

# 激光与光电子学进展

## 双波长干涉技术中改进的最小公倍数有效波长法

郭小庭<sup>\*\*</sup>, 刘晓军, 雷自力, 杨文军, 徐龙<sup>\*</sup>

华中科技大学机械科学与工程学院, 湖北 武汉 430074

**摘要** 在双波长干涉仪中,传统的等效波长法只是利用了单波长包裹相位之间的差值信息,忽略了它们的大小和正负信息。基于最小公倍数的有效波长法直接利用多个单波长包裹相位信息,可以实现比传统等效波长方法更大的无模糊测量范围,且没有误差放大效应。然而已有的最小公倍数有效波长解相位算法主要基于查表法,速度较慢,不适用于实际测量。提出了一种新的算法,可大幅提高最小公倍数有效波长法的计算速度,该方法可应用于双波长或多波长干涉仪中。

**关键词** 测量; 表面测量; 双波长干涉仪; 等效波长; 最小公倍数; 无模糊测量范围

中图分类号 O436

文献标志码 A

doi: 10.3788/LOP202158.0712002

### Improved Least Common Multiple Effective Wavelength Method Used in Dual-Wavelength Interferometry

Guo Xiaoting<sup>\*\*</sup>, Liu Xiaojun, Lei Zili, Yang Wenjun, Xu Long<sup>\*</sup>

School of Mechanical Science and Engineering, Huazhong University of Science and Technology,  
Wuhan, Hubei 430074, China

**Abstract** In the dual-wavelength interferometer, the traditional equivalent wavelength method only uses the difference information between two single wavelength wrapped phases, and ignores their size as well as positive and negative information. The effective wavelength method based on the least common multiple directly uses the wrapped phase information of multiple single wavelengths, and thus not only it can achieve a larger unambiguous measurement range than the traditional equivalent wavelength method, but also it has no error amplification effect. However, the existing least common multiple effective wavelength phase unwrapping algorithm is mainly based on the look-up table method, which is slow and not suitable for a practical measurement. In this paper, a new algorithm is proposed, which can greatly improve the calculation speed of the least common effective wavelength method, so that it can be applied in dual-wavelength or multi-wavelength interferometers.

**Key words** measurement; surface measurement; dual-wavelength interferometry; equivalent wavelength; least common multiple; unambiguous measurement range

**OCIS codes** 120.6650; 120.5050; 120.3180; 120.2830

收稿日期: 2020-07-28; 修回日期: 2020-08-14; 录用日期: 2020-09-03

基金项目: 国家自然科学基金(51475192, 51905200, 51975233)

<sup>\*</sup>E-mail: xulong@hust.edu.cn; <sup>\*\*</sup>E-mail: hor2ld@hust.edu.cn

## 1 背景

在表面形貌测量领域,常用的等效波长( $\lambda_{eq}$ )法可扩展单波长相移干涉无模糊高度测量范围<sup>[1-23]</sup>。2015年,Safrani等<sup>[13]</sup>研究了用于高速三维成像的基于双波长的并行相移干涉仪,该干涉仪以669 nm和735 nm两种高功率LED作为光源,可以实现3.7  $\mu\text{m}$ 深的大台阶表面测量。2017年,Li等<sup>[14]</sup>研究了基于主成分分析的同步相移双波长干涉仪,实验以632.8 nm的He-Ne激光器和532 nm的二极管泵浦固体激光器作为光源,测量对象为一块高度为1.536  $\mu\text{m}$ 的涡旋相位板。2018年,Tian等<sup>[17]</sup>介绍了一种用于高速测量大垂直范围非连续微结构和表面粗糙度的单次曝光多波长干涉显微镜。当显微镜使用中心波长分别为442.8,533.3,659.8 nm的激光并以联合中心波长为629.7 nm的LED作为光源时,最大合成波长可达42  $\mu\text{m}$ ,可测量10  $\mu\text{m}$ 深度的台阶样板。2020年,Liu等<sup>[21]</sup>对同步双波长相移干涉仪进行了研究,以解决干涉仪在测量表面形貌时遇到的振动干扰问题。他们使用白光LED作为照明光源,使用两个相机分别采集中心波长为589 nm和620 nm的光波干涉信息。基于等效波长方法,他们实现了数微米深度的台阶表面测量。但是,等效波长法只利用了双波长包裹相位之间的差值信息,忽略了它们各自的正负和大小信息。因此,等效波长法只能将无模糊高度测量范围扩大到正负四分之一等效波长。与等效波长法不同,最小公倍数有效波长( $\lambda_{lcm}$ ,表示波长 $\lambda_1, \lambda_2$ 的最小公倍数)法是一种直接利用双波长包裹相位信息的技术,它可以将无模糊高度测量范围扩大至正负四分之一最小公倍数有效波长<sup>[24-30]</sup>。一般情况下, $\lambda_{lcm} > \lambda_{eq}$ ,因此最小公倍数有效波长法可以实现更大的无模糊高度测量范围。利用最小公倍数有效波长法可以直接得到具有单波长测量精度的结果(等效波长法只能首先得到误差放大的结果,然后再通过单波长级次辨识得到单波长测量精度)。但是,现有的最小公倍数有效波长法的解相位算法主要是查表法<sup>[24]</sup>。该方法计算量大,速度慢,不利于最小公倍数有效波长法的实际应用。通过对最小公倍数有效波长法的基本原理进行分析,本文提出了一种可以在正负四分之一最小公倍数有效波长范围内快速定位最佳高度值的算法,极大地提高了计算速度,并进行了仿真和实验验证。

## 2 算法原理

双波长相移干涉技术中最小公倍数有效波长法的基本原理如果图1所示<sup>[25]</sup>。图1表示的是随着表面高度从 $-\frac{\lambda_{lcm}}{4}$ 连续变化至 $+\frac{\lambda_{lcm}}{4}$ 点 $P(\varphi_2, \varphi_1)$ 的移动轨迹,该点以 $\lambda_2$ 对应的包裹相位 $\varphi_2$ 为横坐标,以 $\lambda_1$ 对应的包裹相位 $\varphi_1$ 为纵坐标,其中 $\lambda_1: \lambda_2 = 7:3$ 。当表面高度等于 $-\frac{\lambda_{lcm}}{4}$ 或 $+\frac{\lambda_{lcm}}{4}$ 时, $\varphi_1, \varphi_2$ 恰好同时等于 $-\pi$ 或 $+\pi$ 。当表面高度继续减小或增加时,坐标点轨迹开始重复。由此可以看出,在 $(-\frac{\lambda_{lcm}}{4}, \frac{\lambda_{lcm}}{4})$ 范围内,表面高度值和点 $P(\varphi_2, \varphi_1)$ 是一一对应的,也就是说双波长相移干涉技术真正的无模糊高度测量范围应该是 $(-\frac{\lambda_{lcm}}{4}, \frac{\lambda_{lcm}}{4})$ 。与传统的等效波长 $\lambda_{eq}$ 相比,一般有 $\lambda_{lcm} = N\lambda_{eq}$ (其中 $N$ 为大于或等于1的整数)。比如取 $\lambda_1 = 632 \text{ nm}, \lambda_2 = 532 \text{ nm}$ 时,有 $\lambda_{eq} = 3362.24 \text{ nm}, \lambda_{lcm} = 84056 \text{ nm}, \lambda_{lcm} = 25 \cdot \lambda_{eq}$ 。如图1所示,当取 $\lambda_1 = 700 \text{ nm}, \lambda_2 = 300 \text{ nm}$ 时,有 $\lambda_{eq} = 525 \text{ nm}, \lambda_{lcm} = 2100 \text{ nm}, \lambda_{lcm} = 4 \cdot \lambda_{eq}$ 。因此,最小公倍数有效波长法可以实现比传统等效波长法更大的无模糊高度测量范围。

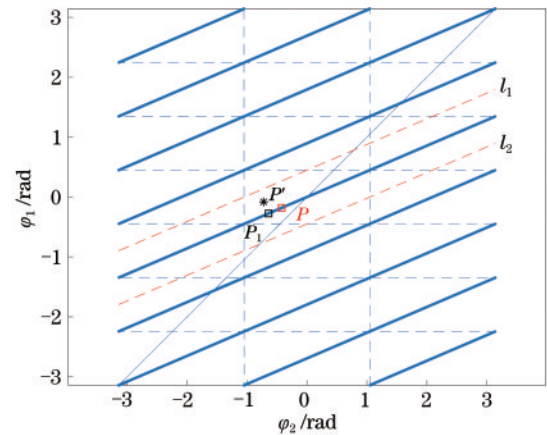


图1 双波长干涉包裹相位轨迹图  
Fig. 1 Wrapped phase trajectories for dual-wavelength interference

由于表面高度和 $P$ 点坐标在 $(-\frac{\lambda_{lcm}}{4}, \frac{\lambda_{lcm}}{4})$ 范围内是一一对应的,因此在进行表面高度计算时,我们可以采取以下步骤。首先,依据照明波长,我们可以事先建立表面高度与坐标 $(\varphi_2, \varphi_1)$ 的对应关系,以表格的形式存储下来。然后,依据实际计算得到的单波长的包裹相位 $(\varphi'_2, \varphi'_1)$ ,在表中查找得到对应

的表面高度,这就是简单而直接的查表法。需要说明的是,在实际测量过程中,因为误差的存在,实际计算得到的包裹相位点可能并不位于理想的直线轨迹上,如  $P'$ 。此时我们需要计算直线轨迹上与它相距最近的点,以点  $P_1$  对应的表面高度以作为输出。这里假定误差并未使坐标点偏离实际位置太远,即保持在图 1 所示的  $l_1$ 、 $l_2$  两条虚线以内。过大的误差将引起表面高度计算的跳变,导致计算失败,因此基于最小公倍数有效波长进行正确的表面高度计算有一个误差容限问题<sup>[25,31]</sup>。由于每一次测量都要与  $(-\frac{\lambda_{\text{lcm}}}{4}, \frac{\lambda_{\text{lcm}}}{4})$  范围内的所有点进行比较,以寻找距离最近的点,所以查表法速度很慢,不利于最小公倍数有效波长法的实际应用。通过对最小公倍数有效波长法进行深入分析,我们发现了另外一种更加快速的表面高度定位方法,本文中将其称之为几何高度定位法,如图 2 所示。

首先确定图 2 中各条直线轨迹的数学表达式为  $\varphi_1 = k\varphi_2 + b_n (n=1, 2, \dots, 9)$ , 其中  $b_n$  为直线的截距,  $k$  为直线的斜率。由于已知  $k = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ , 因此我们只需要求出各直线的截距  $b_n$ , 就可以确定各条直线的表达式。截距  $b_n$  可以根据各直线上某已知点的坐标来求取。这里选择各直线的上端点(对应的高度

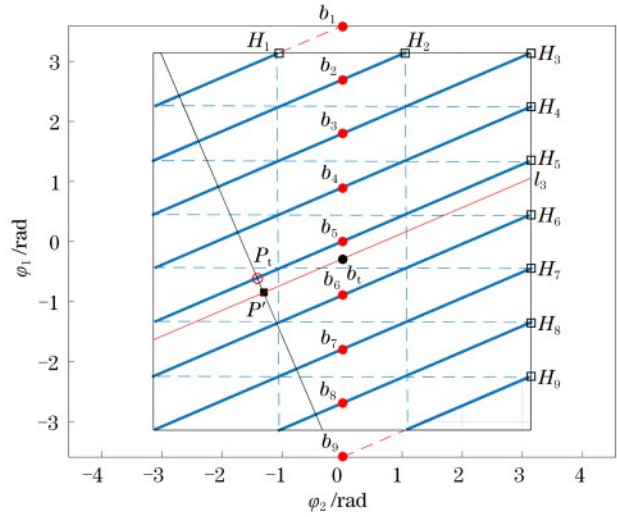


图 2 几何高度定位算法的原理图

Fig. 2 Principle diagram of geometric height positioning algorithm

为  $H_n$ ), 它对应着无模糊测量范围内  $\varphi_1$  或  $\varphi_2$  等于  $\pi$  的高度位置, 即

$$H_n = (2m_1 + 1) \cdot \frac{\lambda_1}{4} \text{ or } (2m_2 + 1) \cdot \frac{\lambda_2}{4}, \quad (1)$$

式中:  $m_1$  和  $m_2$  均为整数,  $m_1 \in [-M, M]$ ,  $m_2 \in [-N, N]$ ,

$$\text{其中 } M = \frac{(\lambda_{\text{lcm}}/4 - \lambda_1/4)}{\lambda_1/2}, N = \frac{(\lambda_{\text{lcm}}/4 - \lambda_2/4)}{\lambda_2/2}.$$

图 2 中的上端点具体坐标为

$$(\varphi_{2n}, \varphi_{1n}) = \left[ \frac{4\pi H_n}{\lambda_2} - 2\pi \cdot \text{round}\left(\frac{2H_n}{\lambda_2}\right), \frac{4\pi H_n}{\lambda_1} - 2\pi \cdot \text{round}\left(\frac{2H_n}{\lambda_1}\right) \right], \quad (2)$$

式中:  $\text{round}(\cdot)$  是取整函数。进而计算出各条直线的截距  $b_n = \varphi_{1n} - k\varphi_{2n}$ 。

从上述直线轨迹  $\varphi_1 = k\varphi_2 + b_n (n=1, 2, \dots, 9)$  中选出距离  $P'$  点最近的直线。具体方法为: 首先计算出经过  $P'$  点且斜率等于  $k$  的直线的截距  $b_1$ , 然后计算使得  $|b_n - b_1|$  最小的  $b_n$ , 假定为  $b_k$ 。则点  $P'$  距离直线  $\varphi_1 = k \cdot \varphi_2 + b_k$  最近。在图 2 中,  $k=5$ 。

然后计算直线  $\varphi_1 = k \cdot \varphi_2 + b_k$  上距离点  $P'$  最近的点  $P_1$  的坐标  $(\varphi_{11}, \varphi_{21})$ :

$$\begin{cases} \varphi_{11} = \left( k\varphi'_1 + \varphi'_2 + \frac{1}{k}b_k \right) / \left( k + \frac{1}{k} \right) \\ \varphi_{21} = \left( \varphi'_1 + \frac{1}{k}\varphi'_2 - b_k \right) / \left( k + \frac{1}{k} \right) \end{cases}, \quad (3)$$

式中:  $\varphi'_1$ 、 $\varphi'_2$  分别为  $P'$  点的两个包裹相位。

最后计算出  $P_1$  点对应的高度值, 将其作为待求点  $P'$  的高度:

$$H_1 = H_k + \frac{(-\varphi_{21})}{4\pi} \lambda_2 \text{ or } H_k + \frac{(-\varphi_{11})}{4\pi} \lambda_1, \quad (4)$$

式中:  $H_k$  为直线  $\varphi_1 = k \cdot \varphi_2 + b_k$  上端点对应的高度值。

### 3 仿真与实验

假定双波长  $\lambda_1 = 632 \text{ nm}$ ,  $\lambda_2 = 532 \text{ nm}$ , 则  $\lambda_{\text{eq}} = 3362.24 \text{ nm}$ ,  $\lambda_{\text{lcm}} = 84.056 \mu\text{m}$ 。为了简便起见, 本文选用具有凹槽特征的二维轮廓并使用 MATLAB 进行仿真实验, 如图 3 所示。凹槽深度为  $3 \mu\text{m}$ , 大于  $\frac{\lambda_{\text{eq}}}{4} = 840.56 \text{ nm}$ , 小于  $\frac{\lambda_{\text{lcm}}}{4} = 21.014 \mu\text{m}$ 。

首先模拟计算光学干涉方法获得的待测轮廓包裹相位  $\varphi_1(x)$  和  $\varphi_2(x)$ , 假定二者含有相同的随机误差取值区间, 随机误差的最大绝对值为  $0.01 \text{ rad}$ , 对应的最大绝对高度误差分别为  $0.5 \text{ nm}$  和  $0.4 \text{ nm}$ 。然后分别应用传统的查表法和本文所提的几何高

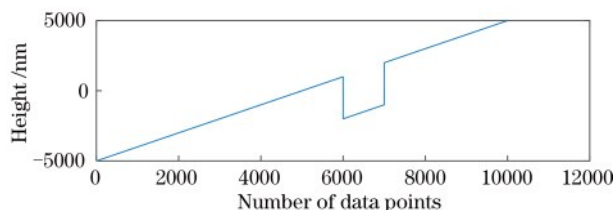


图 3 待测凹槽轮廓

Fig. 3 Profile of groove to be measured

度定位算法进行轮廓恢复,比较两种方法的精度和计算速度,结果如表 1 所示。

两种方法所搜寻的高度区间均为  $[-21, 21]$ , 单位为  $\mu\text{m}$ 。查表法给出了三个不同的点距,对应不同大小的一维高度数组。点距越小,数组越大,搜寻所需的时间越多。而本文所提出的方法则不存在上述问题,因为它采用了不同的搜寻策略。可以看出,本文所提方法的计算精度与查表法相同,但用时远小于查表法。

表 1 查表法与所提方法的计算性能比较

Table 1 Computational performance comparison between look-up table method and proposed method

Method	Parameter	Value	Value	Value
Look-up table method	Dot pitch /nm	0.5	0.2	0.1
	Maximum error /nm	0.5	0.4	0.5
	Cost time /s	29.8	82	189.1
Proposed method	Maximum error /nm		0.45	
	Cost time /s		0.2	

利用自行搭建的多波长同步相移显微干涉仪 (图 4) 对某金属单刻线样板 (标准高度  $H = 1.2 \mu\text{m}$ )

进行测量。图 4(a)、(b) 所示的多波长同步相移显微干涉仪是改进的基于棱镜分光的单色光同步相

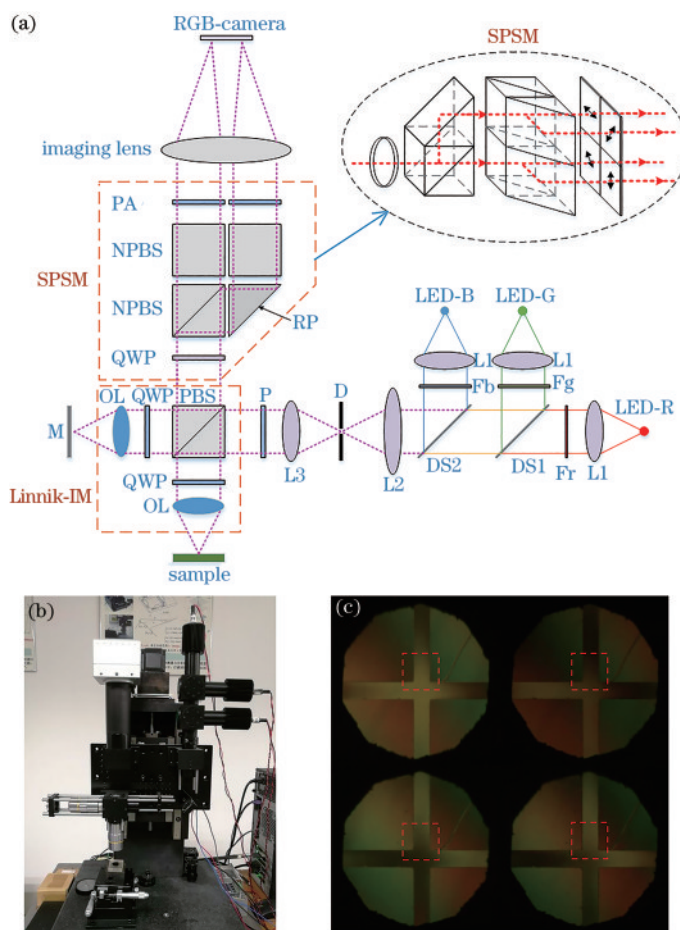


图 4 多波长同步相移显微干涉仪。(a)原理图;(b)实物图;(c)彩色干涉图(红绿光)

Fig. 4 Multi-wavelength simultaneous phase shifting micro-interferometer. (a) Principle diagram; (b) physical picture; (c) color interferogram (red and green lights)

移显微干涉系统<sup>[32]</sup>,可满足动态样件和振动环境下大台阶表面形貌的测量需求。光路结构由红绿蓝三色 LED 组合照明光路、Linnik 型显微干涉模块 (Linnik-IM)、分光移相模块 (SPSM) 和成像光路组成。红绿蓝三色 LED 组合照明光路由三个单色单颗 LED 灯珠 (R, G, B)、对应的收集透镜 (L1) 和滤色片 (Fr, Fg, Fb)、合束片 (DS1, DS2)、扩束准直镜组 (L2, D, L3) 和起偏器 (P) 组成。滤色片 Fr, Fg, Fb 的带宽均为 10 nm, 中心波长分别为 632.7, 533.2, 449.5 nm。合束片 DS1 和 DS2 均采用二向色片 (Dichroic slices), 分别具有反绿透红和反蓝透红绿的特性, 可保证合束过程的光能利用率。扩束准直镜组由两片透镜 (L2, L3) 和一个孔阑 (D) 组成, 主要是将光束直径调节至合适的大小, 同时调节干涉图的视场直径。起偏器 P 用于调节测量光和参考光的强度, 使其不会相差过大。Linnik 型显微干涉模块由一块偏振分光棱镜 (PBS)、两片四分之一消色差波片 (QWP) 和两个显微物镜 (OL) 组成。

分光移相模块包括一片四分之一消色差波片、三块消偏振分光棱镜 (NPBS)、三块直角棱镜 (RP) 以及偏振片阵列 (PA), 主要用于将光束分成四份并同时引入不同的相移量。成像光路通过成像镜 (Imaging lens) 将四幅具有不同相移量的干涉图同时成像到彩色相机上, 随后通过颜色通道解耦获得 R、G、B 三种不同颜色的四步同步相移干涉图, 然后经过相应的解相位算法恢复待测表面形貌。需要说明的是, 该系统目前只能实现红绿两种色光的同步测量。主要原因是系统所用器件的色散作用使得蓝色光的焦平面偏离红光和绿光略远, 无法保证三者的干涉条纹同时清晰。因此, 本文暂时只利用了红光和绿光的干涉图信息。

分别利用等效波长法、查表法和本文所提方法, 选取干涉图中的局部区域 [图 4(c) 中的虚线框区域] 进行形貌恢复, 结果如图 5 所示。从三维形貌恢复结果来看, 三种方法均可实现目标区域 1.2 μm 台阶表面形貌的恢复。由于受到单波长测量误差

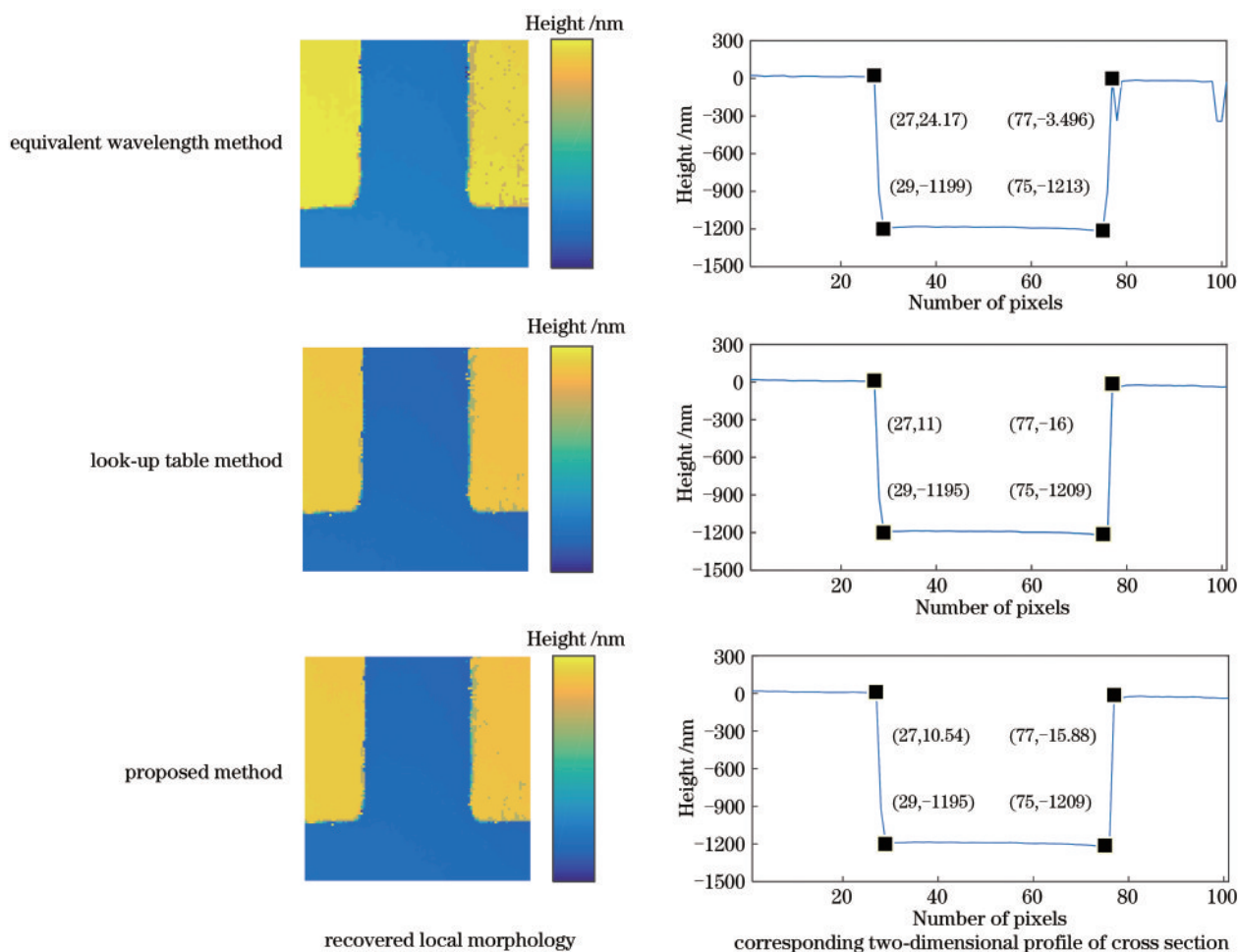


图 5 不同方法下 1.2 μm 金属单刻线样板的测量结果

Fig. 5 Measurement results of 1.2 μm metal single groove pattern by different methods

的影响,三种方法在目标区域的右侧上表面均存在一定数量的级次误判点,等效波长法的误判点点数要多于查表法和本文所提方法。从计算用时上来看,等效波长法用时仅为 0.001 s,最快;查表法用时 3.53 s,最慢;本文所提方法用时 0.24 s,远快于查表法。需要注意的是,实验中查表法的用时远小于仿真用时,其主要原因是实验中的单波长包裹相位存在较大误差,因此实际可实现的无模糊测量范围大大减小。故本文减小了查表法所搜寻的表格空间,只在 $[-1421, 157]$ (单位为 nm)的高度范围内查找,这刚好覆盖本实验对象的深度,点距设为 0.5 nm,查表空间为 3156 个点。而仿真中查表法搜寻的范围为 $[-21, 21]$ ,单位为  $\mu\text{m}$ ,点距 0.5 nm 对应的查表空间为 84000 点。

## 4 结 论

提出了一种适用于双波长干涉技术且能够有效提高最小公倍数有效波长法计算速度的算法。使用该算法后,最小公倍数有效波长法的计算速度仍然不及目前普遍使用的等效波长法,但是由于最小公倍数法在理论上具有更大的无模糊测量范围且计算速度有了显著提高,因此在某些领域,比如台阶高度超过四分之一等效波长的结构表面,该方法可以得到实际应用。在所展示的实验中,由于单波长测量误差偏大,所提算法未能显著地展现出更大无模糊测量范围的优势。在接下来的工作中,将努力将单波长测量结果的误差减小到 1 nm 以内,继续验证所提算法的优势,并尝试开展一些实际应用。

## 参 考 文 献

- [1] Wyant J C. Testing aspherics using two-wavelength holography[J]. Applied Optics, 1971, 10(9): 2113-2118.
- [2] Polhemus C. Two-wavelength interferometry [J]. Applied Optics, 1973, 12(9): 2071-2074.
- [3] Cheng Y Y, Wyant J C. Two-wavelength phase shifting interferometry[J]. Applied Optics, 1984, 23(24): 4539-4543.
- [4] Creath K. Step height measurement using two-wavelength phase-shifting interferometry [J]. Applied Optics, 1987, 26(14): 2810-2816.
- [5] de Groot P, Kishner S. Synthetic wavelength stabilization for two-color laser-diode interferometry [J]. Applied Optics, 1991, 30(28): 4026-4033.
- [6] Deck L, Demarest F. Two-color light-emitting-diode source for high-precision phase-shifting interferometry [J]. Optics Letters, 1993, 18(22): 1899-1901.
- [7] Onodera R, Ishii Y. Two-wavelength interferometry that uses a Fourier-transform method [J]. Applied Optics, 1998, 37(34): 7988-7994.
- [8] Parshall D, Kim M K. Digital holographic microscopy with dual-wavelength phase unwrapping [J]. Applied Optics, 2006, 45(3): 451-459.
- [9] Kumar U P, Bhaduri B, Kothiyal M P, et al. Two-wavelength micro-interferometry for 3-D surface profiling [J]. Optics and Lasers in Engineering, 2009, 47(2): 223-229.
- [10] Rinehart M T, Shaked N T, Jenness N J, et al. Simultaneous two-wavelength transmission quantitative phase microscopy with a color camera [J]. Optics Letters, 2010, 35(15): 2612-2614.
- [11] Khmaladze A, Matz R L, Zhang C, et al. Dual-wavelength linear regression phase unwrapping in three-dimensional microscopic images of cancer cells [J]. Optics Letters, 2011, 36(6): 912-914.
- [12] Zhang W P, Lu X X, Fei L H, et al. Simultaneous phase-shifting dual-wavelength interferometry based on two-step demodulation algorithm [J]. Optics Letters, 2014, 39(18): 5375-5378.
- [13] Safrani A, Abdulhalim I. High-speed 3D imaging using two-wavelength parallel-phase-shift interferometry [J]. Optics Letters, 2015, 40(20): 4651-4654.
- [14] Li J S, Lu X X, Xu X F, et al. Simultaneous phase-shifting dual-wavelength interferometry based on independent component analysis [J]. Applied Optics, 2017, 56(13): 3673-3678.
- [15] Wang M M, Zhou C L, Si S C, et al. Extended depth-range dual-wavelength interferometry based on iterative two-step temporal phase-unwrapping [J]. Journal of Modern Optics, 2018, 65(3): 287-297.
- [16] Yang G M. Multi wavelength surface topography measurement system based on Linnik and its software design [M]. Wuhan: Hubei University of Technology, 2018.  
杨光明. 基于 Linnik 的多波长表面形貌测量系统及其软件设计 [M]. 武汉: 湖北工业大学, 2018.
- [17] Tian X B, Tu X Z, Zhang J C, et al. Snapshot multi-wavelength interference microscope [J]. Optics Express, 2018, 26(14): 18279-18291.
- [18] Cheng J L. Research on the technology for the high precision testing of three-dimensional shape with steps by dual-wavelength phase-shift interferometry

- [D]. Nanjing: Nanjing University of Science and Technology, 2018.
- 成金龙. 基于双波长移相干涉的阶跃型三维形貌高精度检测技术研究[D]. 南京: 南京理工大学, 2018.
- [19] Hosseini P, Jin D, Yaqoob Z, et al. Single-shot dual-wavelength interferometric microscopy [J]. *Methods*, 2018, 136: 35-39.
- [20] Tian X, Tu X, Della Croce K, et al. Multi-wavelength quantitative polarization and phase microscope [J]. *Biomedical Optics Express*, 2019, 10(4): 1638-1648.
- [21] Liu Q, Li L L, Zhang H, et al. Simultaneous dual-wavelength phase-shifting interferometry for surface topography measurement [J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2020, 124:105813.
- [22] Huang J J. Study on multiple wavelength interferometry for surface topography with optical phase shift [M]. Wuhan: Hubei University of Technology, 2020.
- 黄娇洁. 基于光学相移的表面形貌多波长干涉技术研究[M]. 武汉: 湖北工业大学, 2020.
- [23] Zhai Z S, Huang J J, Zhao H, et al. Intensity consistency control method for multi-wavelength micro-interferometry [J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2020, 57(3): 031202.
- 翟中生, 黄娇洁, 赵杭, 等. 多波长显微干涉的光强一致性控制方法[J]. *激光与光电子学进展*, 2020, 57(3): 031202.
- [24] de Groot P J. Extending the unambiguous range of two-color interferometers [J]. *Applied Optics*, 1994, 33(25): 5948-5953.
- [25] van Brug H, Klaver R G. On the effective wavelength in two-wavelength interferometry [J]. *Pure and Applied Optics: Journal of the European Optical Society Part A*, 1998, 7(6): 1465-1471.
- [26] Towers C E, Towers D P, Jones J D C. Generalized frequency selection in multifrequency interferometry [J]. *Optics Letters*, 2004, 29(12): 1348-1350.
- [27] Houairi K, Cassaing F. Two-wavelength interferometry: extended range and accurate optical path difference analytical estimator [J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2009, 26(12): 2503-2511.
- [28] Falaggis K, Towers D P, Towers C E. Multiwavelength interferometry: extended range metrology [J]. *Optics Letters*, 2009, 34(7): 950-952.
- [29] Falaggis K, Towers D P, Towers C E. Method of excess fractions with application to absolute distance metrology: analytical solution [J]. *Applied Optics*, 2013, 52(23): 5758-5765.
- [30] Falaggis K, Towers D P, Towers C E. Algebraic solution for phase unwrapping problems in multiwavelength interferometry [J]. *Applied Optics*, 2014, 53(17): 3737-3747.
- [31] Guo X T, Liu X J, Lei Z L, et al. Unambiguous measurement range and error tolerance in dual-wavelength interferometry [J]. *Applied Optics*, 2020, 59(29):9272-9278.
- [32] Guo X T, Liu X J, Yang W J, et al. Correction of errors due to uneven intensity distribution and inaccurate phase shifts in prism-based simultaneous phase-shifting interferometry [J]. *Applied Optics*, 2019, 58(6): 1327-1335.