

# 基于加权 Schatten- $p$ 范数与结构稀疏分解的视频前景背景分离

魏玉峰<sup>1</sup>, 景明利<sup>1\*</sup>, 李岚<sup>2</sup>, 孙坤<sup>1</sup>, 樊锐博<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 西安石油大学电子工程学院, 陕西 西安 710065;

<sup>2</sup> 西安石油大学理学院, 陕西 西安 710065

**摘要** 在具有动态背景或测量噪声的场景中, 基于核范数约束的低秩稀疏分解背景建模算法容易将运动的背景或噪声作为前景的一部分与前景同时分离出来, 对复杂背景的背景建模性能表现不佳。针对此问题, 提出一种加权 Schatten- $p$  范数与结构化稀疏分解的视频前景背景分离算法。首先, 因加权 Schatten- $p$  范数比核范数能够更好地抑制测量噪声, 故采用加权 Schatten- $p$  范数对背景矩阵进行约束; 其次, 利用前景在空间上具有连续变化这一结构先验知识, 对前景矩阵采用结构化稀疏约束, 并在此基础上建立一种视频前景背景分离模型; 最后, 利用增广拉格朗日方法与广义软阈值算法, 设计了加权 Schatten- $p$  范数与结构稀疏分解算法。数值实验表明: 与其他 5 种主流算法相比, 所提算法在具有动态背景的场景中能更准确地分离目标。

**关键词** 机器视觉; 低秩稀疏分解; 结构化稀疏范数; 加权 Schatten- $p$  范数; 背景建模

中图分类号 TP391.4

文献标志码 A

doi: 10.3788/LOP202158.0815008

## Video Foreground-Background Separation via Weighted Schatten- $p$ Norm and Structured Sparsity Decomposition

Wei Yufeng<sup>1</sup>, Jing Mingli<sup>1\*</sup>, Li Lan<sup>2</sup>, Sun Kun<sup>1</sup>, Fan Ruibo<sup>1</sup>

<sup>1</sup> School of Electronic Engineering, Xi'an Shiyou University, Xi'an, Shaanxi 710065, China;

<sup>2</sup> School of Science, Xi'an Shiyou University, Xi'an, Shaanxi 710065, China

**Abstract** In the scenes of dynamic background or measurement noise, the movement background or noise is easily regarded as a part of the foreground. Simultaneously, it is separated by the background modeling algorithm via decomposition of low-rank and sparsity based on the nuclear norm. This algorithm has poor performance in modeling capability of complex backgrounds. To tackle this issue, a video foreground-background separation algorithm via decomposition of weighted Schatten- $p$  norm and structured sparsity is proposed. First, the background matrix is constrained by the weighted Schatten- $p$  norm, which has a better performance for restraining measurement noise than the nuclear norm. Second, the foreground matrix is constrained by the structured sparsity, which uses a structured prior knowledge that the foreground changes continuously in space, and a video background separation model is established. Finally, a decomposition algorithm of the weighted Schatten- $p$  norm and structured sparsity is designed using an augmented Lagrangian method and a generalized soft-thresholding algorithm. The numerical experiment results show that, compared with five other main algorithms, the proposed algorithm can separate objectives more accurately in the scenes of dynamic background.

**Key words** machine vision; low-rank and sparse decomposition; structured sparsity norm; weighted Schatten- $p$  norm; background modeling

收稿日期: 2020-09-30; 修回日期: 2020-10-20; 录用日期: 2020-11-05

基金项目: 国家自然科学基金(61673314)、陕西省重点研发计划(2020GY-152)、西安石油大学博士创新基金(290088266)、西安石油大学研究生创新计划(YCS19113056)

\* E-mail: mljingsy@xsyu.edu.cn

## 1 引言

视频的前背景分离一直是计算机视觉领域的核心问题,作为智能监控技术的基础,其研究将会对目标识别<sup>[1]</sup>、目标检测<sup>[2]</sup>、目标跟踪<sup>[3-4]</sup>等应用产生直接的影响。

目前,视频前背景分离的主流算法可分为光流法<sup>[5]</sup>、帧差法<sup>[6]</sup>和背景建模法<sup>[7-8]</sup>。低秩稀疏分解模型是其中的一种背景建模方法。在基于压缩感知理论<sup>[9-11]</sup>的框架下,Candès 和 Wright 等<sup>[12-13]</sup>提出了鲁棒主成分分析(RPCA)法。它将视频中所有序列视为一个大的观测矩阵,每帧视频图像相当于观测矩阵中的一列。由于视频中背景部分不随时间变化,同一位置在不同帧中的位置一致,背景部分可表示为低秩矩阵;前景的变化是动态的,可表示为一个稀疏矩阵。进而提出一种名为主成分追踪(PCP)的分离方法。

RPCA 算法在前背景分离中易受到动态背景及噪声的扰动,分离效果不佳。因此要准确地将前景分离出来仍然是一个具有挑战性的问题。基于此,Zhou 等<sup>[14]</sup>提出了“去分解”(GoDec)的分解算法,将低秩稀疏分解中的目标函数分为前景、背景、噪声三项,并使用双边随机投影替代了 PCP 中的奇异值分解(SVD),它提高了 PCP 对复杂背景和噪声的鲁棒性。在 PCP 中,核范数是秩函数的凸包络,使用核范数对背景矩阵进行约束,虽然将原问题转换为了一个易于求解的凸优化问题,但却限制了处理实际问题的灵活性。考虑到较大奇异值对矩阵逼近性能的影响更大,Gu 等<sup>[15]</sup>提出加权核范数最小化(WNNM)模型,该模型会自适应地给予不同奇异值以不同的权值,提升了模型处理实际场景的灵活性;Zhang 等<sup>[16]</sup>提出了截断核范数(TNN)模型,该模型保持较大的奇异值不变,只对较小的奇异值进行最小化,在一些场景下也收到了很好的恢复效果;由于核范数仅仅是矩阵秩函数的最优凸逼近形式,非凸形式的逼近将得到更好的恢复结果,故 Nie 等<sup>[17]</sup>提出 Schatten- $p$  范数,它是一种秩函数的非凸最小化形式,可以抑制测量时产生的噪声。但 Schatten- $p$  范数同样也面临与核范数相同的问题,不能灵活处理不同的奇异值。基于加权核范数的启发,Xie 等<sup>[18]</sup>提出了加权 Schatten- $p$  范数最小化(WSNM)模型,它能更灵活地处理不同的奇异值,是一种更精

确的秩函数近似。PCP 对于稀疏部分使用  $l_1$  范数约束,由于  $l_1$  范数对矩阵每一个元素都进行了单独处理,忽略了前景物体移动时在空间上的结构关系,这一性质显然不同于动态背景的局部运动及周期运动。因此,Guyon 等<sup>[19]</sup>提出具有块稀疏特性的  $l_{2,1}$  范数,强调了背景的低秩性与前景的稀疏性之间的联系,更好地分离出了前景物体;Liu 等<sup>[20]</sup>提出了低秩与结构化稀疏分解(LSD)模型,稀疏部分是一种基于重叠组的结构化稀疏范数,它可以适应复杂多变的视频场景。

针对视频前背景问题,受到文献[18]中加权 Schatten- $p$  范数及文献[20]中结构化稀疏范数的启发,将加权 Schatten- $p$  范数与结构化稀疏范数相结合,提出了一种新的低秩稀疏分解模型,并采用增广拉格朗日乘子(ALM)法求解,在多组复杂视频场景下的实验结果表明,所提出的模型对动态背景下的移动目标有很好的分离效果。

## 2 加权 Schatten- $p$ 范数与结构化稀疏范数分解

### 2.1 低秩稀疏分解模型

低秩稀疏分解是将视频的观测矩阵  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  分解为低秩矩阵  $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  与稀疏矩阵  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  之和,其数学模型可表示为

$$\min_{\mathbf{L}, \mathbf{S}} R_{\text{rank}}(\mathbf{L}) + \lambda \|\mathbf{S}\|_0, \text{ s. t. } \mathbf{D} = \mathbf{L} + \mathbf{S}, \quad (1)$$

式中: $R_{\text{rank}}(\cdot)$ 表示矩阵  $\mathbf{L}$  的秩函数即矩阵  $\mathbf{L}$  的秩大小; $\|\cdot\|_0$ 表示矩阵  $\mathbf{S}$  的拟零范数即矩阵  $\mathbf{S}$  中非零元素的个数; $\lambda > 0$  表示惩罚因子。因为(1)式中的秩函数和拟零范数都是非凸非光滑的,所以它是一个 NP-hard 问题。

对(1)式进行凸松弛处理,将其转化为一个凸优化问题,其数学模型可表示为

$$\min_{\mathbf{L}, \mathbf{S}} \|\mathbf{L}\|_* + \lambda \|\mathbf{S}\|_1, \text{ s. t. } \mathbf{D} = \mathbf{L} + \mathbf{S}, \quad (2)$$

式中: $\|\cdot\|_*$ 表示矩阵  $\mathbf{L}$  的核范数即矩阵  $\mathbf{L}$  的奇异值之和; $\|\cdot\|_1$ 表示矩阵  $\mathbf{S}$  的  $l_1$  范数即矩阵  $\mathbf{S}$  所有元素的绝对值之和。

### 2.2 低秩建模

RPCA 算法中对低秩矩阵  $\mathbf{L}$  用核范数约束,而核范数并不是秩函数的最佳近似。文献[18]中的加权 Schatten- $p$  范数,是一个更精确的秩函数近似,且可以抑制测量时产生的噪声,因此本研究使

用加权 Schatten- $p$  范数来进行低秩约束,其表达式为

$$\|L\|_{w,s_p} = \left( \sum_{i=1}^{\min(m,n)} \omega_i \sigma_i^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (3)$$

式中: $0 < p \leq 1$  为加权参数, $\sigma_i$  表示矩阵  $L$  的第  $i$  个奇异值, $w = [\omega_1, \dots, \omega_i, \dots, \omega_{\min(m,n)}]$  表示对应奇异值  $\sigma_i$  的权重矩阵,是一个非负的向量, $\omega_i \geq 0$  满足非递减性即  $0 \leq \omega_1 \leq \dots \leq \omega_i \leq \dots \leq \omega_{\min(m,n)}$ 。接着给加权 Schatten- $p$  范数以  $p$  次幂,得到

$$\|L\|_{w,s_p}^p = \sum_{i=1}^{\min(m,n)} \omega_i \sigma_i^p, \quad (4)$$

其中,权重计算式  $\omega_i = C \sqrt{mn} / [\sigma_i(L) + \epsilon]$ ,  $C$  为一个大于零的常数, $\epsilon$  表示一个极小的常数,通常取  $10^{-16}$ 。

### 2.3 稀疏建模

RPCA 算法中对稀疏矩阵  $S$  使用  $l_1$  范数进行约束, $l_1$  范数对矩阵中的每个元素进行独立处理,但是前景目标的移动在空间上是连续的,利用这一

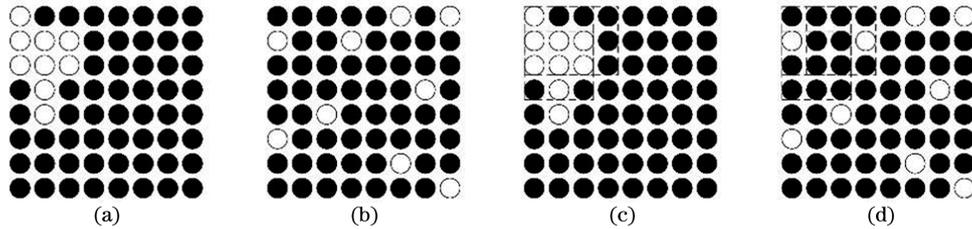


图 1 基于 3 pixel×3 pixel 重叠组结构图。(a)(b)两种不同的前景分布;(c)(d)两种不同分布的重叠组

Fig. 1 Structured figures based on 3 pixel×3 pixel overlapping group. (a)(b) Two different foreground distributions; (c)(d) overlapping group of two different distributions

在前景矩阵中每帧图像被视为一列元素,那么对于整个前景矩阵  $S$  的结构化稀疏范数约束可表示为

$$\Omega(S) = \sum_{j=1}^n \sum_{g \in G} \|s_g^{(j)}\|_{\infty}, \quad (5)$$

式中: $s_g^{(j)}$  表示第  $j$  帧被窗口覆盖的元素; $s^{(j)} \in \mathbb{R}^m$  表示前景矩阵  $S$  的第  $j$  列元素即视频的第  $j$  帧; $g$  表示窗口所覆盖元素的子空间, $G$  表示  $g$  的集合, $\|s_g^{(j)}\|_{\infty}$  表示  $s_g^{(j)}$  的  $l_{\infty}$  范数。

### 2.4 模型建立及求解

基于以上两种范数约束,用(4)式与(5)式分别替代(1)式中的低秩部分与稀疏部分得到低秩稀疏分解模型,该模型可表示为

$$\min_{L,S} \|L\|_{w,s_p}^p + \lambda \Omega(S), \text{ s. t. } D = L + S. \quad (6)$$

上述优化问题的求解采用 ALM 算法完成。具体的求解步骤如下。

1) 构造增广拉格朗日函数。

结构先验信息,文献[20]提出了基于重叠组的结构化稀疏范数。

如图 1 所示,假设在一个 8 pixel×8 pixel 图像上的稀疏前景有两种不同分布,如图 1(a)和图 1(b)所示,图中白色表示像素灰度值大,黑色表示像素灰度值小。由于  $l_1$  范数表示所有元素绝对值之和,因此在这两种情况下  $l_1$  范数将会有相似的值。结构化稀疏范数是利用一个  $t$  pixel× $t$  pixel 的窗口在图像上逐行逐列的滑动,获取每个窗口对应的  $l_{\infty}$  范数。本文采用 3 pixel×3 pixel 大小的窗口,相邻窗口之间有 6 个像素重叠,在 8 pixel×8 pixel 的图像上,可预先得到 36 组 3 pixel×3 pixel 的子空间  $g$ ,即  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_{36}\}$ ,然后取每个子空间的  $l_{\infty}$  范数即每组子空间的最大值。因此对于图 1(a)和图 1(b)则会产生两个明显不同的值。由于在图 1(d)中有更多的组包含较大值的像素,故图 1(c)的值比图 1(d)的值会小很多。在前景最小稀疏的要求下,图 1(a)将更有可能被认为是前景。

$$L(L, S, Y; \mu) = \|L\|_{w,s_p}^p + \lambda \Omega(S) + \langle Y, D - L - S \rangle + \frac{\mu}{2} \|D - L - S\|_F^2, \quad (7)$$

式中: $\mu$  为正的惩罚因子; $Y$  为拉格朗日乘子向量; $\|\cdot\|_F$  表示矩阵  $F$  范数。

2) 求解下面的 3 个子问题。

$$L = \arg \min_L L(L, S, Y; \mu), \quad (8)$$

$$S = \arg \min_S L(L, S, Y; \mu), \quad (9)$$

$$Y = Y + \mu(D - L - S). \quad (10)$$

3) 固定  $S$  和  $Y$ ,求解  $L$ 。

$$L_{k+1} = \arg \min_L \frac{1}{\mu_k} \|L\|_{w,s_p}^p + \frac{1}{2} \left\| L - \left( D - S_k + \frac{Y_k}{\mu_k} \right) \right\|_F^2. \quad (11)$$

采用文献[21]中广义软阈值算法(GST)求解(11)式。

4) 固定  $L$  和  $Y$ ,求解  $S$ 。

$$S_{k+1} = \operatorname{argmin}_S \frac{\lambda}{\mu_k} \Omega(S) + \frac{1}{2} \left\| \left( D - L_{k+1} + \frac{Y_k}{\mu_k} \right) - S \right\|_F^2. \quad (12)$$

采用文献[22]中的二次最小割方法求解(12)式。

5) 固定  $L$  和  $S$ , 求解  $Y$ 。

$$Y_{k+1} = Y_k + \mu_k (D - L_{k+1} - S_{k+1}). \quad (13)$$

6) 更新  $\mu_k$ 。

$$\mu_{k+1} = \min(\rho\mu_k, 10^7\mu_k). \quad (14)$$

### 3 实验结果及分析

#### 3.1 实验环境

为了验证所提算法的有效性, 选取三个主流数据库: I2R<sup>[23]</sup>、CDnet2014<sup>[24]</sup>、Wallflower<sup>[25]</sup> 中具有复杂背景特点的 9 段视频进行对比实验。

它们分别是: I2R: Airport、Bootstrap、Curtain、SwitchLight、WaterSurface; CDnet2014: Highway、Office; Wallflower: CamouFlage、WavingTrees。

所选数据集的特点见表 1。

对每段视频数据集等距选取 100 frame 进行实验, 并与主流 GoDec、PCP、LSD、WNNM、WSNM 算法进行对比实验。本文所有实验的运行环境均为 Intel(R)Core(TM)i7-8550U 1.80 GHz 8 GB 内存, MATLAB2017a, 对得到的所有实验结果都进行 5 pixel×5 pixel 中值滤波后处理。

表 1 对比的 9 段视频数据集信息

Table 1 Information of 9 video datasets for comparison

Dataset	Video resolution / (pixel×pixel)	Scene feature
Airport	176×144	Dynamic background, changing time information on the frame
Bootstrap	160×120	Static background, some moving people in the room
Curtain	160×128	Dynamic background, the curtains moving slowly and light change gradually
SwitchLight	160×128	Dynamic background, light mutation
WaterSurface	160×128	Dynamic background, water surface fluctuation
Highway	320×240	Dynamic background, the high speed vehicle and the moving shadow
Office	360×240	Static background, a people moving locally with strong light
CamouFlage	160×120	Dynamic background, background with a changing screen
WavingTrees	160×120	Dynamic background, the swinging branch

根据已有算法的经验, 本文实验所采用的终止条件为  $\|D - L_{k+1} - S_{k+1}\|_F^2 / \|D\|_F^2 \leq 10^{-7}$ , 部分参数的取值  $\epsilon = 10^{-16}$ ,  $\rho = 1.05$ ,  $\lambda = 1/\sqrt{m}$ ,  $\mu_1 = 12.5/\sigma_1(D)$ ,  $\sigma_1(D)$  表示矩阵  $D$  的最大奇异值,  $k$  从 1 开始。对于参数  $p$  的取值, 由文献[18]中的定量实验可以得出, 当  $p = 0.7$  时, 恢复效果最好且对秩大小和噪声敏感性最小, 故本文中  $p$  取 0.7。对比算法的实验具体参数请参考文献[13, 14, 15, 17, 20]。关于  $C$  的取值将在 3.2 中讨论。

#### 3.2 评价标准

采用综合测量指标  $F_{\text{measure}}$  对分离效果进行评价, 其表达式为

$$F_{\text{measure}} = \frac{2rp}{r+p}, \quad (15)$$

式中:  $p = \frac{T_p}{T_p + F_p}$  表示准确率, 即算法正确恢复的

前景像素与算法恢复的全部前景像素的比值;  $r = \frac{T_p}{T_p + F_N}$  表示召回率, 即算法正确恢复的前景像素与真实前景像素的比值;  $T_p$  表示将前景像素判断为前景像素即算法判断正确的前景像素个数;  $F_p$  表示将背景像素判断为前景像素即算法判断错误的前景像素个数;  $F_N$  表示将前景像素判断为背景像素即算法没有判断出的前景像素个数。由(14)式可知,  $F_{\text{measure}}$  的值越高, 分离效果越好。

以 Airport 数据集为例, 固定其他参数不变,  $C$  的取值在 [0.1, 1] 之间, 以 0.1 为步长进行分析。通过图 2 可以看出, 当  $C = 0.1$  时,  $F_{\text{measure}}$  值最高, 故本文  $C$  取 0.1。

#### 3.3 对比实验结果及分析

在不同的数据库中所提供的真实前景的帧数也不同, I2R 提供了 20 帧, CDnet2014 提供了所有帧

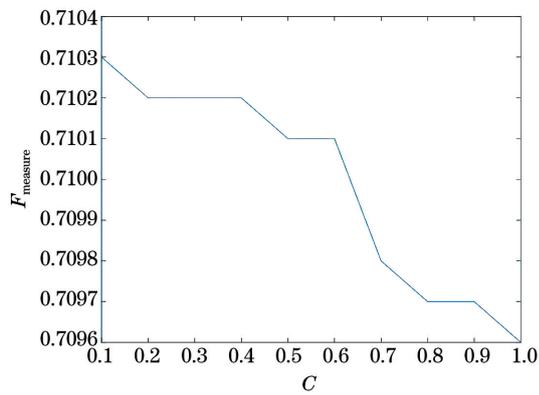


图 2 Airport 数据集中不同 C 值下的  $F_{measure}$  值  
Fig. 2  $F_{measure}$  values under the different C values on Airport dataset

的真实前景, Wallflower 只提供了最具代表性的一帧。得到的实验结果如图 3 所示, 表 2 给出了定量实验下的  $F_{measure}$  值。

图 3 展示了 GoDec、LSD、PCP、WNNM、WSNM 与本文所提算法在 Airport, Bootstrap, Curtain, SwitchLight, WaterSurface, Highway, Office, CamouFlage, WavingTrees 这 9 个场景下分离出的前景效果, 从 Bootstrap 数据集中可以看出所提算法对于静态背景下的前背景分离同其他方法并无多大差异。从 SwitchLight 数据集中可以看出本文方法无法应用于光照突变这一情况, 但在其他复杂多变的动态背景下都具有优异的分隔效果, 尤其是在 CamouFlage 数据集上, 它的背景是变化的计算机屏幕, 在其他算法失效的情况下, 所提算法仍能正确分离前景与背景, 显示出其优异的性能。从表 2 中的测量指标  $F_{measure}$  值可以看出, 9 个数据集中具有动态背景的数据集的  $F_{measure}$  值多属于最高值或次高值, 并且本文所提算法在所有方法中的  $F_{measure}$  平均值最高, 故综合来看, 性能在整体上优于其他对比算法。

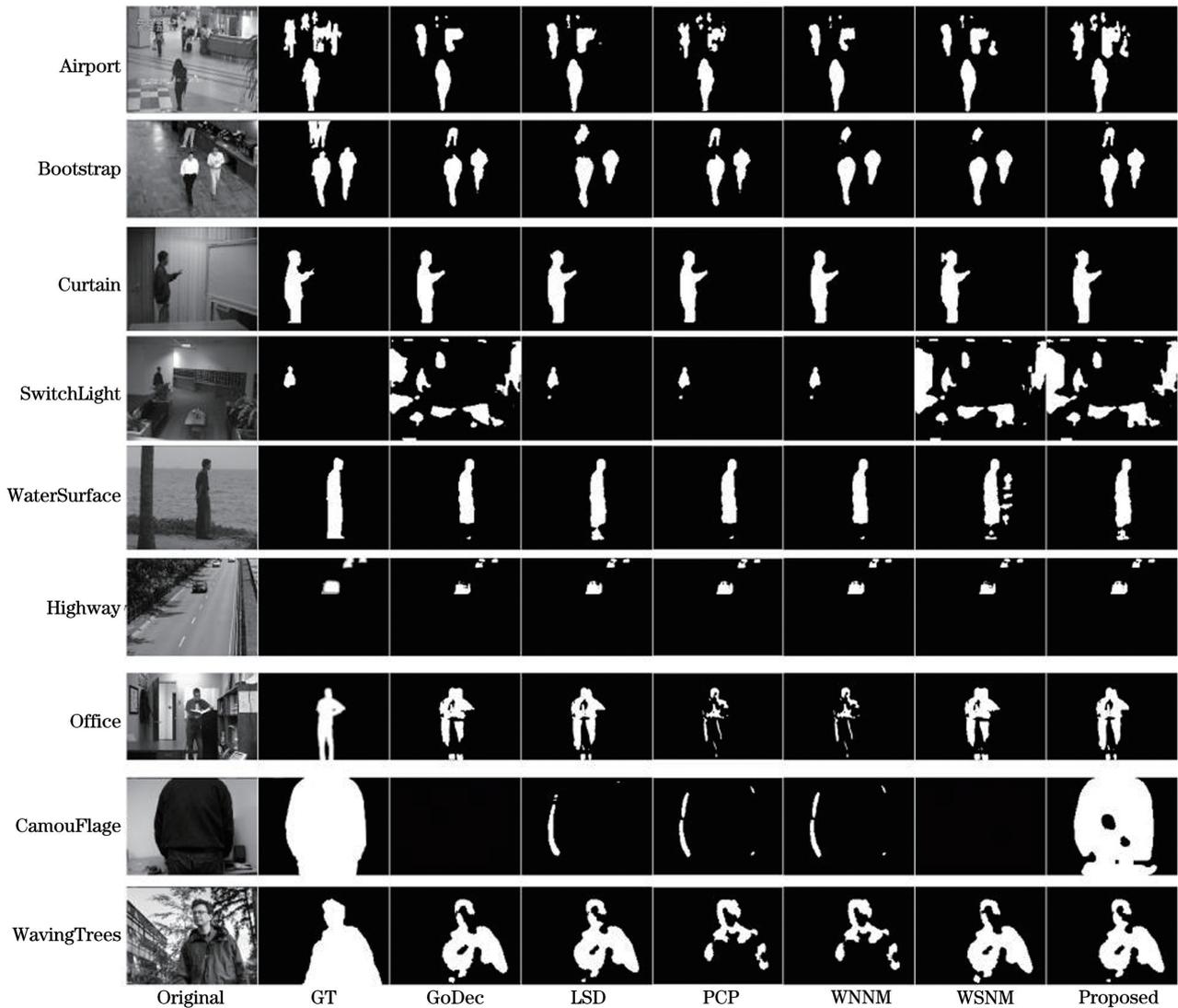


图 3 6 种算法在 9 个序列的结果

Fig. 3 Results of six algorithms on nine sequences

表 2 6 种算法的  $F_{\text{measure}}$  值  
Table 2  $F_{\text{measure}}$  values of six algorithms

Video	$F_{\text{measure}}$					
	GoDec	LSD	PCP	WNNM	WSNM	Proposed
Airport	0.6601	<b>0.7273</b>	0.6601	0.6601	0.6166	<u>0.7103</u>
Bootstrap	0.5110	<u>0.5126</u>	0.5088	0.5088	0.4866	<b>0.5135</b>
Curtain	0.8307	<u>0.8596</u>	0.8309	0.8307	0.8270	<b>0.8614</b>
SwitchLight	0.1268	0.7884	<u>0.7966</u>	<b>0.7989</b>	0.1290	0.1322
WaterSurface	0.8739	<b>0.9170</b>	0.8677	0.8661	0.8412	<u>0.9096</u>
Highway	0.8052	0.8862	<u>0.8887</u>	<b>0.8894</b>	0.8143	0.8869
Office	<u>0.4913</u>	0.4647	0.3777	0.3792	<b>0.4943</b>	0.4648
CamouFlage	0.0000	0.0767	<u>0.1153</u>	0.1146	0.0000	<b>0.9487</b>
WavingTrees	0.7057	<b>0.7213</b>	0.4129	0.4146	0.7081	<u>0.7208</u>
Average	0.5561	<b>0.6615</b>	0.6065	0.6069	0.5463	<b>0.6831</b>

\* Note: bold data represent best, and data with underline represent second-best.

## 4 结 论

基于以上两种约束,分别对低秩与稀疏部分进行建模,提出了一种用于视频前背景分离的低秩稀疏分解模型。低秩部分采用加权 Schatten- $p$  范数,该范数能更精确地逼近秩函数,抑制测量时产生的噪声,进而更适合背景建模;稀疏部分采用基于重叠组的结构化稀疏范数,利用前景结构信息,能够更加准确地判断前景目标,进而更有利于前景建模。实验结果表明,所提算法对光照突变场景的鲁棒性不佳,但是在静态背景下可以获得很好的分离效果,并且在具有复杂多样的动态变化背景中可以获得更好的分离效果。

下一步的工作中,不仅要考虑光照突变这类情况,使其更具鲁棒性,而且还要考虑摄像机移动情况。

## 参 考 文 献

- [1] Zhang H, Zuo X L, Huang Y. Feature selection based on the correlation of sparse coefficient vectors with application to SAR target recognition [J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2020, 57(14): 141029.  
张虹, 左鑫兰, 黄瑶. 基于稀疏表示系数相关性的特征选择及 SAR 目标识别方法[J]. 激光与光电子学进展, 2020, 57(14): 141029.
- [2] Ma M Y, Wang D J, Sun H, et al. Infrared dim-small target detection based on robust principal component analysis and multi-point constant false

alarm [J]. Acta Optica Sinica, 2019, 39(8): 0810001.

马铭阳, 王德江, 孙嵩, 等. 基于稳健主成分分析和多点恒虚警的红外弱小目标检测[J]. 光学学报, 2019, 39(8): 0810001.

- [3] Yin K, Li J L, Li L, et al. Adaptive feature update object-tracking algorithm in complex situations [J]. Acta Optica Sinica, 2019, 39(11): 1115002.  
尹宽, 李均利, 李丽, 等. 复杂情况下自适应特征更新目标跟踪算法[J]. 光学学报, 2019, 39(11): 1115002.
- [4] Qian Q S, Hu Y H, Zhao N X, et al. Object tracking method based on joint global and local feature descriptor of 3D LIDAR point cloud [J]. Chinese Optics Letters, 2020, 18(6): 061001.
- [5] Wang Q, Yu S Y, Tan L Y, et al. Approach for recognizing and tracking beacon in inter-satellite optical communication based on optical flow method [J]. Optics Express, 2018, 26(21): 28080-28090.
- [6] Peng B, Cai X Y, Zhang Y J, et al. Automatic vehicle detection from UAV videos based on symmetrical frame difference and background block modeling [J]. Journal of Southeast University (Natural Science Edition), 2017, 47(4): 685-690.  
彭博, 蔡晓禹, 张有节, 等. 基于对称帧差和分块背景建模的无人机视频车辆自动检测[J]. 东南大学学报(自然科学版), 2017, 47(4): 685-690.
- [7] Elkabetz A, Yitzhaky Y. Background modeling for moving object detection in long-distance imaging through turbulent medium [J]. Applied Optics, 2014, 53(6): 1132-1141.

- [8] Zhu X, Zhang C, Xue J P, et al. Background subtraction via time continuity and texture consistency constraints [J]. *Journal of The Optical Society of America A*, 2019, 36(9): 1495-1504.
- [9] Donoho D L. Compressed sensing [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(4): 1289-1306.
- [10] Candès E J, Wakin M B. An introduction to compressive sampling [J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2008, 25(2): 21-30.
- [11] Candès E J, Tao T. Near-optimal signal recovery from random projections: universal encoding strategies? [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(12): 5406-5425.
- [12] Candès E J, Li X, Ma Y, et al. Robust principal component analysis [J]. *Journal of the ACM*, 2011, 58(3): 1-37.
- [13] Wright J, Ganesh A, Rao S, et al. Robust principal component analysis: exact recovery of corrupted low-rank matrices [C] // *Advances in Neural Information Processing Systems 22: 23rd Annual Conference on Neural Information Processing Systems*, December 7-10, 2009, Vancouver, British Columbia, Canada. New York: NIPS, 2009: 2080-2088.
- [14] Zhou T Y, Tao D C. GoDec: randomized low-rank & sparse matrix decomposition in noisy case [C] // *Proceedings of 2011 International Conference on International Conference on Machine Learning*, June 28-July 28, 2011, Bellevue, Washington, United States. New Jersey: IMLS, 2011, 978: 33-40
- [15] Gu S H, Xie Q, Meng D Y, et al. Weighted nuclear norm minimization and its applications to low level vision [J]. *International Journal of Computer Vision*, 2017, 121(2): 183-208.
- [16] Zhang D B, Hu Y, Ye J P, et al. Matrix completion by truncated nuclear norm regularization [C] // *2012 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, June 16-21, 2012, Providence, RI, USA. New York: IEEE Press, 2012: 2192-2199.
- [17] Nie F P, Huang H, Ding C. Low-rank matrix recovery via efficient Schatten  $p$ -norm minimization [J]. *Proceedings of the National Conference on Artificial Intelligence*, 2012, 1: 655-661.
- [18] Xie Y, Gu S H, Liu Y, et al. Weighted Schatten  $p$ -norm minimization for image denoising and background subtraction [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2016, 25(10): 4842-4857.
- [19] Guyon C, Bouwmans T, Zahzah E H. Foreground detection based on low-rank and block-sparse matrix decomposition [C] // *2012 19th IEEE International Conference on Image Processing*, September 30-October 3, 2012, Orlando, FL, USA. New York: IEEE Press, 2012: 1225-1228.
- [20] Liu X, Zhao G Y, Yao J W, et al. Background subtraction based on low-rank and structured sparse decomposition [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2015, 24(8): 2502-2514.
- [21] Zuo W M, Meng D Y, Zhang L, et al. A generalized iterated shrinkage algorithm for non-convex sparse coding [C] // *2013 IEEE International Conference on Computer Vision*, December 1-8, 2013, Sydney, NSW, Australia. New York: IEEE Press, 2013: 217-224.
- [22] Mairal J, Jenatton R, Bach F, et al. Network flow algorithms for structured sparsity [C] // *Advances in Neural Information Processing Systems 23: 24th Annual Conference on Neural Information Processing Systems 2010*, December 6-9, 2010, Vancouver, British Columbia, Canada. New York: NIPS, 2010: 1558-1566.
- [23] Li L Y, Huang W M, Gu Irene Y H, et al. Statistical modeling of complex backgrounds for foreground object detection [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2004, 13(11): 1459-1472.
- [24] Wang Y, Jodoin P M, Porikli F, et al. CDnet 2014: an expanded change detection benchmark dataset [C] // *2014 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Workshops*, June 23-28, 2014, Columbus, OH, USA. New York: IEEE Press, 2014: 393-400.
- [25] Toyama K, Krumm J, Brumitt B, et al. Wallflower: principles and practice of background maintenance [C] // *Proceedings of the Seventh IEEE International Conference on Computer Vision*, September 20-27, 1999, Kerkyra, Greece. New York: IEEE Press, 1999: 255-261.