

# 激光与光电子学进展

## 基于局部最小的彩虹信号反演算法

李灿, 吕绮梦, 吴迎春, 吴学成\*, 高翔, 岑可法

浙江大学热能工程研究所能源清洁利用国家重点实验室, 浙江 杭州 310027

**摘要** 针对标准/全场彩虹信号的反演处理, 提出一种基于局部最小的通用性反演算法。该算法基于带修正系数的复角动量理论建立了带不等式约束的非线性最优化目标函数, 并采用序列二次规划法对最优化目标函数进行迭代求解。反演前针对标准/全场彩虹信号进行不同的预处理, 如去除高频结构、预估反演参数范围等。基于 Lorentz-Mie 理论对不同折射率和粒径分布(对数正态分布和正态分布)的液滴彩虹信号进行数值模拟, 并对有/无粒径的预设分布进行反演, 验证了该算法的有效性。结果表明: 标准彩虹折射率反演最大绝对误差小于  $3 \times 10^{-4}$ , 最大粒径相对误差为 1.3%; 各种工况下, 全场彩虹反演折射率误差均小于  $1 \times 10^{-4}$ , 平均粒径相对误差小于 1.67%。最后对该算法进行了标准和全场彩虹实验数据的验证。

**关键词** 测量; 彩虹折射技术; 反演算法; 非线性优化; 折射率; 粒径分布

中图分类号 TN201

文献标志码 A

doi: 10.3788/LOP202158.0529001

### Inversion Algorithm of Rainbow Signal Based on Local Minimum

Li Can, Lü Qimeng, Wu Yingchun, Wu Xuecheng\*, Gao Xiang, Cen Kefa

State Key Laboratory of Clean Energy Utilization, Institute for Thermal Power Engineering,  
Zhejiang University, Hangzhou, Zhejiang 310027, China

**Abstract** For a parametric inversion of standard or global rainbow signals, this study proposes a local minimum-based general inversion algorithm, establishes a nonlinear optimized objective function with inequality constraints based on the complex angular momentum theory with correction coefficients and iteratively solves the function using sequential quadratic programming. Before the inversion, a different signal preprocessing, including the removal of the high-frequency structure and the inversion parameter range estimation, was performed for the standard and global rainbow signal. The rainbow signals of the droplets with different refractive indices and droplet size distributions (logarithmic and normal distributions) were numerically simulated based on the Lorenz-Mie theory. The proposed inversions with or without the size distribution were performed to verify the algorithm's effectiveness. The results show that the maximum absolute error of the refractive index of the standard rainbow signal inversion is less than  $3 \times 10^{-4}$ , and the maximum relative error of the droplet size is 1.3%. Under various conditions, the error of the refractive index of the global rainbow signal inversion is less than  $1 \times 10^{-4}$ , and the relative error of the mean droplet size is less than 1.67%. Finally, the algorithm was verified via the experimental standard and global rainbow data.

**Key words** measurement; rainbow refractometry; inversion algorithm; nonlinear optimization; refractive index; size distribution

**OCIS codes** 290.5820; 200.4560; 290.1350

收稿日期: 2020-06-16; 修回日期: 2020-07-02; 录用日期: 2020-07-09

基金项目: 国家自然科学基金(91741129)、浙江省自然科学基金(LQ19E060010)、国家自然科学基金创新研究群体项目(51621005)

\*E-mail: wuxch@zju.edu.cn

## 1 引言

多相流中离散相的参数测量对多相流系统传热传质的定量研究十分关键。准确地测量流场中雾化液滴的多种关键参数如液滴温度、粒径、组分浓度、蒸发速率和速度等,有助于研究能源、环境和化工等领域中如燃料雾化蒸发燃烧、污染物吸收脱除和喷雾干燥等的复杂过程,对提高燃烧效率、减少污染物排放和加强优化控制具有重要的指导作用。

雾化液滴测量技术主要分为传统方法和先进光学方法两种。传统方法可以在一定程度上获得液滴的参数信息,但会造成原流场畸变,已不再满足日趋严格的测量需求。目前针对液滴参数测量的主流光学测量技术包括激光相位多普勒技术(PDA)和激光诱导荧光技术(LIF)。PDA可以测量液滴的粒径和速度,但是其仅限于单点测量且对非球形液滴测量的误差较大。LIF可以测量液滴的温度和组分,但需要添加荧光物质且标定工作量大。作为一种先进光学测量方法,彩虹折射技术最早在1991年由Roth等<sup>[1]</sup>提出,通过记录和分析彩虹角附近的弹性散射光,能够同时测量液滴的物理和热化学参数,例如液滴粒径、折射率及梯度<sup>[2-4]</sup>、温度(或浓度)、非球形度,以及纳米级液滴粒径变化和蒸发速率<sup>[5-8]</sup>。由于系统结构简单,不受非球形液滴影响且能实现一维测量<sup>[9-10]</sup>,该技术备受关注且极具应用潜力<sup>[11]</sup>。

从提取到的测量信号获得待测的参数信息称为信号的反演过程,该过程的优劣将直接影响测量结果的好坏。其中反演算法是信号反演的核心,该部分将系统性地决定提取参数的固有误差。因此在实际应用中,信号反演算法对于参数的精确测量具有重要意义。针对彩虹信号反演算法,国内外学者展开了研究。针对标准彩虹信号,宋飞虎等<sup>[12]</sup>提出了基于Debye级数理论的液柱参数彩虹反演算法,因Debye级数理论需对无限项求和,且即使在数值计算中,要想得到良好的近似,级数的保留项数须与粒子的尺寸参数同量级,故该算法对大颗粒的运算处理非常耗时。针对全场彩虹信号,van Beeck等<sup>[13]</sup>提出一些基于Airy理论特征点(如波峰、波谷和拐点等)的反演算法,但这些算法因需要预先假设折射率值而精度不高。同样针对全场彩虹,本课题组吴迎春等<sup>[14]</sup>提出一种无须预设粒径分布函数的全场彩虹反演算法,该算法基于整段信号的非负

最小二乘法拟合求解粒径分布。结合经验公式预估参数初始值,宋飞虎等<sup>[15]</sup>提出一种基于最小二乘法及寻优过程的全场彩虹反演算法,该寻优过程是基于主峰的峰值角度和峰宽偏差进行的。综上所述,目前还没有关于通用性反演算法的研究。

本文拟提出一种基于局部最小的通用性反演算法,目标是对标准/全场彩虹信号的处理均适用。该算法基于带修正系数的复角动量(CAM)理论建立目标函数,反演前对信号进行预处理,并结合序列二次规划法进行迭代寻优,反演后通过数值模拟和实验,验证了该算法的有效性。

## 2 彩虹折射技术测量原理

具有不同入射角的单色光入射到液滴表面后,在液滴内进行一系列反射和折射,随后以不同角度散射出来。在后散射区内特定角度(一阶几何彩虹角 $\theta_{rg}$ ,后称几何彩虹角)处,光的聚集和干涉会导致散射光信号明显增强,增强后的信号被称为一阶彩虹信号(本文称为彩虹信号)。Lorentz-Mie理论可以精确地描述均匀球形液滴的彩虹信号。在几何彩虹角附近,在液滴内表面经过一次内反射的折射光( $p=2$ )和直接外部反射光( $p=0$ )相比其他散射阶光线要强得多,它们构成了主要的彩虹信号,如图1(a)所示。 $p=2$ 阶散射光的自干涉会产生一个Airy彩虹,它由一系列强度递减的波峰组成,如图1(b)所示。当入射角 $\theta_i$ 等于 $\arcsin\left[\sqrt{(4-n^2)/3}\right]$ 时,几何彩虹角对应笛卡儿光线经历一次内反射偏转的最小角度表示为

$$\theta_{rg} = 2\arccos\left[\frac{1}{n^2}\left(\frac{4-n^2}{3}\right)^{3/2}\right], \quad (1)$$

其中 $n$ 是液滴相对于环境的相对折射率,环境一般为空气,因此通常直接称为折射率。折射率是物质对应某种波长光所反映出的物理光学性质,本文中涉及到的光波长均默认为532 nm。

高频纹波结构(称为Ripple结构),源自于 $p=2$ 阶散射光和 $p=0$ 阶散射光的干涉。与Airy彩虹相比,Ripple结构具有更高的频率和更低的强度,若 $p=2$ 阶散射光和 $p=0$ 阶散射光相干叠加,可形成典型的单液滴标准彩虹信号,如图1(b)所示。由(1)式可知:彩虹信号的几何彩虹角位置仅与液滴折射率相关,并对折射率高度敏感;而彩虹信号形状(即角频率)与粒径有关,粒径越大,彩虹信号角度

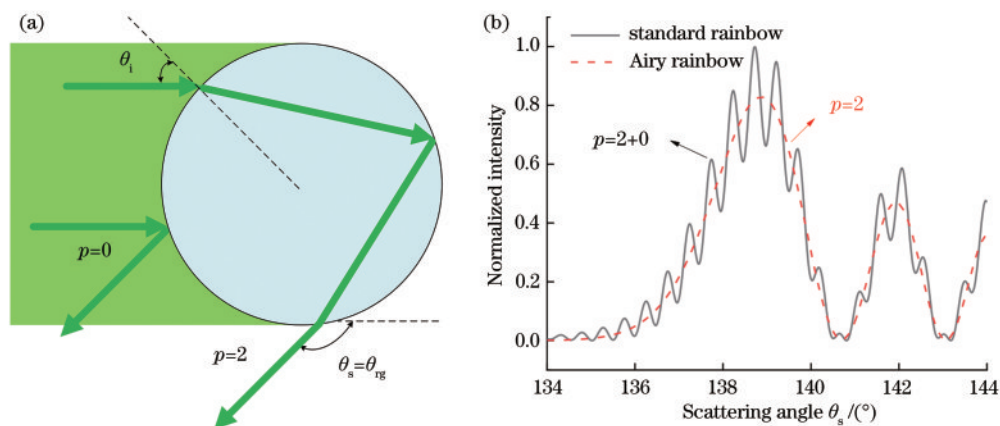


图 1 液滴被平面波照射时,几何彩虹角附近二阶折射光  $p=2$  和表面反射光  $p=0$  的光学路径以及其彩虹信号。(a) 光学路径; (b) 典型的单液滴标准彩虹信号

Fig. 1 Optical paths of second-order refracted light  $p=2$  and direct reflected light  $p=0$  around geometrical rainbow angle when a droplet is illuminated by plane wave and their rainbow signals. (a) Optical paths; (b) typical standard rainbow signal of single droplet

分布越宽,即角频率越低。这两个特性是彩虹折射技术能够测量液滴折射率和粒径的基本原理。

图 1(b) 中的彩虹信号可由 Debye 级数理论和 Lorentz-Mie 理论进行计算,两者均由 Philip Laven 编写的 MiePlot 程序<sup>[16]</sup>完成。

### 3 算法介绍

#### 3.1 CAM 理论

Lorentz-Mie 理论和 Debye 级数理论均由麦克斯韦方程组推导而来,可以用于计算均匀球形液滴被平面波散射的精确解。但它们的计算时间随着液滴尺寸参数的增加而急剧增加,并且可能会带来严重的计算负担,常常令人望而却步,尤其是对于需要大量迭代的反演问题而言。因此,它们在反演算法中的应用受限。

1969 年, Nussenzveig<sup>[17-18]</sup> 提出了 CAM 理论。

该理论在 Debye 级数理论的基础上,引入各种近似解析解来代替无限级数,用简化的积分形式来表示各级 Debye 级数,大大简化了求解过程,从而显著减少了计算量。

由于篇幅原因,本研究仅对 CAM 理论中的二阶散射信号 ( $p=2$ ) 进行简单介绍。由图 1 可知,同一个散射角的  $p=2$  散射光线可对应 0、1 或者 2 个撞击参数 ( $\rho = \sin \theta_i$ ) 的入射光线。根据同一散射角下对应  $\rho$  的个数, Nussenzveig 将  $p=2$  散射阶信号的散射角区域精细地划分为“区域 0 ray”、“区域 0→2 rays”、“区域 2 rays”、“区域 2→1 ray”及“区域 1 ray”,并分别引入公式,如图 2 所示,图中中间横线表示几何彩虹角附近的撞击参数,各个方框表示由 Nussenzveig 划分出的不同散射角区域。本研究将几何彩虹角附近“区域 0→2 rays”的出散射光的复振幅描述为

$$f_{\text{rainbow}}(\alpha, \theta_s) = \frac{D}{2} \cdot \frac{16 \exp(-i\pi/4)}{27\sqrt{3}} \left( \frac{\pi}{\sin \theta_s} \right)^{\frac{1}{2}} c(6s\alpha)^{\frac{1}{6}} \exp[6ica + isa\epsilon + iAa\epsilon^2 + O(\alpha\epsilon^3)] \times \left\{ \left[ 1 + O(\epsilon) + O(\alpha^{-1}) \right] \cdot A_i \left\{ - \frac{c(2\alpha)^{\frac{2}{3}} \epsilon}{(3s)^{\frac{1}{3}}} [1 + B\epsilon + O(\epsilon^2)] \right\} - \frac{iC}{(2\alpha)^{\frac{1}{3}}} \left[ 1 + O(\epsilon^2) + O(\alpha^{-1}) \right] \cdot A_i' \left\{ - \frac{c(2\alpha)^{\frac{2}{3}} \epsilon}{(3s)^{\frac{1}{3}}} [1 + B\epsilon + O(\epsilon^2)] \right\} \right\}, \quad (2)$$

式中:  $\alpha = \pi D / \lambda$  为无量纲尺寸参数,  $D$  为液滴粒径,  $\lambda$  为入射光的波长;  $\theta_s$  为散射角;  $i$  为虚部单位;  $A_i$  和  $A_i'$  分别为 Airy 函数及其导数,  $\epsilon$  为散射角  $\theta_s$  与几何彩

虹角  $\theta_{rg}$  的差值; 参数  $A$ 、 $B$ 、 $C$  都是仅依赖于  $n$  的中间系数, 公式参见文献<sup>[19]</sup>;  $O(\cdot)$  为无穷小渐近。

Saengkaew 等<sup>[19]</sup> 发现, 在几何彩虹角附近, CAM

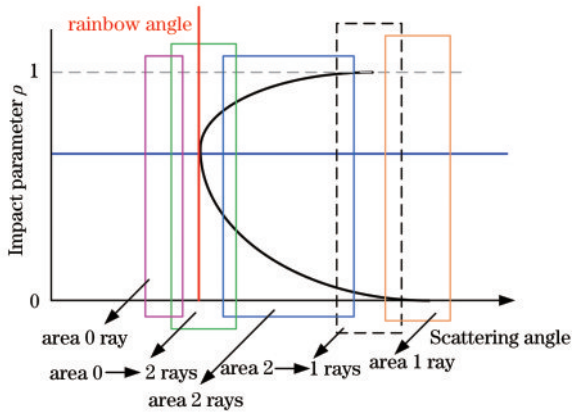


图2 二阶折射光  $p=2$  的 5 个散射角区域划分  
Fig. 2 Division of 5 scattering angle regions for second-order refracted light  $p=2$

理论和 Debye 级数理论预测的一阶散射信号 ( $p=2$ ) 强度分布在散射角各位置处吻合得很好,但在强度大小上还存在一些差异,特别是远离几何彩虹角区域。基于此,他们基于 Debye 级数理论,对 CAM 理论中“区域 0→2 rays”根据 (2) 式进行强度修正,获得按粒径范围分段的强度修正系数线性回归公式。

带修正系数的 CAM 理论 [(2) 式] 能够用于液滴彩虹角附近一阶光散射强度分布的精确计算,同时又具有较快的运算速度且计算速度不受尺寸的影响,可用于单液滴或液滴群光散射信号的快速计算分析。因此该理论适用于彩虹折射测量中的快速精准反演,这为彩虹折射测量技术的实际应用提供了理论基础。

### 3.2 目标函数的建立

当平面单色光照射多分散液滴群时,液滴群中的每个液滴在几何彩虹角附近的散射光强分布为  $I(D, \theta, n)$ ,液滴群的粒径概率分布为  $N(D)$ 。假设液滴均为球形且忽略液滴间的多次散射和干涉,液滴群彩虹的总光强角度分布可表示为

$$I(\theta) = \int_{D_{\min}}^{D_{\max}} I(D, \theta, n) N(D) dD, \quad (3)$$

式中  $D_{\max}$  和  $D_{\min}$  分别为液滴粒径的上限和下限。对液滴群粒径分布的反演在数学上可归结为对第一类 Fredholm 积分方程的求解,在经过离散化和归一化处理后,可得

$$I = \begin{bmatrix} I(\theta_1) \\ I(\theta_2) \\ \vdots \\ I(\theta_j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I(D_1, \theta_1, n), I(D_2, \theta_1, n), \dots, I(D_i, \theta_1, n) \\ I(D_1, \theta_2, n), I(D_2, \theta_2, n), \dots, I(D_i, \theta_2, n) \\ \vdots \\ I(D_1, \theta_j, n), I(D_2, \theta_j, n), \dots, I(D_i, \theta_j, n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N(D_1) \\ N(D_2) \\ \vdots \\ N(D_i) \end{bmatrix} = A \cdot N, \quad (4)$$

式中:  $A$  为光强矩阵,  $A$  中的元素  $I(D_i, \theta_j, n)$  表示粒径为  $D_i$  的液滴在散射角度  $\theta_j$  处的散射光强,由光散射理论如上述的 CAM 理论计算可得;  $I$  为待求的彩虹信号;  $N(D_i)$  表示粒径为  $D_i$  的液滴数量的概率,  $N$  表示由元素  $N(D_i)$  组成的矩阵。全场彩虹信号是多个单液滴产生的标准彩虹信号叠加的结果。若去除液滴群具有粒径分布这一条件时,液滴群即为单液滴或单分散液滴流。这意味着标准彩虹反演是全场彩虹反演的一个特例。当其用于处理标准彩虹信号时,因仅需求得折射率  $n$  和单一粒径  $D$ , 而不需要求解粒径分布  $N(D)$ , 该公式可简化为

$$I = \begin{bmatrix} I(\theta_1) \\ I(\theta_2) \\ \vdots \\ I(\theta_j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I(D, \theta_1, n) \\ I(D, \theta_2, n) \\ \vdots \\ I(D, \theta_j, n) \end{bmatrix} \cdot N = A \cdot N, \quad (5)$$

此时  $N$  不再是粒径分布而是标量系数。作为第一类 Fredholm 积分方程的离散结果,光强矩阵或矢量

$A$  的条件数较大,整个方程组的数量远大于未知数的数量,是个超定方程组,直接求解方程组一般是无解的。若通过牛顿迭代法、高斯消去法等数值方法求解,即使 CAM 理论计算的  $I(D_i, \theta_j, n)$  误差较小,方程组求解的误差也会很大。

由于超定方程组存在唯一的最小二乘解,基于此,吴迎春等<sup>[14-15]</sup>多采用非负最小二乘法对方程组进行计算。建立二范数  $\|A \cdot N - I\|_2$  为目标函数,结合折射率和粒径的边界条件,以目标函数的最小值为优化目标,表达式为

$$\min_{n, N(D)} \|A \cdot N - I\|_2, \text{ s.t. } n \in [n_{\min}, n_{\max}], D \in [D_{\min}, D_{\max}]. \quad (6)$$

### 3.3 迭代方法-序列二次规划法

由 (6) 式可知,本反演求解本质上是一个带不等式约束的非线性最优化问题。本研究采用序列二次规划方法 (SQP)<sup>[20-21]</sup> 来进行迭代优化计算,它的基本思路是将复杂的约束非线性最优化问题转

换成较为简单的序列二次规划(QP)子问题求解。该方法是求解约束非线性最优化问题的最有效方法之一,具有全局收敛性、局部超线性收敛性和效率高等优点。带不等式约束的非线性优化问题可以描述为

$$\min f(x), \text{ s.t. } h_i(x) \geq 0, x \in \mathbf{R}^n, i = 1, 2, \dots, m, (7)$$

其中  $x$  为待求变量参数向量,  $f(x)$  为非线性目标函数,  $h_i(x)$  为不等式约束函数,  $m$  为不等式约束的数量。构造的拉格朗日函数,表达式为

$$L(x, \lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(x), (8)$$

其中  $\lambda_i$  为拉格朗日乘子,描述了目标函数相对于约束条件的变化。根据(8)式进行二次近似,从而将非线性最优化问题转换成更容易求解的二次规划子问题,以反复迭代的二次规划解来逼近原问题的解。其中构造拉格朗日函数是为了将约束条件消除,使二次规划子问题转化成无约束问题。

为了得到下一个迭代点  $x^{k+1}$ ,在 SQP 方法中,在  $x^k$  处对拉格朗日函数  $L(x, \lambda)$  进行泰勒级数展开并取二次近似,同时对约束条件进行一次近似,得二次规划子问题,表达式为

$$\min \frac{1}{2} d^T H^k d + \nabla f(x^k)^T d,$$

$$\text{ s.t. } \nabla h_i(x^k)^T d + h_i(x^k) \geq 0, i = 1, 2, \dots, m, (9)$$

式中:  $d = x - x^k$ , 代表变量参数向量的搜索方向;  $\nabla$  为梯度运算符;  $H^k$  为(8)式中拉格朗日函数 Hessian 矩阵(二阶导数矩阵)的正定拟牛顿法近似。此问题是原约束最优化问题的近似子问题,其最优解不一定是原问题的最优解,但可以作为原问题解的搜索方向。

每次迭代过程中,(9)式中的二次规划问题利用二次算法求解,可以获得当前的搜索方向  $d$ 。标量步长参数  $\alpha^k$  则可通过求解一维约束线性搜索原问题中目标函数最小值来获得,从而得到原问题的一个可行解  $x^{k+1}$ ,表达式为

$$x^{k+1} = x^k + \alpha^k d. (10)$$

上述得以实施的关键在于如何计算拉格朗日函数的 Hessian 矩阵的正定拟牛顿近似值。在每一次迭代的过程中,本研究采用 BFGS 方法<sup>[22]</sup>来计算。

在原问题转换成近似的二次规划问题之后,迭代计算步骤如下:

1) 在当前迭代点  $x^k$  上更新计算拉格朗日函数的 Hessian 矩阵的正定拟牛顿近似值  $H^k$ ;

2) 二次近似构造和求解当前的二次规划子问

题,子问题最优解可作为下一次迭代的搜索方向  $d$ ;

3) 在该方向上对原问题进行一维约束线性搜索,确定步长  $\alpha^k$ ,得到下一个迭代点  $x^{k+1}$ ,并判断是否满足收敛精度;

4) 满足收敛则结束迭代,输出迭代点  $x^{k+1}$  为非线性最优化原问题的最优解;如果没有收敛,则重复上述步骤,直到达到其他迭代终止条件。迭代初始的  $H^k$  是任意给的,一般设置为单位矩阵。

### 3.4 信号预处理

在基本了解彩虹反演算法中的目标函数和迭代方法之后,还需要对彩虹信号进行预处理。针对标准彩虹信号和全场彩虹信号的预处理方式不同,可根据彩虹信号是否有 Ripple 结构来加以区分。

#### 3.4.1 理论基础

针对标准彩虹信号,若不去除 Ripple 结构而直接反演的话,优化过程中的目标函数会存在非常多的局部最小值,这是由许多细小的高频条纹所致。去除标准彩虹的 Ripple 结构,可以通过求局部最小来解决,这种处理方式具有速度快的优点。

对图 3(a)中待处理的标准彩虹信号进行快速傅里叶变换(FFT)处理后,得到如图 3(b)所示的频谱图,在该频谱图中,可以得到两个重要的频率点  $F_{\text{cut}}$  和  $F_{\text{ripple}}$ 。 $F_{\text{cut}}$  对应频谱图中第一个振幅强度最小值位置,为低通滤波的截止频率,其物理意义是小于该频率值的频谱信号对应  $p=2$  阶散射信号自相干形成的 Airy 彩虹。因此如果将大于该频率值的频谱信号过滤掉,对剩下的频率信号进行快速傅里叶逆变换(IFFT)处理可以得到分离的 Airy 彩虹信号。图 3(a)对比了由 Debye 级数理论精确计算的 Airy 彩虹和由标准彩虹低通滤波后的 Airy 彩虹信号。除了在小于几何彩虹角区域存在一些细小的强度差异,两者之间在各散射角度位置的强度吻合非常好。这表明:通过对液滴标准彩虹信号低通滤波获得的 Airy 信号,其精度足以用于后续液滴参数的反演计算。当然,这种方法不利于小液滴(粒径  $< 20 \mu\text{m}$ )标准彩虹信号的处理,这是因为此时的 Airy 信号与高频信号非常接近,难以通过低通滤波来分离。

预设折射率和粒径反演范围。在实施反演计算之前,还需要从已记录的彩虹信号中确定预设的 4 个参数:粒径范围  $[D_{\text{min}}, D_{\text{max}}]$  和折射率范围  $[n_{\text{min}}, n_{\text{max}}]$ 。若预设的参数范围过小,反演计算会因为缺失一部分信息而导致反演结果完全出错;若预设的参数范围过大,反演计算会因无效计算量增加而更耗时。

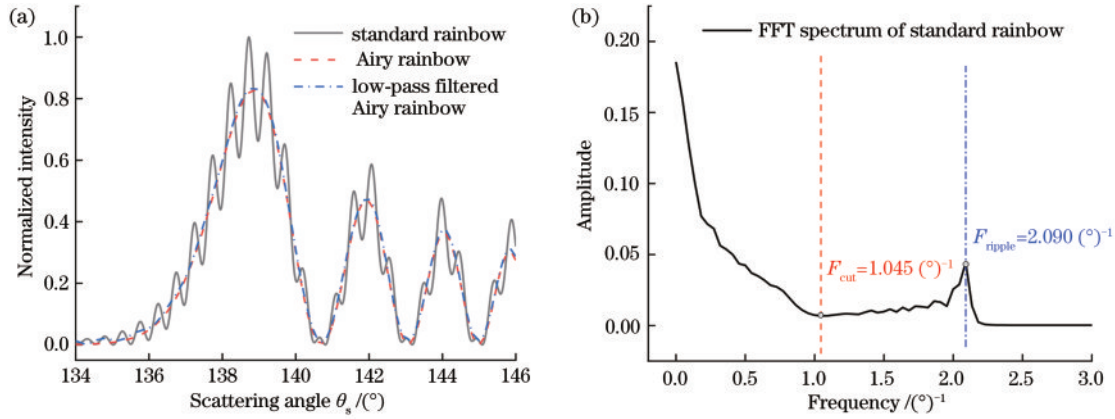


图 3 理论模拟液滴参数为  $n=1.33, D=100 \mu\text{m}$  时的彩虹信号及标准彩虹信号频谱图。(a) 标准彩虹信号、Airy 彩虹信号 ( $p=2$ ) 以及标准彩虹低通滤波后的 Airy 彩虹信号; (b) 图 3(a) 中标准彩虹信号经 FFT 处理后的频谱  
Fig. 3 Rainbow signals and FFT spectrum of the standard rainbow simulated for a droplet with  $n=1.33$  and  $D=100 \mu\text{m}$ . (a) Signals of standard rainbow, Airy rainbow ( $p=2$ ) and low-pass filtered Airy rainbow; (b) spectrum of the standard rainbow in Fig. 3(a) after FFT processing

因此,对折射率和粒径反演范围的精确预估是一个重要步骤。

### 3.4.2 标准彩虹

标准彩虹信号,经低通滤波后可以获得光滑的 Airy 彩虹,记 Airy 彩虹主峰左侧最大强度位置乘以 0.42 后对应位置处的散射角为  $\theta_{\text{rg, est}}$ 。根据文献[23],可知  $\theta_{\text{rg, est}}$  在几何光学彩虹角附近,根据(1)式可以计算得到预估的折射率  $n_{\text{est}}$ 。一般来说,设置较宽的折射率范围,上下限分别设为  $n_{\text{min}}=n_{\text{est}}-0.005, n_{\text{max}}=n_{\text{est}}+0.005$ 。

图 3(b) 中  $F_{\text{ripple}}$  为  $F_{\text{cut}}$  频率后频谱图中的第一个振幅强度最大值位置,其物理意义为该频率附近信号为  $p=2$  和  $p=0$  阶散射信号干涉形成的 Ripple 结构。在几何彩虹角  $\theta_{\text{rg}}$  附近,基于几何光学推导的 Ripple 角频率表达式为

$$F_{\text{ripple}} = \left( \frac{n^2 + 2}{3n^2} \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}} \right) \frac{D}{\lambda} \times \frac{\pi}{180^\circ} = c(n) \frac{D}{\lambda} \times \frac{\pi}{180^\circ}, \quad (11)$$

式中  $c(1.33)=0.6125, c(1.34)=0.6040$ , 即折射率  $n$  从 1.33 改变到 1.34, 该系数仅变化 1.4% 左右。(11) 式表明 Ripple 结构的角频率与液滴粒径成正比, 因此该方法可以用于计算粒径  $D$ 。同时也应看到, 该公式中含有液滴折射率  $n$  这一未知量, 所幸的是该公式对折射率  $n$  并不敏感。假设折射率  $n=1.335$ , 波长  $\lambda=0.532 \mu\text{m}$  时,  $F_{\text{ripple}}=1.995 \times 10^{-2} D \mu\text{m}^{-1}/(\text{degrees})$ , 据此可预估液滴粒径。根据图 3(b) 中给出的实际频率  $F_{\text{ripple}}=2.090 (\text{degrees})^{-1}$ , 可得其预估液滴粒径应为

$104.7 \mu\text{m}$ , 与真实值  $100 \mu\text{m}$  非常接近, 这说明该方法可以很好地用于粒径反演范围的预设。基于经验, 标准彩虹信号的粒径反演上下限分别设为  $D_{\text{min}}=\max(D_{\text{est}}-25, 0)$  和  $D_{\text{max}}=D_{\text{est}}+25$ 。

### 3.4.3 全场彩虹

全场彩虹信号, 由于不同粒径液滴标准彩虹信号的叠加, Ripple 结构自然消除, 因此, 无法采取上述方法进行反演参数范围的预估。而通过提取全场彩虹信号的特征点进行分析, 根据经验公式可以得到折射率和平均粒径的预估值。

van Beeck 等[13] 的研究采用彩虹主峰的左右拐点作为特征点。根据 Airy 理论估算的粒径  $D_{\text{est}}$  和几何彩虹角  $\theta_{\text{rg, est}}$ , 可得

$$D_{\text{est}} = 531.6\lambda(\theta_{\text{inf}2} - \theta_{\text{inf}1})^{-1.5}, \quad (12)$$

$$\theta_{\text{rg, est}} = \theta_{\text{inf}1} - 13.91(\lambda/D_{\text{est}})^{2/3}, \quad (13)$$

式中:  $\theta_{\text{inf}1}$  为彩虹主峰左拐点位置;  $\theta_{\text{inf}2}$  为右拐点位置。该公式能有效避免液滴群多分散程度较大时 Airy 彩虹第二个峰消除。

(1) 式代入 (13) 式中, 可以计算得到预估的折射率  $n_{\text{est}}$ , 其折射率设置范围同标准彩虹信号; 而全场彩虹的粒径反演范围通常更大, 分别设置为  $D_{\text{min}}=\max(D_{\text{est}}-60 \mu\text{m}, 0)$  和  $D_{\text{max}}=D_{\text{est}}+60 \mu\text{m}$ 。

由于其简单性和快速性, Airy 理论特征点经验法已成为其他全场彩虹反演算法选取初始值的优选。上述预估的粒径  $D_{\text{est}}$  和折射率  $n_{\text{est}}$ , 同时也被设置为反演计算中参数的初始值。

### 3.5 反演算法流程

彩虹信号反演流程如图 4 所示。首先读入经过预处理的彩虹信号并按最大值归一化,然后选择反演段,反演段中需至少包含一个完整的主峰。将上述预估的折射率和粒径,设置为输入初始值。根据初始值,通过待修正系数的 CAM 理论计算光强矩阵,并通过非负最小二乘法求解计算当前目标函数值。判断目标函数值是否小于阈值 1:如果是,则输出结果;如果否,则根据迭代方法搜索确定下一个迭代点。同时判断与上一个迭代点的改变量是否小于阈值 2:如果是,同样停止迭代输出结果;如果否,则重复上述计算。

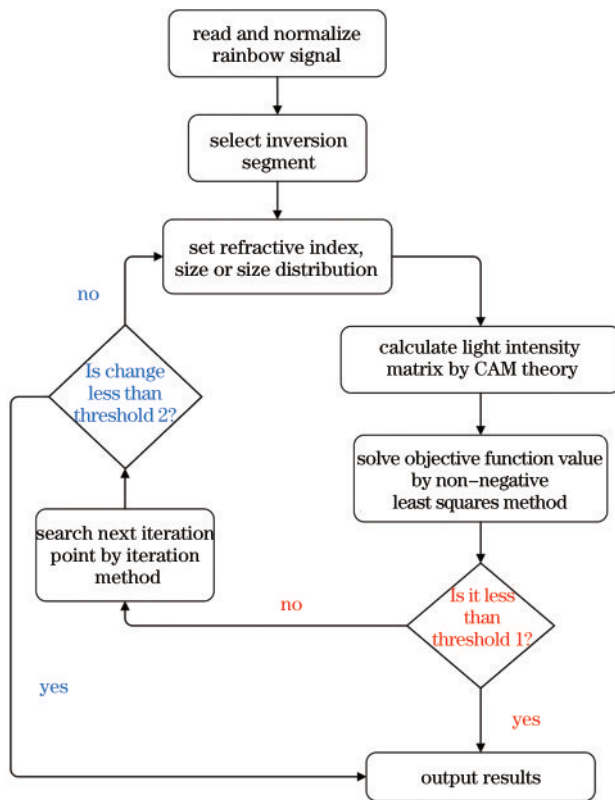


图 4 彩虹信号反演流程图

Fig. 4 Inversion flowchart of rainbow signal

本文算法的求解过程中,迭代是否结束的判断准则,依赖于目标函数值的阈值  $\Delta$  和待求变量参数的变化阈值  $\epsilon$ 。由前面 3.3 节中的内容可知,目标函数值在迭代过程中必定是递减的。目标函数值的阈值设置为  $\Delta=10^{-6}$ ,此项足以保证反演拟合的精度。待求变量参数的变化阈值设置为  $\epsilon=2 \times 10^{-4}$ ,这是因为彩虹折射技术测量折射率的精度就是  $2 \times 10^{-4}$ ,而粒径的测量精度要小于该阈值  $\epsilon$ 。设置阈值的目的是在保证测量精度的基础上,避免无效的迭

代优化计算。

## 4 数值数据验证

针对上述几种常见的反演需求,对算法进行数值模拟验证。基于 Lorentz-Mie 理论,模拟计算具有不同折射率、粒径大小或粒径分布的液滴的标准彩虹信号和全场彩虹信号。值得注意的是,具有粒径分布的液滴群的全场彩虹信号是由粒径具有函数分布的许多单液滴标准彩虹信号数值叠加而成,并不涉及液滴散射信号之间的干涉。输入这些模拟的已知彩虹信号,利用上述的反演算法进行反演计算,输出反演值,并与真实值进行分析。反演彩虹信号时,光强可由  $p=2$  阶散射信号强度 [(2) 式中复振幅的平方] 计算。

### 4.1 标准彩虹信号的反演

图 5 为不同折射率 ( $n=1.33, 1.34, 1.35, 1.36$ ) 和粒径 ( $D=30 \sim 150 \mu\text{m}$ ) 液滴的标准彩虹信号反演结果及误差分析图,其中粒径相邻间隔为  $10 \mu\text{m}$ ,折射率和粒径的选取范围包含常见液体和实际雾化液滴的折射率和粒径选取范围,更加贴合实际应用。从图 5(a) 中可以看出:整体上,反演折射率低于真实值;折射率的最大绝对误差小于  $3 \times 10^{-4}$ ;且大部分情况下折射率绝对误差小于  $2 \times 10^{-4}$ ;在粒径大于  $80 \mu\text{m}$  之后,绝对误差随着粒径增大而逐步减小。该折射率误差对应常见液体燃料(如无水乙醇、正庚烷和正癸烷等)的温度变化值,约  $\pm 0.5 \text{ K}$ ,这表明该算法反演折射率的精度足够高。图 5(b) 给出了反演粒径的绝对误差和相对误差。整体上,反演粒径小于真实值;粒径的绝对误差随粒径增大而增大,但最大误差不超过  $2 \mu\text{m}$ ;同时粒径反演误差受折射率的影响明显,折射率越大,误差越小。而更受关注的粒径相对误差同样随着粒径增大而增大,直到粒径达到  $80 \mu\text{m}$  时相对误差才能稳定下来,最大误差约为  $1.3\%$ 。同时,反演单个标准彩虹信号平均仅耗时  $0.4 \text{ s}$ ,与文献 [12] 中的基于 Debye 理论的反演算法相比,本文反演算法的速度更快,精度也略高些。上述结果表明,对于标准彩虹的参数反演计算,该算法具有不错的精度和速度,具有极大的应用潜力。

### 4.2 全场彩虹信号的反演

对于全场彩虹的参数反演计算,求解方法分为有分布预设和无分布预设。有分布预设需要先假定液滴群的粒径分布符合特定函数,通过求解分布

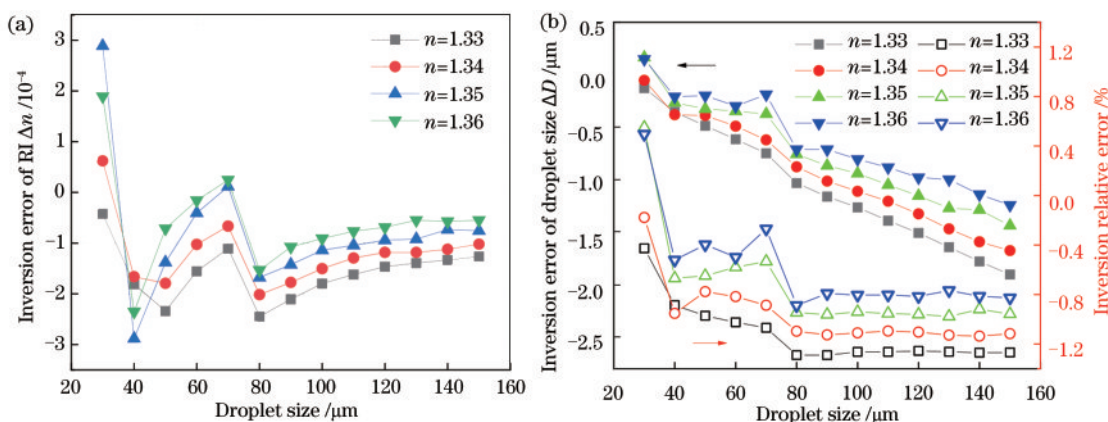


图 5 不同折射率( $n=1.33, 1.34, 1.35, 1.36$ )和粒径( $D=30\sim 150\ \mu\text{m}$ )液滴的标准彩虹信号反演结果及误差分析。(a)折射率的绝对误差;(b)粒径的绝对和相对误差

Fig. 5 Inversion results and error analysis of standard rainbow signals of droplets with different refractive indices ( $n=1.33, 1.34, 1.35$  and  $1.36$ ) and droplet sizes ( $D=30\sim 150\ \mu\text{m}$ ). (a) Absolute error of refractive index; (b) absolute and relative error of droplet size

函数中的未知数来得到液滴群参数。该过程将粒径分布求解问题转化为对分布函数中参数的确定, 由于其待解的未知数个数较少, 计算量相对较小, 应用便捷。但该方法适用范围较小, 仅当假定的液滴粒径分布函数与实际分布情况一致或近似时, 才能获得较高精度。对于某些场合, 如喷雾雾化环节具有较大不稳定性, 且液滴群受环境压力振荡等因素扰动时, 液滴群粒径分布函数的推导变得较为困难。因而, 有分布预设的应用上存在限制。无分布预设是基于概率的一种随机优化方法, 与有分布预设相比, 无须预设粒径的分布规律, 能够适应各种粒径分布, 应用范围更广。但同时由于需要求解非常多的参数, 计算量大。本节中, 我们对常见的液滴粒径分布(正态分布和对数正态分布)进行数值验证。

#### 4.2.1 有分布预设

图 6 为不同粒径分布参数液滴群的全场彩虹信号有分布预设的反演结果。算法反演结果为折射率、粒径平均值以及分布标准差。图中所有工况(下同)下设置的真实折射率均为 1.3520, 而反演获得的折射率也都是 1.3520, 误差小于  $1 \times 10^{-4}$ , 具有非常高的精度。图 6(a)中粒径分布符合正态分布, 平均粒径  $\mu$  分别为  $30\sim 150\ \mu\text{m}$ , 间隔为  $10\ \mu\text{m}$ , 标准差  $\sigma$  分别为  $2, 5, 10\ \mu\text{m}$ 。可以看到, 反演的平均粒径与理论值吻合得非常好, 最大相对误差约为 1.5%。反演的分布标准差误差随着粒径增大而减小; 对于标准差  $\sigma$  为  $2\ \mu\text{m}$  时, 反演误差相对误差从 10% 降到 6.5%; 对于标准差  $\sigma$  为  $5\ \mu\text{m}$  时, 相对误差由 11.8% 降到 7.3%; 对于标准差  $\sigma$  为  $10\ \mu\text{m}$  时, 相对误差由 14.4% 降到 7.8%。

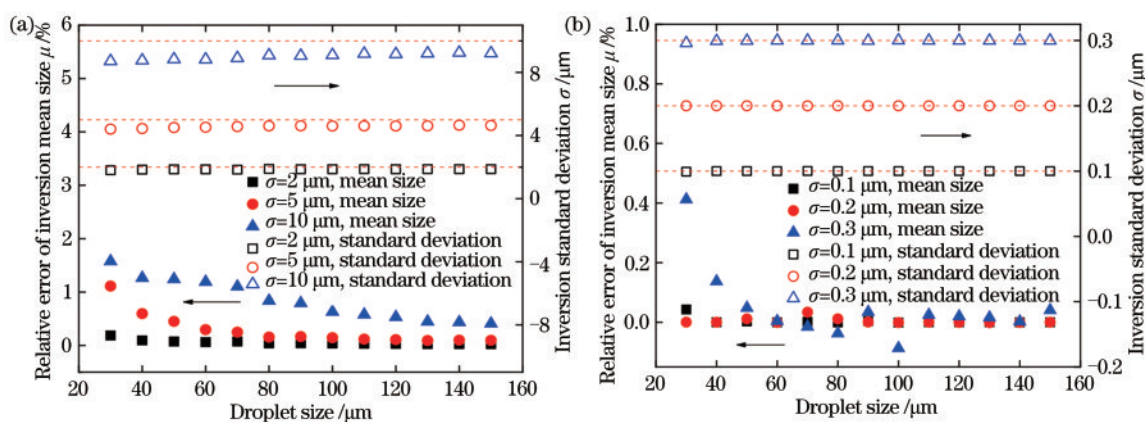


图 6 不同粒径分布液滴群的全场彩虹信号有分布预设反演结果。(a)正态分布;(b)对数正态分布

Fig. 6 Distribution preset inversion results of global rainbow signals of dispersed droplets with different size distributions. (a) Normal distribution; (b) log-normal distribution



图 6(b)中粒径分布符合对数正态分布,反演的平均粒径和标准差的最大相对误差分别为 0.4% 和 1.0%,该误差相当小,故可以忽略。此外,反演单个有分布预设的全场彩虹信号平均耗时 7.3 s,其耗时是标准彩虹信号反演耗时的 18 倍。该部分结果表明,该算法对于有分布预设液滴群的全场彩虹信号反演计算具有不错的表现,特别是对数正态分布。实际雾化场中,液滴粒径普遍符合对数正态分布。

#### 4.2.2 无分布预设

图 7 为不同对数正态分布参数液滴群的全场彩虹信号非分布预设反演结果。值得注意的是,图 7 的粒径分布是单峰分布,本研究将这几个反演结果

合在同一张图中。这 8 个反演工况的分布参数分别为  $(\mu=60/80/100/120 \mu\text{m}, \sigma=0.1 \mu\text{m})$ 、 $(\mu=40/60/80/100 \mu\text{m}, \sigma=0.2 \mu\text{m})$ 。上述这些工况的折射率反演结果均为 1.3520,与真实值完全一致。

图 7(a)中标准差  $\sigma=0.1 \mu\text{m}$  下,非分布预设反演的平均粒径  $\sum_{m=1}^i N(D_m) \cdot D_m / \sum_{m=1}^i N(D_m)$  分别为 60.2, 80.2, 100.3, 120.4  $\mu\text{m}$ ,与理论值非常接近,最大相对误差为 0.33%。图 7(b)中标准差  $\sigma=0.2 \mu\text{m}$  下,反演的平均粒径分别为 40.6, 61.0, 80.5, 101.3  $\mu\text{m}$ ,最大相对误差为 1.67%。图中,同样给出了理论的对数正态分布(用曲线表示),可以看出非分布预设反演结果与理论值符合得较好。

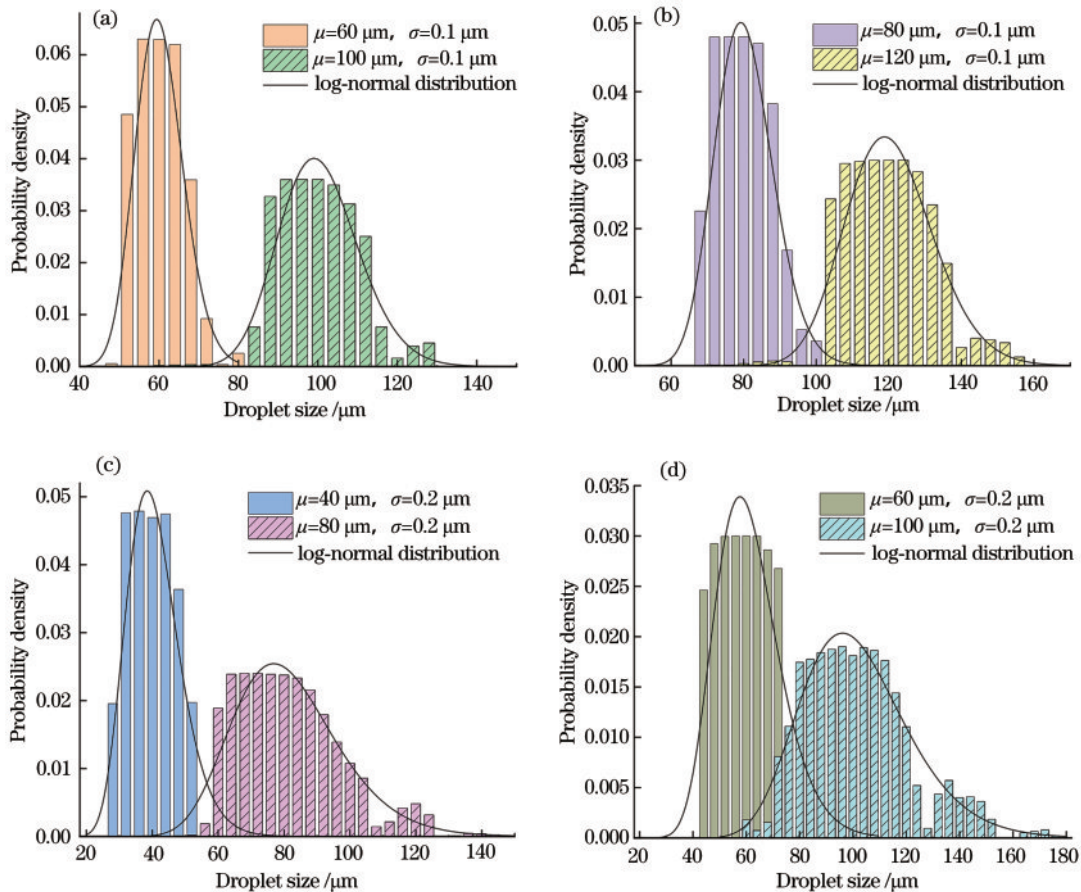


图 7 不同对数正态分布液滴群的全场彩虹信号非分布预设反演结果。(a)  $\mu=60 \mu\text{m}, \sigma=0.1 \mu\text{m}$  和  $\mu=100 \mu\text{m}, \sigma=0.1 \mu\text{m}$ ; (b)  $\mu=80 \mu\text{m}, \sigma=0.1 \mu\text{m}$  和  $\mu=120 \mu\text{m}, \sigma=0.1 \mu\text{m}$ ; (c)  $\mu=40 \mu\text{m}, \sigma=0.2 \mu\text{m}$  和  $\mu=80 \mu\text{m}, \sigma=0.2 \mu\text{m}$ ; (d)  $\mu=60 \mu\text{m}, \sigma=0.2 \mu\text{m}$  和  $\mu=100 \mu\text{m}, \sigma=0.2 \mu\text{m}$

Fig. 7 Non-distribution preset inversion results of global rainbow signals of dispersed droplets with different log-normal distributions. (a)  $\mu=60 \mu\text{m}, \sigma=0.1 \mu\text{m}$  and  $\mu=100 \mu\text{m}, \sigma=0.1 \mu\text{m}$ ; (b)  $\mu=80 \mu\text{m}, \sigma=0.1 \mu\text{m}$  and  $\mu=120 \mu\text{m}, \sigma=0.1 \mu\text{m}$ ; (c)  $\mu=40 \mu\text{m}, \sigma=0.2 \mu\text{m}$  and  $\mu=80 \mu\text{m}, \sigma=0.2 \mu\text{m}$ ; (d)  $\mu=60 \mu\text{m}, \sigma=0.2 \mu\text{m}$  and  $\mu=100 \mu\text{m}, \sigma=0.2 \mu\text{m}$

反演单个无分布预设的全场彩虹信号平均耗时 13.2 s,是标准彩虹信号反演耗时的 33 倍,是有

分布预设的 1.8 倍。当然全场彩虹信号反演耗时与粒径分布设置的粒径间距  $\Delta D$  有关,粒径分布的待

求参数个数  $i$  等于  $[(D_{\max} - D_{\min}) / \Delta D + 1]$ 。间距越大,待求参数的个数越少,耗时越短,但会牺牲一部分反演精度。为达到平衡,本文中的粒径间距设置为  $4 \mu\text{m}$ ,下同。

图 8 为不同正态分布参数液滴群的全场彩虹信号非分布预设反演结果,同样为单峰分布。这 17 个反演工况的分布参数分别是  $(\mu=40/60/80/100/120/140/160 \mu\text{m}, \sigma=2 \mu\text{m})$ 、 $(\mu=40/60/80/100/120/140/160 \mu\text{m}, \sigma=5 \mu\text{m})$  和  $(\mu=60/100/140 \mu\text{m}, \sigma=10 \mu\text{m})$ 。为避免粒径分布严重重叠,标准差大的工况会少些。上述这些工况的折射率反演结果

均为 1.3520,与真实值完全一致。图 8(a) 中标准差  $\sigma=2 \mu\text{m}$  下,非分布预设反演的平均粒径分别为  $39.9, 59.9, 79.9, 99.9, 119.9, 139.9, 159.9 \mu\text{m}$ ,极其接近理论值,最大相对误差仅为 0.25%。图 8(b) 中标准差  $\sigma=5 \mu\text{m}$  下,反演的平均粒径分别为  $39.9, 59.9, 79.9, 99.9, 119.7, 139.9, 159.9 \mu\text{m}$ ,最大相对误差仅为 0.25%。图 8(c) 中标准差  $\sigma=10 \mu\text{m}$  下,反演的平均粒径分别为  $59.6, 99.8, 139.8 \mu\text{m}$ ,最大相对误差仅为 0.67%。图中,同样给出了理论的正态分布对比图,从中也可以看出非分布预设反演结果与真实值非常吻合。

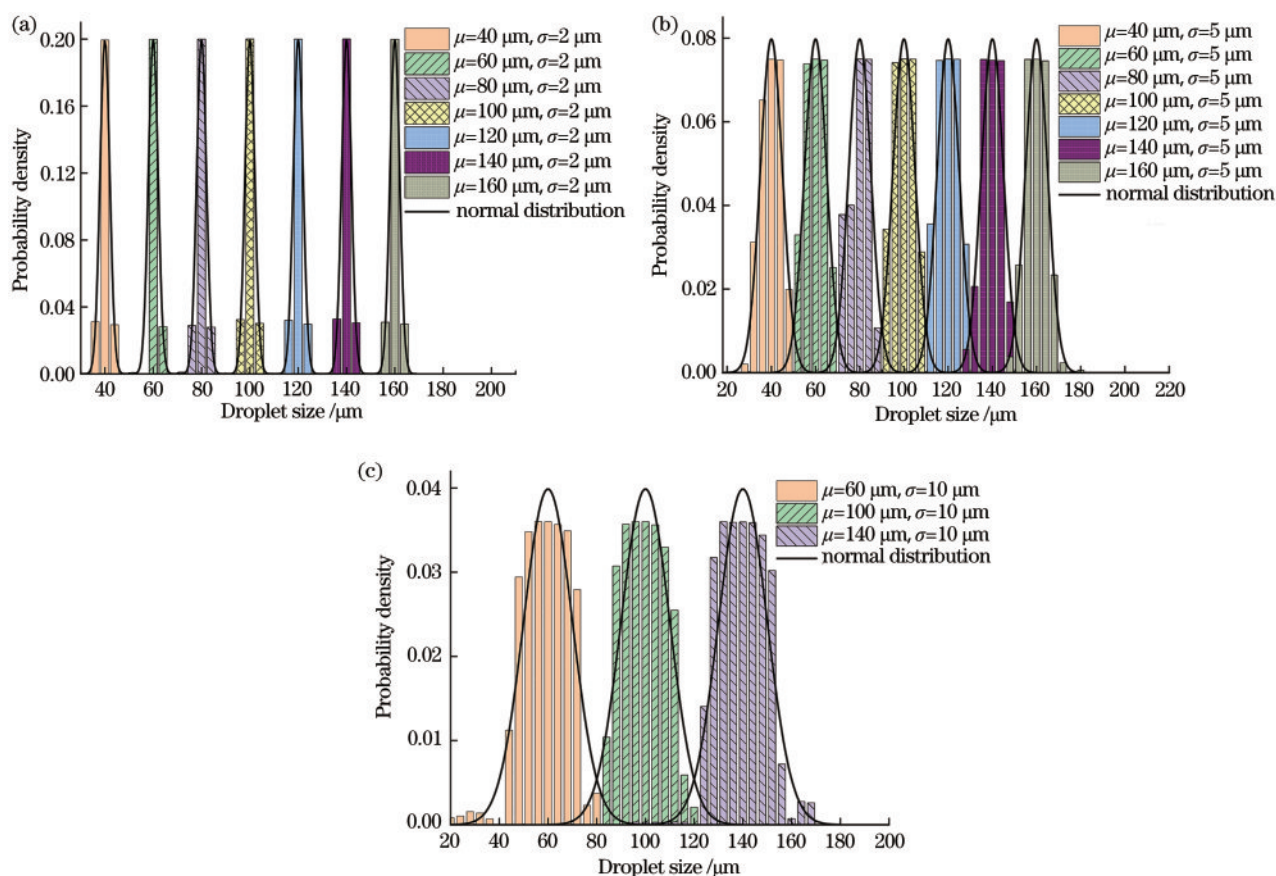


图 8 不同正态分布液滴群的全场彩虹信号非分布预设反演结果。(a)  $\mu=40/60/80/100/120/140/160 \mu\text{m}, \sigma=2 \mu\text{m}$ ; (b)  $\mu=40/60/80/100/120/140/160 \mu\text{m}, \sigma=5 \mu\text{m}$ ; (c)  $\mu=60/100/140 \mu\text{m}, \sigma=10 \mu\text{m}$

Fig. 8 Non-distribution preset inversion results of global rainbow signals of dispersed droplets with different normal distributions. (a)  $\mu=40/60/80/100/120/140/160 \mu\text{m}, \sigma=2 \mu\text{m}$ ; (b)  $\mu=40/60/80/100/120/140/160 \mu\text{m}, \sigma=5 \mu\text{m}$ ; (c)  $\mu=60/100/140 \mu\text{m}, \sigma=10 \mu\text{m}$

上述反演工况中液滴群粒径分布均呈现特定函数分布,而实际情况液滴群粒径分布可能由多个分布组成。为了反映这种情况,对粒径符合三峰分布和双正态分布的全场彩虹信号进行了数值模拟。图 9 展示出了多分布液滴群的全场彩虹信号非分布预设反演结果。图 9(a) 中为三峰分布,粒径分别被设置为  $40, 100, 140 \mu\text{m}$ ,液滴数量比为  $100:50:25$ 。

可以看出,粒径和数量比均能更好地被反演出来。而图 9(b) 中为双正态分布,粒径分布分别被设置为  $(\mu=40 \mu\text{m}, \sigma=2 \mu\text{m})$  和  $(\mu=100 \mu\text{m}, \sigma=4 \mu\text{m})$ ,整体液滴数量比为  $1:2$ 。根据图中反演结果推断,两个正态分布的平均粒径分别为  $39.8 \mu\text{m}$  和  $100.3 \mu\text{m}$ ,相对误差分别为  $0.5\%$  和  $0.3\%$ ;这两个分布液滴群数量比为  $1:1.98$ ,也较符合真实值。

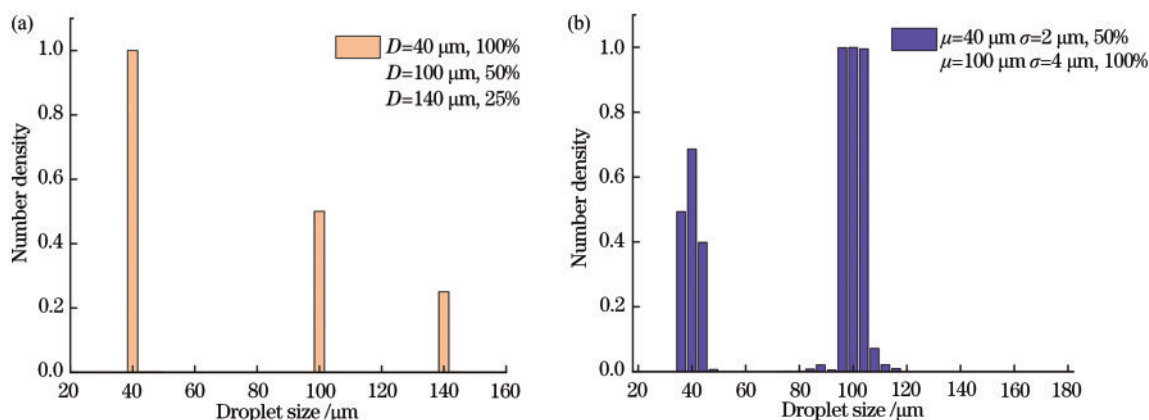


图9 多分布液滴群的全场彩虹信号非分布预设反演结果。(a)三峰分布;(b)双正态分布

Fig. 9 Non-distribution preset inversion results of global rainbow signals of dispersed droplets with multi-distributions. (a) Trimodal distribution; (b) binormal distribution

## 5 实验数据验证

为了进一步测试算法,进行简单的实验验证。搭建标准彩虹和全场彩虹光学测量系统,分别对去离子水单分散液滴串和喷雾进行测量,并记录保存测量图像。图10(a)为单分散液滴发生器发生的参数已知且可控( $D=135\ \mu\text{m}$ ,  $n=1.3362$ )的单分散液滴串产生的标准彩虹图像。为了消除噪点造成的误差,截取彩虹图中间上下

各50行像素取平均值,并且代入散射角标定公式获得彩虹信号强度-像素位置分布,如图10(b)中实验标准彩虹信号所示。将其代入上述反演算法,计算可得如图10(b)所示的信号拟合情况,在彩虹主峰位置拟合得非常好;反演得出的粒径为 $133.5\ \mu\text{m}$ ,折射率为 $1.3361$ ;绝对误差分别为 $1.5\ \mu\text{m}$ (相对误差 $1.1\%$ )和 $1\times 10^{-4}$ ,反演结果精确。另外,可以看出该实验彩虹信号并没有明显的噪声干扰。

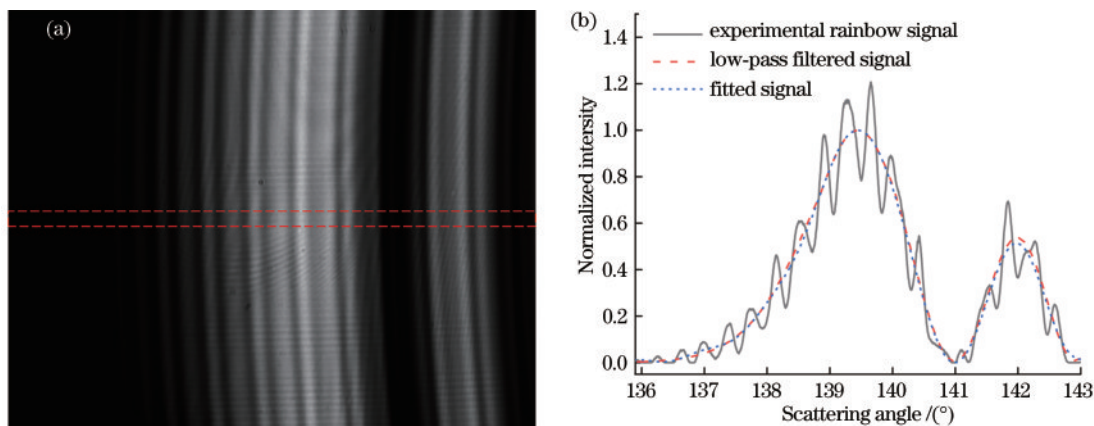


图10 单分散液滴串的实验结果。(a)标准彩虹图像;(b)实验标准彩虹信号与拟合信号对比

Fig. 10 Experimental results for monodisperse droplets. (a) Standard rainbow image; (b) comparison between experimental standard rainbow signal and fitted signal

图11(a)为喷头喷出的雾化液滴产生的全场彩虹图像,图中有一些黑点,这是由测量过程中部分雾化小液滴沾在收集透镜上所致。同样为了消除这些影响,采取与图10一样的平均处理方法,得到如图11(b)所示的实验全场彩虹信号,从中可以看出信号最左侧存在由液滴无效散射光导致的背景噪声,该噪声在信号处理中会被消除。经过算法无

粒径分布预设反演后,可以看出其拟合计算的全场彩虹信号与实验值很好地吻合。这里只选取彩虹主峰附近信号进行拟合处理,因为这部分信号的信噪比较高,其反演的平均折射率为 $1.3365$ ,绝对误差为 $3\times 10^{-4}$ 。粒径分布反演结果如图11(c)所示,其平均粒径为 $62.4\ \mu\text{m}$ ,误差与文献[14-15]中其他算法相当或更低。

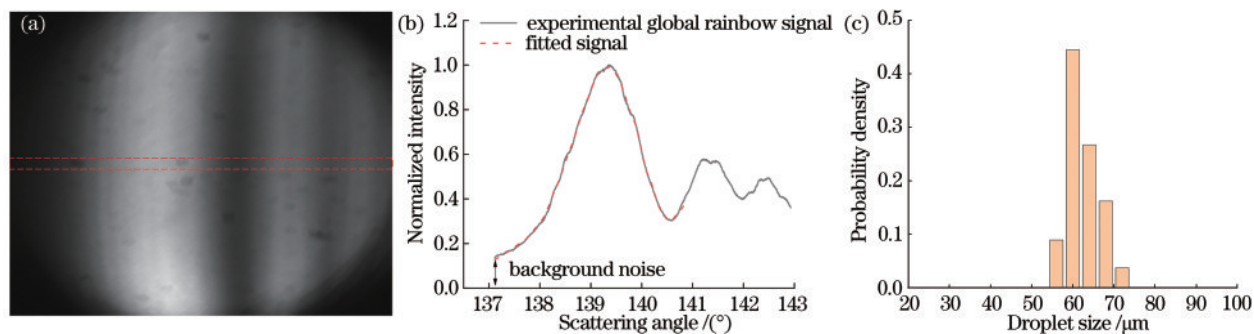


图 11 多分散液滴群的实验结果。(a)全场彩虹图像;(b)实验全场彩虹信号与拟合信号对比;(c)无粒径分布预设反演结果  
Fig.11 Experimental results for polydisperse droplets. (a) Global rainbow image; (b) comparison between experimental global rainbow signal and fitted signal; (c) non-distribution preset inversion result

## 6 结 论

本文提出一种基于局部最小的通用性反演算法,能同时适应标准和全场彩虹信号的反演处理。该算法利用带修正系数的CAM理论建立带不等式约束的非线性最优化目标函数,并采用序列二次规划法进行迭代求解。通过对彩虹信号进行信号预处理,将全局最小优化问题转化成局部最小优化问题,获得预估信息,精确地加快了反演进程。模拟各种实际粒径分布工况,数值计算研究表明该算法具有极高的精度,从反演结果中可知:标准彩虹折射率最大绝对误差小于 $3 \times 10^{-4}$ ,最大粒径相对误差为1.3%;各种工况下,全场彩虹反演的折射率误差均小于 $1 \times 10^{-4}$ ,平均粒径相对误差小于1.67%。最后对该算法进行了单分散液滴和雾化液滴群的实验,实验结果表明折射率误差均小于 $3 \times 10^{-4}$ ,标准彩虹粒径相对误差小于1.1%。

### 参 考 文 献

- [1] Roth N, Anders K, Frohn A. Simultaneous measurement of temperature and size of droplets in the micrometer range[J]. Journal of Laser Applications, 1990, 2(1): 37-42.
- [2] Saengkaew S, Charinpanitkul T, Vanisri H, et al. Rainbow refractometry on particles with radial refractive index gradients[J]. Experiments in Fluids, 2007, 43(4): 595-601.
- [3] Li H P, Rosebrock C D, Wriedt T, et al. The effect of initial diameter on rainbow positions and temperature distributions of burning single-component n-Alkane droplets[J]. Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 2017, 195: 164-175.
- [4] Rosebrock C D, Shirinzadeh S, Soeken M, et al. Time-resolved detection of diffusion limited temperature gradients inside single isolated burning droplets using Rainbow Refractometry[J]. Combustion and Flame, 2016, 168: 255-269.
- [5] Wu Y C, Promvongsa J, Saengkaew S, et al. Phase rainbow refractometry for accurate droplet variation characterization[J]. Optics Letters, 2016, 41(20): 4672-4675.
- [6] Wu Y C, Crua C, Li H P, et al. Simultaneous measurement of monocomponent droplet temperature/refractive index, size and evaporation rate with phase rainbow refractometry[J]. Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 2018, 214: 146-157.
- [7] Wu Y C, Li H P, Wu X C, et al. Change of evaporation rate of single monocomponent droplet with temperature using time-resolved phase rainbow refractometry[J]. Proceedings of the Combustion Institute, 2019, 37(3): 3211-3218.
- [8] Li C, Lv Q, Wu Y C, et al. Measurement of transient evaporation of an ethanol droplet stream with phase rainbow refractometry and high-speed microscopic shadowgraphy[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2020, 146: 118843.
- [9] Wu X C, Jiang H Y, Wu Y C, et al. One-dimensional rainbow thermometry system by using slit apertures[J]. Optics Letters, 2014, 39(3): 638-641.
- [10] Wu Y C, Promvongsa J, Wu X C, et al. One-dimensional rainbow technique using Fourier domain filtering[J]. Optics Express, 2015, 23(23): 30545-30556.
- [11] Cao J Z, Li C, Wu Y C, et al. Development and experimental test of compact rainbow refractometer

- [J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2019, 56(10): 101201.
- 曹建政, 李灿, 吴迎春, 等. 紧凑型彩虹折射仪的开发与实验测试[J]. *激光与光电子学进展*, 2019, 56(10): 101201.
- [12] Song F H, Xu C L, Wang S M. Reversion algorithm for liquid column parameters with rainbow refractometry based on Debye theory [J]. *Acta Optica Sinica*, 2011, 31(12): 1212006.
- 宋飞虎, 许传龙, 王式民. 基于德拜理论的液柱参数彩虹反演算法研究[J]. *光学学报*, 2011, 31(12): 1212006.
- [13] van Beeck J P A J, Zimmer L, Riethmuller M L. Global rainbow thermometry for mean temperature and size measurement of spray droplets[J]. *Particle & Particle Systems Characterization*, 2001, 18(4): 196-204.
- [14] Wu Y C, Wu X C, Saengkaew S, et al. Concentration and size measurements of sprays with global rainbow technique [J]. *Acta Physica Sinica*, 2013, 62(9): 090703.
- 吴迎春, 吴学成, Saengkaew S, 等. 全场彩虹技术测量喷雾浓度及粒径分布[J]. *物理学报*, 2013, 62(9): 090703.
- [15] Song F H, Li Z F. Reversion algorithm of global rainbow technique based on optimization process[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2016, 53(7): 071203.
- 宋飞虎, 李臻峰. 基于优化过程的全场彩虹技术反演算法[J]. *激光与光电子学进展*, 2016, 53(7): 071203.
- [16] Laven P. Simulation of rainbows, coronas and glories using Mie theory and the Debye series [J]. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 2004, 89(1/2/3/4): 257-269.
- [17] Nussenzveig H M. High-frequency scattering by a transparent sphere. I. Direct reflection and transmission [J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1969, 10(1): 82-124.
- [18] Nussenzveig H M. High-frequency scattering by a transparent sphere. II. Theory of the rainbow and the glory [J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1969, 10(1): 125-176.
- [19] Saengkaew S, Charinpanitkul T, Vanisri H, et al. Rainbow refractometry: on the validity domain of Airy's and Nussenzveig's theories [J]. *Optics Communications*, 2006, 259(1): 7-13.
- [20] Nocedal J, Wright S J. Numerical optimization[M]. 2nd ed. Berlin: Springer, 2006.
- [21] Han S P. A globally convergent method for nonlinear programming [J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1977, 22(3): 297-309.
- [22] Powell M J D. A fast algorithm for nonlinearly constrained optimization calculations [C] // Watson G A. *Numerical Analysis*. Berlin, Heidelberg: Springer, 1978, 630: 144-157.
- [23] Wu X C, Jiang H Y, Cao K L, et al. Self-calibrated global rainbow refractometry: a dual-wavelength approach[J]. *Chinese Optics Letters*, 2017, 15(4): 042902.