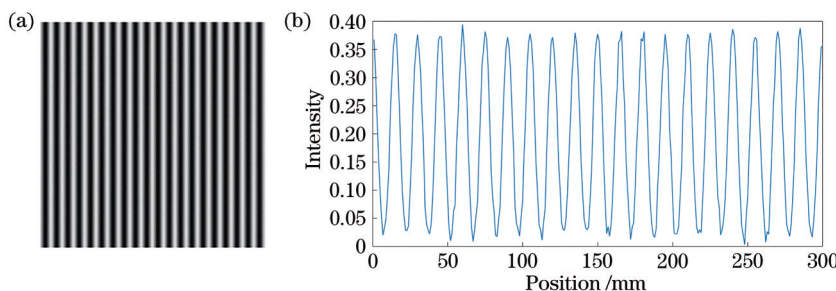


图 4 非线性下的正弦光栅图像。(a)条纹图;(b)光强分布

Fig. 4 Sinusoidal fringe image with nonlinearity. (a) Fringe image; (b) intensity distribution

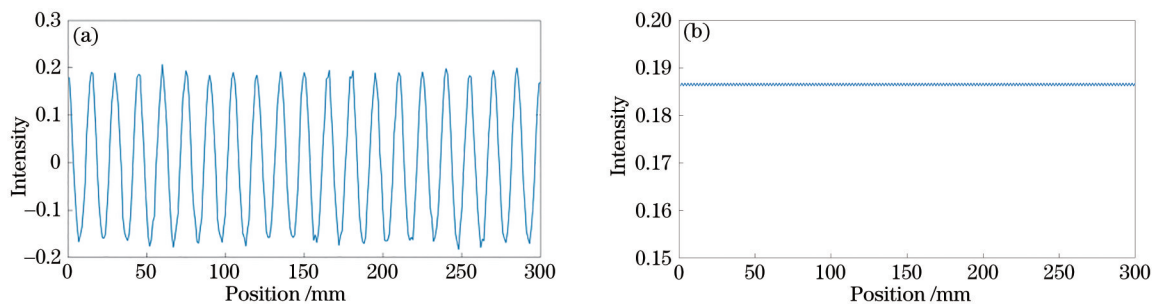


图 5 两次希尔伯特变换后的正弦光栅。(a)光强分布;(b)滤除部分

Fig. 5 Sinusoidal fringe after twice Hilbert transforms. (a) Intensity distribution; (b) filtered part

将复原结果与仿真钢轨表面作差,得到各方法复原结果与原物体的误差分布图。图 6(a)是 Stoilov 算法复原结果,图 6(b)是 Stoilov 算法重构误差分布情况。图 7(a)是未补偿相位误差的二步相移法复原结果,图 7(b)是未补偿相位误差的二步相移法重构误差分布情况。图 8(a)是经过误差补偿的二步相移法复原结果,图 8(b)是经过误差补偿的二步相移法重构误差分布情况。图 9 为三种复原结果在缺陷处的截面与仿真钢轨的截面对比,经过相

位补偿的二步相移法的复原结果更精确,能够更好地复原钢轨三维轮廓。

对比各复原结果在缺陷处的截面,可见补偿后结果更接近原来的截面。图 9(a)所示的 Stoilov 复原结果中截面的误差主要来源于仿真过程中添加的随机噪声。对各复原结果计算最大绝对误差、平均绝对误差和均方根误差,对三种复原结果的误差进行对比,如表 1 所示。可见,所提方法复原结果的误差较小,重构精度高于 Stoilov 算法。Stoilov 算法

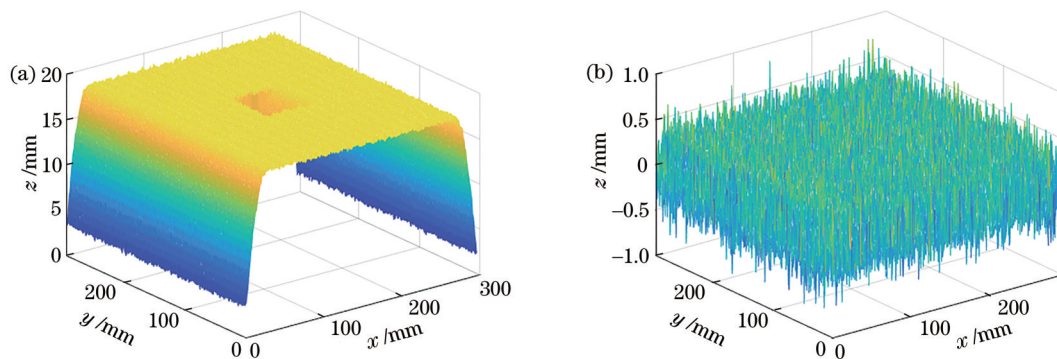


图 6 Stoilov 相移算法。(a) 重构结果；(b) 重构误差

Fig. 6 Stoilov phase shift algorithm. (a) Reconstruction result; (b) reconstruction error

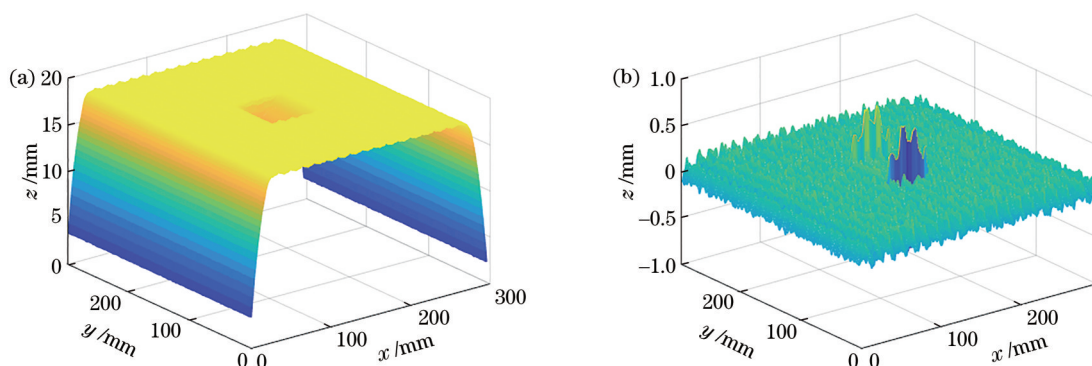


图 7 未补偿相位误差的二步相移法。(a) 重构结果；(b) 重构误差

Fig. 7 Two-step phase-shift method without compensating phase error. (a) Reconstruction result; (b) reconstruction error

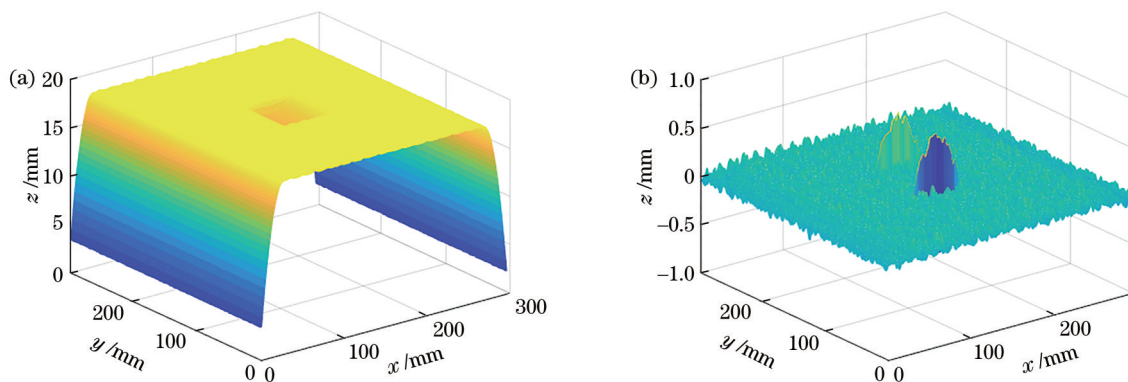


图 8 补偿相位误差的二步相移法。(a) 重构结果；(b) 重构误差

Fig. 8 Two-step phase-shift method with compensating phase error. (a) Reconstruction result; (b) reconstruction error

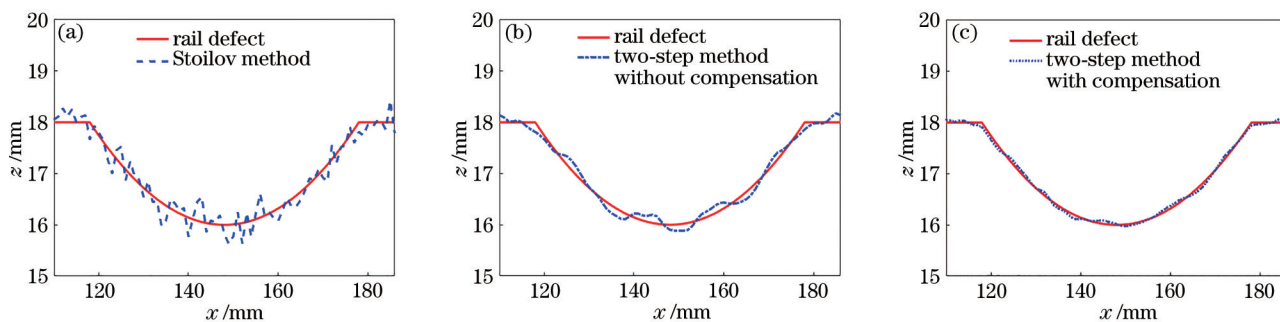


图 9 缺陷部分的横截面对比。(a) Stoilov 相移法；(b) 未补偿的二步相移法；(c) 补偿后的二步相移法

Fig. 9 Comparison of cross section of defect. (a) Stoilov phase shift algorithm; (b) two-step phase-shift method without compensation; (c) two-step phase-shift method with compensation

表 1 复原结果误差对比  
Table 1 Error comparison of reconstruction results

Phase shift algorithm	Maximum absolute error	Root mean squared error	Mean absolute error
Stoilov phase shift algorithm	0.8218	0.1866	0.1489
Two-step phase-shift algorithm without compensated phase error	0.7345	0.0809	0.0616
Two-step phase-shift algorithm with compensated phase error	0.6678	0.0457	0.0324

需要 5 幅光栅图像, 每幅图像中含有不同的噪声, 从而导致更多的误差。而所提方法仅需 2 幅图像, 大大降低了测量复杂度和图像预处理的工作量, 降低了系统设备的使用频率。

### 5 实验验证

使用基于希尔伯特变换的两步相移法对钢轨

侧面进行了三维面形恢复实验, 且与 Stoilov 相移算法进行对比。光栅条纹投影到钢轨上后产生变形, Stoilov 相移算法得到的 5 幅图像如图 10 所示, 且用其中两幅进行所提方法的恢复实验, 对选中的两幅条纹图像图 10(b)、(c) 分别按算法要求各自进行两次希尔伯特变换, 得到的图像如图 11(a)、(b) 所示。

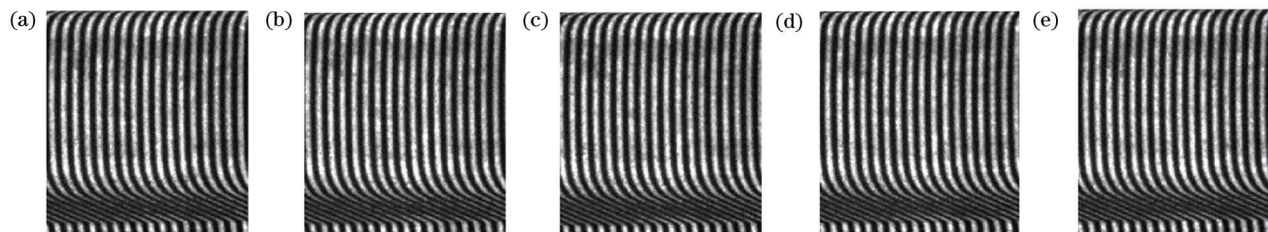


图 10 Stoilov 算法需要的钢轨变形光栅条纹

Fig.10 Rail deformation grating fringes required by Stoilov algorithm

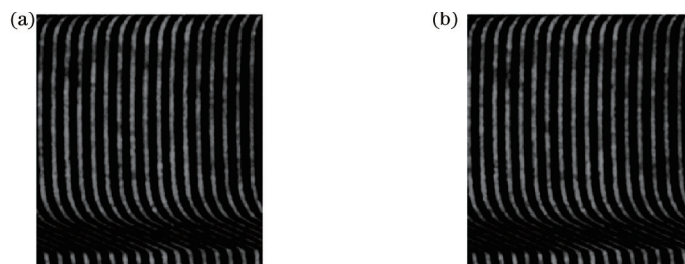


图 11 所提方法经两次希尔伯特变换后得到的光栅条纹

Fig.11 Grating fringes obtained by the proposed method after twice Hilbert transforms

在使用相机拍摄光栅条纹的过程中, 由于外界环境干扰因素和设备自身的原因, 图像中出现噪声, 降低了图像质量, 还原结果精确度降低, 因此在还原前

先对图像进行滤波处理。对处理后的图像计算各自的包裹相位, 图 12(a) 是 Stoilov 算法获得的包裹相位, 图 12(b) 是所提方法获得的包裹相位。

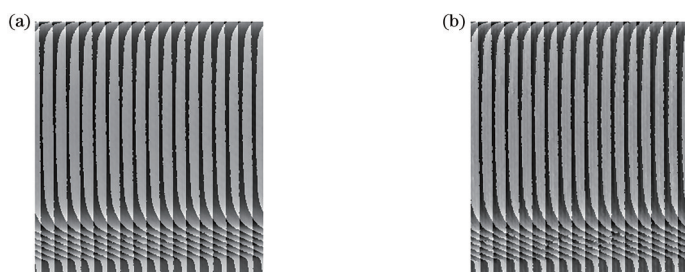


图 12 包裹相位图。(a) Stoilov 算法的包裹相位; (b) 所提方法的包裹相位

Fig. 12 Wrapped phase maps. (a) Wrapped phase map of Stoilov method; (b) wrapped phase map of proposed method

分别展开两幅包裹相位图,进行三维面形还原,图 13(a)是 Stoilov 相移算法的复原结果,图 13(b)是

所提方法的复原结果,可见所提方法取得了较好的恢复效果,且仅需 2 幅条纹图,测量过程更简便。

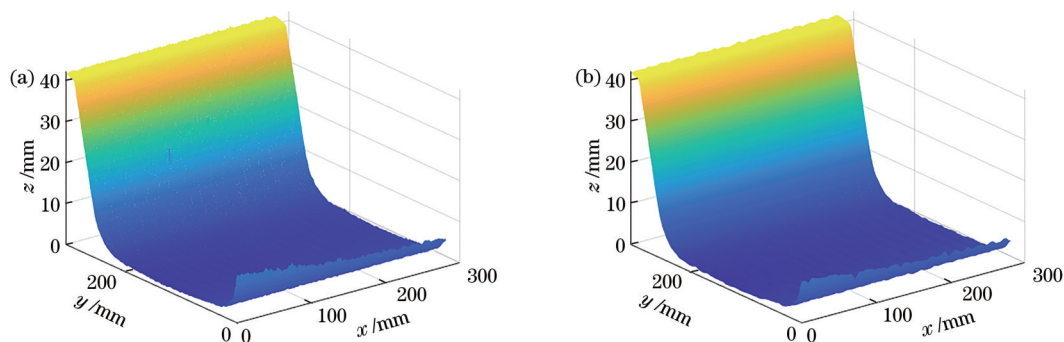


图 13 钢轨侧面三维面形恢复实验结果。(a) Stoilov 方法复原结果;(b) 所提方法的复原结果

Fig. 13 Experimental results of three-dimensional profile restoration of rail side. (a) Reconstruction result of Stoilov method; (b) reconstruction result of proposed method

## 6 结 论

通过计算机仿真模拟,验证了基于希尔伯特变换的两步相移法在三维面形测量中的可行性和相位迭代补偿法对削弱系统非线性效应引起的相位误差的有效性。最后用所提方法对钢轨进行了测量,能够较好地重构钢轨的三维形貌。与 Stoilov 算法的复原结果对比,在实际测量中,所提方法的测量精度不低于 Stoilov 算法,仅需 2 幅光栅图像,测量过程更简便,后续的图像预处理工作量也大幅减少。但所提方法在提取相位上仍然采用像素点对点的方法,测量及成像过程中引入的噪声会影响最终的测量结果,因此在使用光栅图像复原前需要进行滤波去噪。

### 参 考 文 献

- [1] Zhang S. Flexible 3D shape measurement using projector defocusing: extended measurement range [J]. *Optics Letters*, 2010, 35(7): 934-936.
- [2] Lü F, Xing S, Guo H W. Self-correction of projector nonlinearity in phase-shifting fringe projection profilometry[J]. *Applied Optics*, 2017, 56(25): 7204-7216.
- [3] Zuo C, Huang L, Zhang M L, et al. Temporal phase unwrapping algorithms for fringe projection profilometry: a comparative review[J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2016, 85: 84-103.
- [4] Du H, Wang Z Y. Three-dimensional shape measurement with an arbitrarily arranged fringe projection profilometry system[J]. *Optics Letters*, 2007, 32(16): 2438-2440.
- [5] 王腾, 杨树明, 李述胜, 等. 振镜激光扫描测量系统误差分析与补偿[J]. *光学学报*, 2020, 40(23): 2315001.  
Wang T, Yang S M, Li S S, et al. Error analysis and compensation of galvanometer laser scanning measurement system[J]. *Acta Optica Sinica*, 2020, 40(23): 2315001.
- [6] 黄硕, 胡勇, 巩彩兰, 等. 基于梯度光图像的高精度三维人脸重建算法[J]. *光学学报*, 2020, 40(4): 0410001.  
Huang S, Hu Y, Gong C L, et al. High precision three-dimensional face reconstruction algorithm based on gradient light image[J]. *Acta Optica Sinica*, 2020, 40(4): 0410001.
- [7] 徐建亮, 汪敏, 潘慧, 等. 倾斜式测量系统的傅里叶变换轮廓术研究[J]. *物理学报*, 2011, 60(7): 074210.  
Xu J L, Wang M, Pan H, et al. Fourier transform profilometry of tilted measurement system[J]. *Acta Physica Sinica*, 2011, 60(7): 074210.
- [8] Feng S J, Chen Q, Zuo C, et al. A carrier removal technique for Fourier transform profilometry based on principal component analysis[J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2015, 74: 80-86.
- [9] 何定高, 曹益平. 基于相位测量轮廓术的复合光栅优化设计[J]. *光电工程*, 2008, 35(2): 128-133.  
He D G, Cao Y P. Optimized design of composite grating based on PMP[J]. *Opto-Electronic Engineering*, 2008, 35(2): 128-133.
- [10] Chen C, Cao Y P, Zhong L J, et al. An on-line phase measuring profilometry for objects moving with straight-line motion[J]. *Optics Communications*, 2015, 336: 301-305.
- [11] 黄昊, 达飞鹏. 小波变换轮廓术中快速相位展开方法研究[J]. *仪器仪表学报*, 2012, 33(2): 397-404.



- Huang H, Da F P. Novel phase unwrapping method for wavelet profilometry[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2012, 33(2): 397-404.
- [12] 谭周文, 郭雁一夫. 激光三角法钢轨磨耗检测系统研究[J]. 传感器与微系统, 2016, 35(5): 20-24.  
Tan Z W, Guo Y Y F. Study on rail wear detection system of laser triangulation method[J]. Transducer and Microsystem Technologies, 2016, 35(5): 20-24.
- [13] 闵永智, 岳彪, 马宏锋, 等. 基于图像灰度梯度特征的钢轨表面缺陷检测[J]. 仪器仪表学报, 2018, 39(4): 220-229.  
Min Y Z, Yue B, Ma H F, et al. Rail surface defects detection based on gray scale gradient characteristics of image[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2018, 39(4): 220-229.
- [14] 彭方进. 一种高鲁棒性的钢轨表面缺陷检测算法[J]. 中国机械工程, 2019, 30(3): 266-270.  
Peng F J. A robust rail surface defect detection algorithm[J]. China Mechanical Engineering, 2019, 30(3): 266-270.
- [15] 王乐, 方玥, 王胜春, 等. 基于偏振融合的钢轨廓形线结构光成像方法[J]. 光学学报, 2020, 40(22): 2211001.  
Wang L, Fang Y, Wang S C, et al. Line-structured light imaging method of rail profile based on polarization fusion[J]. Acta Optica Sinica, 2020, 40(22): 2211001.
- [16] 肖龙飞, 李金龙, 高晓蓉, 等. 基于相位测量轮廓术的钢轨三维轮廓检测[J]. 无损检测, 2015, 37(10): 16-19.  
Xiao L F, Li J L, Gao X R, et al. The rail three-dimensional contour detection based on the phase measuring profile metrology[J]. Nondestructive Testing, 2015, 37(10): 16-19.
- [17] Stark H. An extension of the Hilbert transform product theorem[J]. Proceedings of the IEEE, 1971, 59(9): 1359-1360.
- [18] Havlicek J P, Havlicek J W, Mamuya N D, et al. Skewed 2D Hilbert transforms and computed AM-FM models[C]//Proceedings 1998 International Conference on Image Processing, October 7, 1998, Chicago, IL, USA. New York: IEEE Press, 1998: 602-606.
- [19] Hahn S L. Multidimensional complex signals with single-orthant spectra[J]. Proceedings of the IEEE, 1992, 80(8): 1287-1300.
- [20] Bulow T, Sommer G. Hyper complex signals—a novel extension of the analytic signal to the multidimensional case[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2001, 49(11): 2844-2852.
- [21] 徐冠雷, 王孝通, 徐晓刚. 二象 Hilbert 变换[J]. 自然科学进展, 2007, 17(8): 1120-1129.  
Xu G L, Wang X T, Xu X G. Bi-orthant Hilbert transform[J]. Progress in Natural Science, 2007, 17(8): 1120-1129.