

基于分层模型和低秩近似的 X 射线图像重建

王佳妤, 许金鑫, 李庆武*

河海大学物联网工程学院, 江苏 常州 213022

摘要 针对马尔可夫链蒙特卡罗 (MCMC) 算法的计算量大以及统计结果中含有严重噪声等问题, 提出一种基于分层模型和低秩近似的 X 射线图像重建方法。首先引入全变差 (TV) 正则项来构造目标函数, 并基于 Jeffreys 先验定义超参数以建立分层贝叶斯模型。然后采用变量分裂法得到分裂形式下各变量的条件概率密度分布。最后根据正向模型所具有的低秩性质来计算低秩近似的目标分布函数, 从而得到关于待求参数的闭合解。结果表明, 所提方法可以有效解决贝叶斯逆问题中存在的计算量大等问题。相比于现有的基于不确定性量化重建方法, 所提方法在有效抑制图像噪声的同时能够更好地保留图像的边缘细节。

关键词 图像处理; MCMC 采样; 分层贝叶斯模型; TV 正则项; 低秩近似; Jeffreys 先验

中图分类号 TP391

文献标志码 A

doi: 10.3788/LOP202158.0610004

X-Ray Image Reconstruction Based on Hierarchical Model and Low-Rank Approximation

Wang Jiayu, Xu Jinxin, Li Qingwu*

College of Internet of Things Engineering, Hohai University, Changzhou, Jiangsu 213022, China

Abstract In view of the large amount of calculation of Markov Chain Monte Carlo (MCMC) algorithm and the serious noise in the statistical results, an X-ray image reconstruction method based on a hierarchical model and low-rank approximation is proposed. First, a total variation (TV) regular term is introduced to construct the objective function, and hyperparameters are defined based on Jeffreys prior to establish a hierarchical Bayesian model. Then, the variable split method is used to obtain the conditional probability density distribution of each variable in the split form. Finally, according to the low-rank nature of the forward model, the objective distribution function of the low-rank approximation is calculated, so as to obtain the closed solution of the parameters to be sought. The results show that the proposed method can effectively solve the large amount of calculation in the Bayesian inverse problem. Compared with the existing reconstruction methods based on uncertainty quantification, the proposed method can effectively suppress the image noise while retaining the edge details of the image better.

Key words image processing; MCMC sampling; hierarchical Bayesian model; total variation regularization; low-rank approximation; Jeffreys prior

OCIS codes 100.3010; 110.3010; 110.7440

1 引言

X 射线图像处理中需要解决高维反演的问题, 但易受到噪声、散射、光源及探测器模糊的影响, 而传统的解析方法^[1]以及统计迭代方法^[2-4]难以满足

X 射线成像这类复杂场合下的高维反演要求^[5]。

为了从低信噪比的投影图像中获得高精度的客体信息并缓解重建反演问题的病态性, 近年来科研人员提出了多种图像重建方法, 如变分优化的确定性方法和基于马尔可夫链蒙特卡罗 (MCMC) 的随

收稿日期: 2020-07-31; 修回日期: 2020-08-19; 录用日期: 2020-08-25

基金项目: 国家自然科学基金 (U1830105)

* E-mail: li_qingwu@163.com

机采样方法。确定性方法在计算效率方面具有显著优势, Figueiredo 等^[6]提出了梯度投影稀疏重建(GPSR)法和改进的 GPSR-BB(GPSR-Barzilai Borwein)方法。为了加快收敛速度并保证搜索方向为下降方向, Wan 等^[7-9]还提出了基于梯度投影(GP)的重建方法, 该方法能够对感兴趣的变量进行快速估计, 但不能提供参数的不确定度, 而且还需要手动调整正则化参数, 这会导致最终重建精度的不确定性。

通过模拟的方式对高维积分进行计算的 MCMC 方法, 解决了原本异常复杂的高维积分求解问题, 使贝叶斯推断在高维反演问题中得到广泛的应用。作为一类随机方法, MCMC 方法通过对待求参数的后验分布进行全面描述, 可以实现参数的不确定性量化^[10-11]。在贝叶斯框架下, 构造基于稀疏诱导范数^[12-13]、二次平滑范数^[14]以及全变差(TV)范数^[15]的正则化模型可以处理贝叶斯逆问题中的不稳定性, 从而可以有效获得参数的最优解。在正则项的约束下, 定义关于噪声参数和先验精度参数的超先验也可以避免预先对参数进行最优选择。Howard^[16]将噪声参数和先验精度参数设为随机变量, 并令其分别服从 Gamma 和 Wishart 分布, Wishart 超先验的引入在保留图像的边缘信息方面具有明显效果。Fowler 等^[17]结合了基于泊松噪声模型的似然函数以及平滑性和非负性的先验约束条件来构造后验分布, 并采用投影牛顿算法对其进行优化, 这可以有效提高了求解效率, 缓解了重建过程中的振铃效应。基于 MCMC 的重建方法能够应用于复杂高维的后验分布, 但其存在的瓶颈在于高维高斯随机变量的重复采样, 且在每次迭代过程中都需要进行矩阵的因式分解, 计算成本较高, 同时后验分布通常没有一个闭合解。在这种情况下, 近似技术成为一种必要手段。Brown 等^[18]通过截断的奇异值分解来保留主要的特征值, 低秩近似了先验-预条件 Hessian 矩阵, 并应用于 Metropolis-Hastings 独立抽样中的建议分布。然而, 与矩阵分解相关的预先计算仍占用了大量的内存空间, 计算开销较大。从各变量的条件分布来看, 基于变量分裂^[19-20]的 MCMC 采样简化了目标分布, 有利于进行更简单高效的采样步骤。然而, 即使有这种分而治之的策略, 但每次从目标分布中进行采样的效率仍有提升的空间。

针对以上问题, 本文提出基于分层模型和低秩近似的 X 射线图像重建方法, 首先引入 TV 正则项

构造目标函数, 然后采用变量分裂法得到分裂形式下的联合概率密度分布, 最后利用正向矩阵的低秩性质近似待求参数的条件概率密度分布。所提方法可以加快 X 射线图像重建速度, 更好地抑制测量数据和样本中存在的噪声和伪影, 提高 X 射线图像的密度重建精度。

2 所提方法

2.1 分层贝叶斯模型

假设观测数据 \mathbf{y} 被加性噪声破坏, 此时正向问题的线性随机模型可表示为

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{e}, \quad (1)$$

式中: $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N$ 表示需要重建的客体密度分布, N 为列数; $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^M$ 表示观测的 X 射线投影图像, M 为行数; $\mathbf{H} \in \mathbf{R}^{M \times N}$ 表示数值离散后得到的系统正向矩阵; $\mathbf{e} \in \mathbf{R}^M$ 表示加性噪声或者测量误差。假设 \mathbf{e} 是一个均值为 0 和方差为 μ^{-1} 的高斯随机向量, 与 \mathbf{x} 独立不相关。

传统的 MCMC 方法通常采用 Tikhonov 正则化和最小二乘正交三角(QR)分解进行迭代求解, 对噪声和伪影的抑制能力较弱, 从而影响图像的重建质量。为了消除噪声的影响以及进一步提高重建精度, 基于(1)式采用 TV 正则化方法对图像的梯度进行约束, 通过最小化目标函数进行重建, 表达式为

$$\hat{\mathbf{x}} = \underset{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N}{\operatorname{argmax}} p(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = \underset{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N}{\operatorname{argmin}} \frac{\mu}{2} \|\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + \frac{\beta}{2} \|\mathbf{x}\|_{\text{TV}}, \quad (2)$$

式中: $\hat{\mathbf{x}}$ 表示估计的客体密度分布; β 表示正则化参数, 用来控制保真项与正则项之间的加权比例; $\|\cdot\|_2$ 表示向量的二范数; $\|\cdot\|_{\text{TV}}$ 表示 TV 正则化范数; $p(\mathbf{x} | \mathbf{y})$ 表示后验概率密度。其中 $\|\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2$ 表示数据保真项; $\|\mathbf{x}\|_{\text{TV}}$ 表示 TV 正则项, $\|\mathbf{x}\|_{\text{TV}} = \sum_{1 \leq i, j \leq N} \|(\nabla \mathbf{x})_{i, j}\|_2$, $\nabla \mathbf{x}$ 表示变量 \mathbf{x} 的二维离散梯度算子, i 和 j 分别表示图像的横纵个数。

在此设定下, 关于 \mathbf{x} 的后验概率密度分布可表示为

$$p(\mathbf{x} | \mathbf{y}) \propto \exp \left[-\frac{\mu}{2} \|\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 - \frac{\beta}{2} \|\mathbf{x}\|_{\text{TV}} \right]. \quad (3)$$

最大后验概率模型是根据经验数据对难以观察的量进行估计。基于贝叶斯理论来建立最大后验概率模型, 从定义的后验密度函数中进行采样以实现后验概率密度 $p(\mathbf{x} | \mathbf{y})$ 的最大化。在(1)式的定义

下,为后验概率密度函数的构建提供一个合理的假设,即 $(y | x, \mu) \sim N(\mathbf{H}\mathbf{x}, \mu^{-1}\mathbf{I})$,其中 \mathbf{I} 为单位矩阵,可得到高斯似然函数 $p(y | x, \mu)$ 为

$$p(y | x, \mu) \propto \mu^{M/2} \exp\left(-\frac{\mu}{2} \|\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2\right). \quad (4)$$

\mathbf{x} 的先验分布编码了关于 \mathbf{x} 的结构特征。通常,假设 \mathbf{x} 的先验分布服从高斯分布,得到

$$p(\mathbf{x} | \beta) \propto \beta^{N/2} \exp\left(-\frac{\beta}{2} \|\mathbf{x}\|_{\text{TV}}\right). \quad (5)$$

为了可以不事先选择最优参数,将 μ 和 β 当作未知参数,视其为随机变量,即超参数,并为其分配一个先验分布 $p(\mu, \beta)$ 来构造分层贝叶斯模型,这样就可以与其他参数一起被估计,从而提升参数选择的效果。此时, μ 和 β 亦被称为精度变量。在这种情况下,联合后验概率密度函数可表示为

$$p(\mathbf{x}, \mu, \beta | y) \propto \mu^{M/2} \beta^{N/2} \times \exp\left(-\frac{\mu}{2} \|\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 - \frac{\beta}{2} \|\mathbf{x}\|_{\text{TV}}\right) p(\mu, \beta). \quad (6)$$

基于 Jeffreys 先验来定义超参数 μ 和 β 。为了方便起见,利用方差变量而不是精度变量来进行模型参数化,即 $\zeta^2 = \mu^{-1}, \gamma^2 = \beta^{-1}$,其中 ζ^2 表示尺度不变先验, γ^2 表示数据方差缩放先验。因此,关于 (ζ^2, γ^2) 的 Jeffreys 先验形式为

$$p(\zeta^2, \gamma^2) = (\zeta^2 + \gamma^2)^{-2} \equiv p(\gamma^2 | \zeta^2) p(\zeta^2). \quad (7)$$

2.2 基于分裂目标分布和低秩近似的闭合求解

在贝叶斯推理框架中, MCMC 方法的优点是对

待求参数的后验分布提供了全面的描述。但在高维问题中, MCMC 方法存在计算量大的瓶颈。为了克服这个限制,将变量分裂的方法^[20]嵌入到分层贝叶斯模型中,并推导出相应的条件后验分布的闭合解,这有利于加快大规模贝叶斯推理问题的求解速度。变量分裂方法的主要思想是引入分裂变量 \mathbf{z} , 分离数据保真项和 TV 正则项后分别求解相应的最小化问题,表达式为

$$\operatorname{argmin}_{\mathbf{x}, \mathbf{z}} f(\mathbf{x}) + r(\mathbf{z}), \text{ s. t. } \mathbf{x} = \mathbf{z}, \quad (8)$$

式中: $f(\mathbf{x})$ 表示数据保真函数; $r(\mathbf{z})$ 表示一些正则化函数,其通常是非光滑的,甚至是非凸的。等式约束可以确保求解(8)式等价于求解初始目标分布,即(3)式。

在贝叶斯推理问题中,变量分裂的目的是在一个优化子问题中单独使用目标函数的 f 和 r , 这种分而治之的策略有利于产生更简单的条件分布,从而更容易进行采样。引入相似性权衡参数 $\rho(\rho > 0)$ 来平衡 \mathbf{x} 和 \mathbf{z} 之间的相似性,则定义的联合概率分布 $p(\mathbf{x}, \mathbf{z} | \rho)$ 为

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{z} | \rho) \propto \exp[-f(\mathbf{x}) - r(\mathbf{z}) - \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{z} | \rho)], \quad (9)$$

式中: φ 表示一个散度函数,其作用是保证联合概率分布 $p(\mathbf{x}, \mathbf{z} | \rho)$ 的合理性。实验中, φ 是二次的,并满足 $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{z} | \rho) = (\rho/2) \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_2^2$ 。结合(6)式和(9)式,得到更新后的联合概率密度分布为

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mu, \beta | y) \propto \mu^{M/2} \beta^{N/2} \exp\left(-\frac{\mu}{2} \|\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 - \frac{\beta}{2} \|\mathbf{z}\|_{\text{TV}} - \frac{\rho}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_2^2\right) p(\mu, \beta). \quad (10)$$

在这种情况下,为了获得所需的条件密度分布函数,令 $\nu = \gamma^2 / \zeta^2$ 。对参数进行变换后,分裂形式下的联合后验概率密度函数为

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \zeta^2, \nu | y) \propto (\zeta^2)^{-\frac{M+N}{2}-1} \nu^{-N/2} (1 + \nu)^{-2} \exp\left[-\frac{1}{2\zeta^2} \left(\|\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + \frac{1}{\nu} \|\mathbf{z}\|_{\text{TV}}\right) - \frac{\rho}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_2^2\right]. \quad (11)$$

由于超参数 μ 和 β 具有先验分布,则联合后验概率密度函数不再服从高斯分布,而且一般不能以

闭合解的形式存在,因此推导出各个变量的条件概率密度函数分别为

$$p(\zeta^2 | \mathbf{x}, \mathbf{z}, \nu, y) \propto (\zeta^2)^{-\frac{M+N}{2}-1} \exp\left[-\frac{1}{2\zeta^2} \left(\|\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + \frac{1}{\nu} \|\mathbf{z}\|_{\text{TV}}\right)\right], \quad (12)$$

$$p(\nu | \mathbf{x}, \mathbf{z}, \zeta^2, y) \propto \nu^{-(N/2+1)-1} \exp\left(-\frac{1}{2\zeta^2\nu} \|\mathbf{z}\|_{\text{TV}}\right) \left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^2 = p(\nu' | \mathbf{x}, \mathbf{z}, \zeta^2, y) \left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^2, \quad (13)$$

$$p(\mathbf{x} | \mathbf{z}, \zeta^2, \nu, y) \propto \exp\left(-\frac{1}{2\zeta^2} \|\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 - \frac{\rho}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_2^2\right), \quad (14)$$

$$p(\mathbf{z} | \mathbf{x}, \zeta^2, \nu, y) \propto \exp\left(-\frac{1}{2\zeta^2\nu} \|\mathbf{z}\|_{\text{TV}} - \frac{\rho}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_2^2\right). \quad (15)$$

由(12)式和(13)式可推导出 $(\zeta^2 | \mathbf{x}, \mathbf{z}, \nu, \mathbf{y}) \sim 1/\Gamma \left[(M+N)/2, \frac{1}{2} \|\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + \frac{1}{2\nu} \|\mathbf{z}\|_{\text{TV}} \right]$ 以及 $(\nu' | \mathbf{x}, \mathbf{z}, \zeta^2, \mathbf{y}) \sim 1/\Gamma \left[(N+2)/2, \|\mathbf{z}\|_{\text{TV}} / (2\zeta^2) \right]$, 其中 Γ 为 Gamma 分布函数。一般情况下, 变量 \mathbf{x} 与超参数 ζ^2 和 ν 是分开进行迭代采样的, 则依据以上分布迭代更新超参数 ζ^2 和 ν 。至于分裂变量 \mathbf{z} 的求解, 由于 TV 先验所具有的非共轭性以及不可微性, 可采用 P-MYULA 算法^[21]对(15)式进行高维采样。由(14)式可得

$$N(\mathbf{x} | \mathbf{z}, \zeta^2, \nu, \mathbf{y}) \sim N(\mathbf{m}_x, \mathbf{\Gamma}_x) = N[\mathbf{\Gamma}_x(\zeta^{-2}\mathbf{H}^T\mathbf{y} + \rho\mathbf{z}), (\zeta^{-2}\mathbf{H}^T\mathbf{H} + \rho\mathbf{I}_N)^{-1}], \quad (16)$$

式中: $\mathbf{\Gamma}_x$ 为条件协方差矩阵; \mathbf{I}_N 为 $N \times N$ 大小的单位矩阵; \mathbf{m}_x 为 \mathbf{x} 的条件密度分布的均值。根据(16)式进行采样得到的样本可以用 $\mathbf{x}_s = \mathbf{m}_x + \mathbf{G}\epsilon$ 来表示, 其中随机变量 $\epsilon \sim N(0, \mathbf{I})$, \mathbf{G} 满足 $\mathbf{\Gamma}_x = \mathbf{G}\mathbf{G}^T$ 。求解需要 \mathbf{G} 对协方差矩阵 $\mathbf{\Gamma}_x$ 进行因式分解, 因此巨大运算成本的开销不可避免。利用正向矩阵 \mathbf{H} 的低秩性质, 可以构造一个可快速采样的简易目标分布。实验中, 通过一个截断的奇异值分解来近似 $\mathbf{H}^T\mathbf{H}$, 即

$$\mathbf{H}^T\mathbf{H} \approx \mathbf{V}_k\mathbf{\Lambda}_k\mathbf{V}_k^T, \quad (17)$$

式中: $\mathbf{\Lambda}_k \in \mathbf{R}^{k \times k}$ 为包含矩阵 $\mathbf{H}^T\mathbf{H}$ 的 k ($k \leq N$) 个最大特征值的对角矩阵; $\mathbf{V}_k \in \mathbf{R}^{N \times k}$ 为正交矩阵, 包含正交列。如果正向矩阵 \mathbf{H} 的秩为 k , 则(17)式左右完全相等。截断参数 k 是用来控制重建精度与运算成本的权衡参数。近似条件协方差矩阵 $\mathbf{\Gamma}_x = (\zeta^{-2}\mathbf{H}^T\mathbf{H} + \rho\mathbf{I}_N)^{-1}$, 并利用 Woodbury 等式以及 \mathbf{V}_k 包含标准正交列, 可得到近似的协方差矩阵 $\hat{\mathbf{\Gamma}}_x$ 为

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}_x = \frac{1}{\rho}(\mathbf{I} - \mathbf{V}_k\mathbf{D}_k\mathbf{V}_k^T), \quad (18)$$

其中

$$\mathbf{D}_k = \text{diag}[\zeta^{-2}\lambda_q(\zeta^{-2}\lambda_q + \rho)^{-1}] \in \mathbf{R}^{k \times k}, \quad (19)$$

式中: λ_q 为 $\mathbf{\Lambda}_k$ 的对角线元素, $q = 1, \dots, k$ 。为了得到均值 \mathbf{m}_x 的近似值, 使用 $\hat{\mathbf{\Gamma}}_x$ 替代 $\mathbf{\Gamma}_x$ 可得 $\hat{\mathbf{m}}_x = \hat{\mathbf{\Gamma}}_x(\zeta^{-2}\mathbf{H}^T\mathbf{y} + \rho\mathbf{z})$ 。根据以上推论, 用于采样的近似目标分布为 $N(\hat{\mathbf{m}}_x, \hat{\mathbf{\Gamma}}_x)$ 。

利用 $\mathbf{\Gamma}_x = \mathbf{G}\mathbf{G}^T$ 的因式分解可得到 \mathbf{G} , 表达式为

$$\mathbf{G} = \rho^{-1/2}(\mathbf{I} - \mathbf{V}_k\hat{\mathbf{D}}_k\mathbf{V}_k^T), \quad (20)$$

其中

$$\hat{\mathbf{D}}_k = \mathbf{I} \pm (\mathbf{I} - \mathbf{D}_k)^{1/2}. \quad (21)$$

因为 $\hat{\mathbf{D}}_k$ 是对角矩阵, 并满足 $k \ll N$, 所以可以提供一种计算成本低的方法来加速高维目标分布 $N(\hat{\mathbf{m}}_x, \hat{\mathbf{\Gamma}}_x)$ 的采样过程。

综上, 每次采样关于变量 \mathbf{x} 的闭合解可表示为

$$\mathbf{x}_r = \hat{\mathbf{m}}_x + \mathbf{G}\epsilon = \rho^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{V}_k\mathbf{D}_k\mathbf{V}_k^T) \times (\zeta^{-2}\mathbf{H}^T\mathbf{y} + \rho\mathbf{z}) + \rho^{-1/2}\epsilon(\mathbf{I} - \mathbf{V}_k\hat{\mathbf{D}}_k\mathbf{V}_k^T). \quad (22)$$

设采样次数 $N_{\text{samps}} = 200$ 和老化的样本数 $N_b = 20$, 初始化参数 κ^2 和 ν , 运用 Metropolis-Hastings-within-Gibbs 采样算法^[22]来动态构造马尔可夫链, 基于分层模型和低秩近似的 X 射线图像重建算法(算法 1), 具体的重建步骤如下, 其中 t 为采样次数。

输入: X 射线投影图像 \mathbf{y} , 变量 \mathbf{x} 、 ζ^2 和 ν 的初始值 $\hat{\mathbf{x}}_{s(0)}$ 、 $\zeta_{(0)}^2$ 和 $\nu_{(0)}$, 采样次数 N_{samps} 以及老化样本数 N_b 。

输出: 变量 \mathbf{x} 的估计值 $\hat{\mathbf{x}}$ 。

1) 通过(22)式计算变量 \mathbf{x} 的闭合解 \mathbf{x}_r^{t+1} 和接受率 r_x^{t+1} 。从 $u \sim U[0, 1]$ 中进行采样, 若 $u < r_x^{t+1}$, 接受转移 $\hat{\mathbf{x}}_s^{t+1} \rightarrow \mathbf{x}_r^{t+1}$, 即 $\hat{\mathbf{x}}_s^{t+1} = \mathbf{x}_r^{t+1}$; 否则, 不接受转移, 则 $\hat{\mathbf{x}}_s^{t+1} = \hat{\mathbf{x}}_s^t$ 。

2) 利用 P-MYULA 算法计算 \mathbf{z}^{t+1} 。

3) 计算 $\zeta_{(t+1)}^2 \sim 1/\Gamma \left[(M+N)/2, \frac{1}{2} \|\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_s^{t+1} - \mathbf{y}\|_2^2 + \frac{1}{2\nu} \|\mathbf{z}^{t+1}\|_{\text{TV}} \right]$ 。

4) 计算 $\nu'_{(t+1)} \sim 1/\Gamma \left[(N+2)/2, \|\mathbf{z}^{t+1}\|_{\text{TV}} / (2\zeta_{(t+1)}^2) \right]$ 和接受率 r_ν^{t+1} 。从 $u \sim U[0, 1]$ 中进行采样, 若 $u < r_\nu^{t+1}$, 接受转移 $\nu_{(t+1)} \rightarrow \nu'_{(t+1)}$, 即 $\nu_{(t+1)} = \nu'_{(t+1)}$; 否则, 不接受转移, 则 $\nu_{(t+1)} = \nu_{(t)}$ 。

5) 令 $t = t + 1$ 并返回步骤 1), 直到达到采样次数 N_{samps} 。

6) 根据 $\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{N_{\text{samps}} - N_b} \sum_{t=N_b+1}^{N_{\text{samps}}} \hat{\mathbf{x}}_s^t$ 从采样样本中计算变量 \mathbf{x} 的估计值, 即重建的客体密度分布。

3 实验结果与分析

为了验证所提方法的有效性, 分别在合成图像和真实图像上进行实验。大多数研究者经常选择法国测试客体(FTO)^[23]作为 X 射线图像的重建对象, 因此首先选择 FTO 的变密度图像和常密度图像, 并与现有的重建方法进行对比。在真实图像的实验中, 对中国工程物理研究院采集的 X 射线图像进行密度反演实验, 验证所提重建方法的性能。实

验采用相对误差 (RE) 作为评价指标, 即 $x_{RE} = \|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_{true}\|_2 \div \|\mathbf{x}_{true}\|_2$, 其中 \mathbf{x}_{true} 表示清晰图像。实验中, 设置 $N_{samps} = 200$, $N_b = 20$, 对于参数 ρ , 在无噪声的情况下, 设置 $\rho = 0.005$, 1% 的噪声水平和 3% 的噪声水平下分别为 0.030 和 0.300。

3.1 与现有重建方法的对比分析

在 FTO 的变密度和常密度图像上进行对比实验, 并从主观效果和客观评价两方面与现有重建方法进行对比分析, 对比方法有 GPSR 方法^[6]、PNM_WLSA 方法^[17]、LRIS_Gamma 方法^[18]、LRIS_Jeffery 方法^[18] 以及 SPA 方法^[20]。将正向矩阵应用于原始清晰图像, 再分别加入方差为

$0.01^2 \|\mathbf{H}\mathbf{x}_{true}\|_2^2$ (1% 的噪声水平) 和 $0.03^2 \|\mathbf{H}\mathbf{x}_{true}\|_2^2$ (3% 的噪声水平) 的高斯噪声, 最终生成合成测试图像。

图 1 和图 2 为 3% 的噪声水平下 FTO 变密度和常密度图像的重建结果。从图 1 和图 2 可以看到, GPSR、PNM_WLSA 和 SPA 方法对噪声的抑制能力较弱, 重建结果中仍存在较严重的噪声; LRIS_Gamma 和 LRIS_Jeffery 方法产生的结果较为平滑, 但边缘细节不够清晰; 所提方法能较好地处理噪声, 可以恢复 FTO 图像的边缘信息, 主观视觉效果更好。总的来说, 所提方法的重建效果优于其他 5 种方法。为了对所提方法进行定量评价, 表 1 为 FTO 变

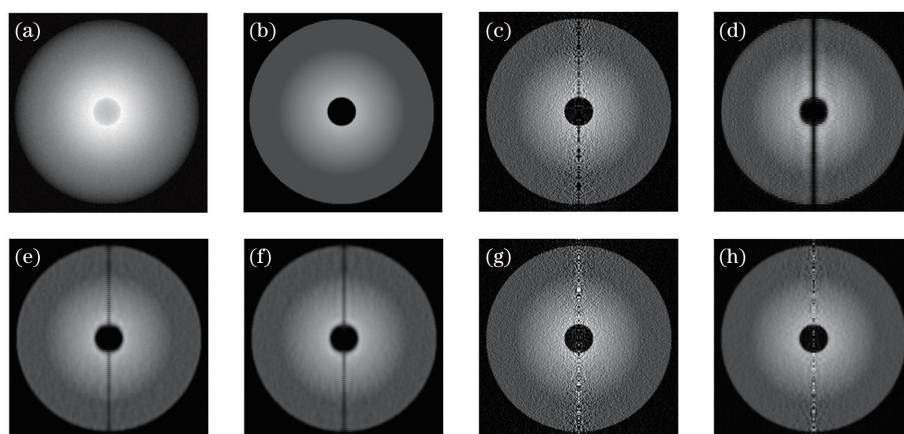


图 1 3% 噪声水平下 FTO 变密度图像的重建结果。(a) 含噪光程图像; (b) 原图; (c) GPSR; (d) PNM_WLSA; (e) LRIS_Gamma; (f) LRIS_Jefferys; (g) SPA; (h) 所提方法

Fig. 1 Reconstruction results of FTO variable density image at 3% noise level. (a) Noise-containing optical path image; (b) original image; (c) GPSR; (d) PNM_WLSA; (e) LRIS_Gamma; (f) LRIS_Jefferys; (g) SPA; (h) proposed method

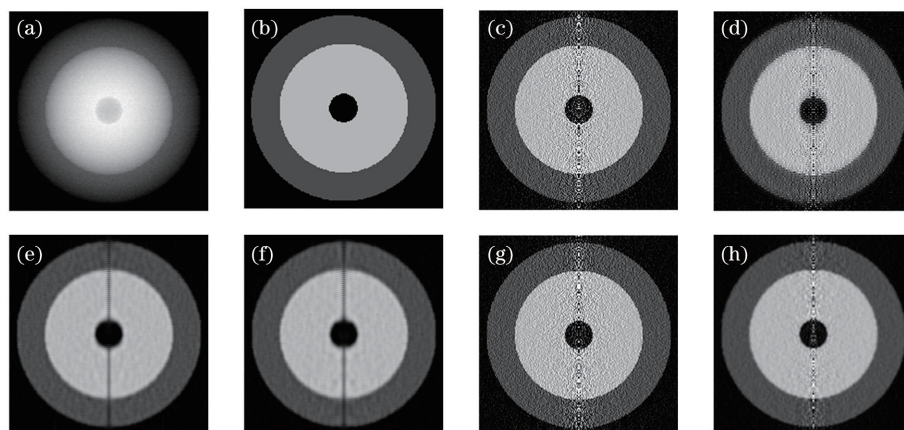


图 2 3% 噪声水平下 FTO 常密度图像的重建结果。(a) 含噪光程图像; (b) 原图; (c) GPSR; (d) PNM_WLSA; (e) LRIS_Gamma; (f) LRIS_Jefferys; (g) SPA; (h) 所提方法

Fig. 2 Reconstruction results of FTO constant density image at 3% noise level. (a) Noise-containing optical path image; (b) original image; (c) GPSR; (d) PNM_WLSA; (e) LRIS_Gamma; (f) LRIS_Jefferys; (g) SPA; (h) proposed method

表 1 重建结果的 RE 指标对比

Table 1 RE index comparison of reconstruction results

Level	Image	GPSR	PNM_WLSA	LRIS_Gamma	LRIS_Jeffery	SPA	Proposed method
Without	Variable	4.5555	1.0347	2.5944	0.5969	0.1905	0.0314
	Constant	4.7999	0.0647	1.4813	0.5306	0.0575	0.0167
1%	Variable	12.5872	10.5030	7.5038	7.4159	12.4355	6.6443
	Constant	11.5150	10.3293	7.6023	7.5830	12.1213	6.7618
3%	Variable	30.0876	18.4590	11.0394	10.9658	37.3054	10.5727
	Constant	34.7712	21.2256	11.2630	11.4193	36.3674	10.9413
Average		16.3861	10.2694	6.9140	6.4186	16.4129	5.8280

密度和常密度图像在 1%、3% 以及无噪声水平下的平均 RE 值,其中加粗字体表示最优结果。从表 1 可以看到,在不同的噪声水平下,所提方法在所有方法中排名第一,主要原因是 TV 正则项的引入可以更好地抑制样本中存在的噪声。

3.2 真实 X 射线图像实验

本节评价方法对真实 X 射线图像的重建性能。X 射线图像为一个固体锡柱(标准密度为 7.3 g/cm^3)和 4 块疏松锡圆片(标准密度为 2.6 g/cm^3)的透过率图像,如图 3(a)所示,图像中

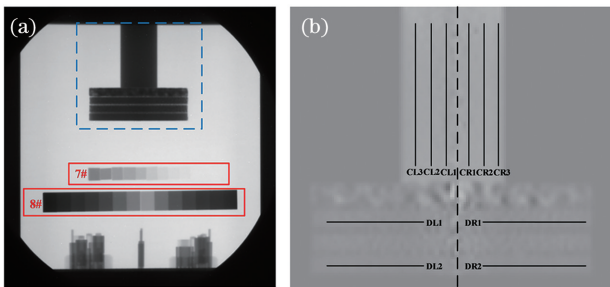


图 3 真实 X 射线图像及重建结果。(a)真实 X 射线图像;(b)重建结果

Fig. 3 Real X-ray images and reconstructed results. (a) Real X-ray images; (b) reconstruction results

还有两个标记块 7# 和 8#。重建结果如图 3(b)所示,其中 CL 和 CR 为锡柱的左右侧,DL 和 DR 为圆片的左右侧,根据标记块 7# 和 8# 的透射率-面密度关系,采用 Levenberg-Marquardt 算法^[24]得到指数型透射率-面密度拟合曲线。需要注意的是,图 3(b)反映出疏松圆片的第一层是存在问题的。

图 4 为 GPSR、LRIS_Jeffery、LRIS_Gamma、SPA 和所提方法的密度剖面对比曲线,其中选择的剖面位置已在图 3(b)中用实线标注。从图 4 可以看到,在锡柱和圆片区域,所提方法的稳定性最好,几乎没有大幅度波动,大部分密度值均在标准密度值附近,比其他对比方法更接近标准密度。为了进行定量评价,表 2 为锡柱和圆片区域的重建密度均值以及 RE 值。从表 2 可以看到,所提方法的重建密度均值几乎在所有重建位置上均最接近于标准密度,说明所提方法在密度重建精度方面优于另外 4 种对比方法;此外,锡柱与圆片区域的重建密度 RE 值是所有比较方法中最小的,说明所提方法的数据波动较小,稳定性最高。综上,所提方法在实际的 X 射线图像处理中是有效的和实用的。

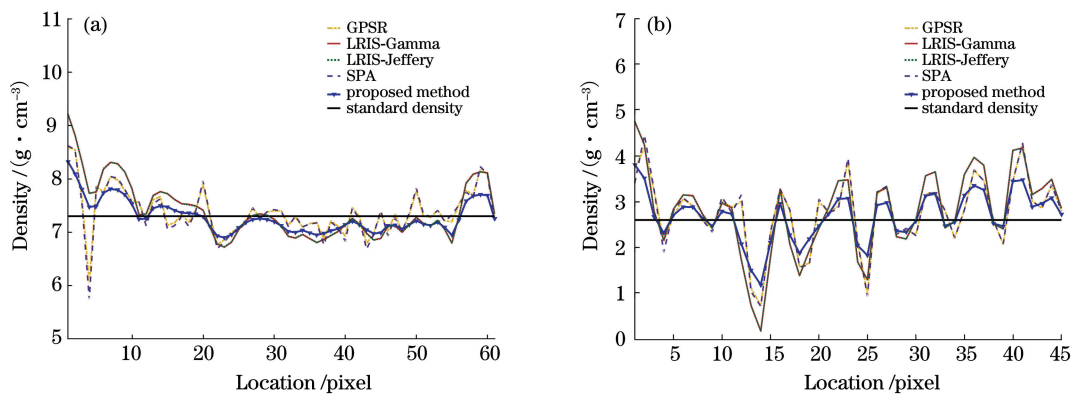


图 4 不同方法的重建结果。(a)锡柱区域剖面图(CL3);(b)圆片区域剖面图(DR1)

Fig. 4 Reconstruction results of different algorithms. (a) Regional profile diagram of tin column (CL3); (b) regional profile diagram of tin disk (DR1)

表 2 真实 X 射线图像的反演密度均值及 RE 值

Table 2 Inversion density mean and RE values of real X-ray images

Material	Type	GPSR		LRIS_Gamma		LRIS_Jeffery		SPA		Proposed method	
		Mean value / ($\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$)	RE / %	Mean value / ($\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$)	RE / %	Mean value / ($\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$)	RE / %	Mean value / ($\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$)	RE / %	Mean value / ($\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$)	RE / %
Tin column	CR1	8.0139	11.7401	7.7475	11.7467	7.7483	11.7366	7.7155	10.8096	7.6290	7.3034
	CR2	7.8343	9.1134	7.8812	10.7834	7.8811	10.7761	7.8089	10.7468	7.7340	7.2611
	CR3	7.5226	6.0988	7.5995	9.6978	7.5997	9.7052	7.5602	6.4732	7.3716	5.1178
	CL1	7.5348	6.9972	7.5823	9.8735	7.5814	9.8783	7.5888	8.3182	7.5333	6.0993
	CL2	7.6763	7.3414	7.7443	9.9331	7.7441	9.9347	7.7003	8.2323	7.6551	6.6236
	CL3	7.3830	5.8834	7.3996	7.3484	7.3993	7.3375	7.3600	6.2929	7.2870	4.1236
Tin disk	DR1	2.7609	29.6224	2.7878	36.2860	2.7882	36.2980	2.7580	30.5813	2.6800	20.5984
	DR2	2.6482	35.7142	2.6533	48.1308	2.6537	48.1613	2.6277	39.3447	2.6031	27.5855
	DL1	2.6893	21.5367	2.7129	31.2793	2.7128	31.2982	2.6934	22.3698	2.6082	17.7010
	DL2	2.6403	28.4398	2.6983	37.8450	2.6981	37.8484	2.6933	31.5025	2.6002	21.6413

4 结 论

提出一种基于分层贝叶斯模型和低秩近似的线性重建方法,该方法可以解决 X 射线成像中涉及的高维反演重建问题。针对观测数据和样本中的噪声给图像重建造成的影响,所提方法引入 TV 正则项来构造目标函数,能够有效地保留图像边缘信息,并具有良好的抗噪性。根据变量分裂法分而治之的思想,可以简化目标分布,有利于进行更灵活高效的 MCMC 采样。以低秩近似作为采样的基础来加速高维高斯分布的绘制,能够有效地解决大规模线性逆问题中存在的计算开销大等问题。在仿真以及真实 X 射线图像上进行对比实验。结果表明,相较于现有的重建方法,所提方法可以加快 X 射线图像的重建速度,更好地去除图像中的噪声,提高重建精度。总而言之,所提重建方法在主观效果和客观指标上均具有显著的优势并具有良好的实际应用性。

参 考 文 献

- [1] Ma C X, Hu J J, Yan B. Optimization of fan-beam CT filtered backprojection reconstruction algorithm [J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2012, 49(9): 091103.
马晨欣, 胡君杰, 闫镞. CT 扇形束滤波反投影图像重建算法优化 [J]. *激光与光电子学进展*, 2012, 49(9): 091103.
- [2] Luo T, Zhao Y S. An acceleration algorithm for dual-

spectral computed tomography reconstruction [J].

Acta Optica Sinica, 2020, 40(14): 1411001.

罗婷, 赵云松. 双能谱 CT 迭代重建的一种加速收敛算法 [J]. *光学学报*, 2020, 40(14): 1411001.

- [3] Li M J, He Z. Regularization priori based fast ARTTV algorithm and its reconstruction performance analysis during flame radiation measurement [J]. *Acta Optica Sinica*, 2019, 39(10): 1012002.

李明杰, 贺铸. 基于正则先验的全变差快速代数迭代算法及其在火焰辐射测量中的重建性能分析 [J]. *光学学报*, 2019, 39(10): 1012002.

- [4] Liu J, Kang Y Q, Gu Y B, et al. Low dose computed tomography image reconstruction based on sparse tensor constraint [J]. *Acta Optica Sinica*, 2019, 39(8): 0811004.

刘进, 亢艳芹, 顾云波, 等. 稀疏张量约束的低剂量 CT 图像重建 [J]. *光学学报*, 2019, 39(8): 0811004.

- [5] Jing Y F, Guan Y H, Zhang X L. Constrained optimization reconstruction for flash radiographic image [J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 2016, 28(9): 094002.

景越峰, 管永红, 张小琳. 基于约束优化的闪光照相图像重建算法 [J]. *强激光与粒子束*, 2016, 28(9): 094002.

- [6] Figueiredo M A T, Nowak R D, Wright S J. Gradient projection for sparse reconstruction: application to compressed sensing and other inverse problems [J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2007, 1(4): 586-597.

- [7] Wan Z, Guo J, Liu J J, et al. A modified spectral conjugate gradient projection method for signal recovery[J]. *Signal, Image and Video Processing*, 2018, 12(8): 1455-1462.
- [8] Lee B H, Chun S Y. Speeding up scaled gradient projection methods using deep neural networks for inverse problems in image processing [EB/OL]. [2020-07-31]. https://www.researchgate.net/publication/330955573_Speeding_up_scaled_gradient_projection_methods_using_deep_neural_networks_for_inverse_problems_in_image_processing.
- [9] Yan X H, Wang K, He H J. On the convergence rate of scaled gradient projection method [J]. *Optimization*, 2018, 67(9): 1365-1376.
- [10] Bardsley J M. MCMC-based image reconstruction with uncertainty quantification[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2012, 34(3): A1316-A1332.
- [11] Tenorio L, Andersson F, de Hoop M, et al. Data analysis tools for uncertainty quantification of inverse problems[J]. *Inverse Problems*, 2011, 27(4): 045001.
- [12] Lucka F. Fast Gibbs sampling for high-dimensional Bayesian inversion[J]. *Inverse Problems*, 2016, 32(11): 115019.
- [13] Xu J X, Li Q W, Wang J Y. Multiple norms and boundary constraint enforced image deblurring via efficient MCMC algorithm [J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2020, 27: 41-45.
- [14] Howard M, Luttman A, Fowler M. Sampling-based uncertainty quantification in deconvolution of X-ray radiographs[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2014, 270: 43-51.
- [15] Yao Z W, Hu Z X, Li J L. A TV-Gaussian prior for infinite-dimensional Bayesian inverse problems and its numerical implementations [J]. *Inverse Problems*, 2016, 32(7): 075006.
- [16] Howard M, Fowler M, Luttman A, et al. Bayesian Abel inversion in quantitative X-ray radiography[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2016, 38(3): B396-B413.
- [17] Fowler M J, Howard M, Luttman A, et al. A stochastic approach to quantifying the blur with uncertainty estimation for high-energy X-ray imaging systems [J]. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2016, 24(3): 353-371.
- [18] Brown D A, Saibaba A, Vallélian S. Low-rank independence samplers in hierarchical Bayesian inverse problems[J]. *ASA Journal on Uncertainty Quantification*, 2018, 6(3): 1076-1100.
- [19] Afonso M V, Bioucas-Dias J M, Figueiredo M A T. Fast image recovery using variable splitting and constrained optimization[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2010, 19(9): 2345-2356.
- [20] Vono M, Dobigeon N, Chainais P. Split-and-augmented Gibbs sampler-application to large-scale inference problems[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2019, 67(6): 1648-1661.
- [21] Durmus A, Moulines É, Pereyra M. Efficient Bayesian computation by proximal Markov chain Monte Carlo: when Langevin meets Moreau [J]. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2018, 11(1): 473-506.
- [22] van Dyk D A, Jiao X Y. Metropolis-Hastings within partially collapsed Gibbs samplers [J]. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 2015, 24(2): 301-327.
- [23] Shi J J, Li B Y, Zong S, et al. Research on scatter law of tungsten sphere in high energy flash X-ray radiography [J]. *High Power Laser & Particle Beams*, 2004, 16(4): 526-530.
- 施将君, 李必勇, 宗嵩, 等. 高能闪光照相中钨球散射规律研究 [J]. *强激光与粒子束*, 2004, 16(4): 526-530.
- [24] Wilamowski B M, Yu H. Improved computation for Levenberg-Marquardt training[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2010, 21(6): 930-937.