

# 基于 $L_p$ 范数联合全变分的磁共振成像重构方法

段继忠\*, 和晓珣, 刘畅, 谢明鸿

昆明理工大学信息工程与自动化学院, 云南 昆明 650504

**摘要** 局部  $k$  空间邻域模型是最近提出的一种  $k$  空间低秩约束重构模型, 其利用图像的线性位移不变性将图像的  $k$  空间数据映射到高维矩阵中, 可以解决图像重构的问题。在并行磁共振成像重构的过程中, 使用欠采样技术来提高成像速度会导致重构图像的质量下降, 为此提出一种基于交替方向乘法求解的  $L_p$  范数联合全变分正则项局部  $k$  空间邻域建模算法, 将所提算法与其他算法在人体的脑部和膝盖数据集上进行实验。实验结果表明, 相比于其他算法, 所提算法能够减少重构图像的伪影, 更好地保留重构图像的边缘轮廓信息, 重构效果更好。

**关键词** 成像系统; 磁共振成像; 并行成像;  $L_p$  范数联合全变分; 局部  $k$  空间邻域建模

中图分类号 TP391

文献标志码 A

doi: 10.3788/LOP202158.2411001

## Method of Magnetic Resonance Imaging Reconstruction Based on $L_p$ -Norm Joint Total Variation

Duan Jizhong\*, He Xiaoxun, Liu Chang, Xie Minghong

Faculty of Information Engineering and Automation, Kunming University of Science and Technology, Kunming, Yunnan 650504, China

**Abstract** The local  $k$ -space neighborhood model is a recently proposed  $k$ -space low-rank constrained reconstruction model, which uses the linear displacement invariance of the image to map the  $k$ -space data of the image to a high-dimensional matrix, which can solve the problem of image reconstruction. In the process of parallel magnetic resonance imaging reconstruction, the use of undersampling technology to increase the imaging speed will cause the quality of the reconstructed image to decrease. For this reason, a local  $k$ -space neighborhood modeling algorithm based on  $L_p$ -norm joint total variational regular terms is proposed. The proposed algorithm is to experiment with the proposed algorithm and other algorithms on the human brain and knee datasets. The experimental results show that compared with other algorithms, the proposed algorithm can reduce the artifacts of the reconstructed image, retain the edge contour information of the reconstructed image better, and achieve better reconstruction effect.

**Key words** imaging systems; magnetic resonance imaging; parallel imaging;  $L_p$ -norm joint total variation; local  $k$ -space neighborhood modeling

**OCIS codes** 110.3010; 100.2960; 100.3010

## 1 引言

磁共振成像(MRI)是一种利用核磁共振原理进行医学成像的技术,具有无创伤、无电离辐射和高分辨率等优点<sup>[1]</sup>,是当今医学诊断和治疗监测的重要

手段之一。尽管 MRI 技术已经广泛应用在临床医疗中,但是由于成像时间较长,极大地限制了 MRI 技术的发展。

为了解决成像时间较长的问题,研究者们提出了压缩感知(CS)技术<sup>[2-4]</sup>,该技术可以突破传统奈

收稿日期: 2020-12-16; 修回日期: 2021-01-09; 录用日期: 2021-02-12

基金项目: 国家自然科学基金(61861023)

通信作者: \*duanjz@kust.edu.cn

奎斯特采样频率的限制,能够从少量的测量数据中恢复原始信号。文献[5-6]基于 CS 的理论提出了稀疏 MRI 重构算法,该算法可以采用非线性共轭梯度法来求解复合正则项的最小化问题,为此能够重构出具有高分辨率的图像,然而这类算法的重构时间相对较长。为了进一步加快算法的重构速度,文献[7]提出了单一  $L_1$  正则项的最小化问题<sup>[8]</sup>,通过 Bregman 迭代法来获得重构问题的精确解。文献[9]利用交替方向乘子法(ADMM)来求解单一全变分(TV)<sup>[10]</sup>最小化问题,有效提升了重构算法的收敛速度,单一正则项重构算法虽可降低算法的复杂度,但在一定程度上降低了重构图像的质量。

近年来,并行成像技术在加快成像速度方面的效果显著,逐渐成为该领域的研究热点之一。并行成像技术可以通过多通道相控阵线圈同时采集磁共振信号,利用各个线圈的空间灵敏度差异来编码空间信息<sup>[11]</sup>。一类并行成像技术是先获取灵敏度信息,然后根据线圈的灵敏度信息来重构图像<sup>[12-14]</sup>,然而这类技术最主要的障碍是很难准确测量接收线圈的灵敏度,微小的扰动误差就会导致成像图中出现可见的伪影,使重构结果不一致。另一类并行成像技术是基于 k 空间局部内核提出的,其灵敏度信息直接来自 k 空间邻域点的自校准信号<sup>[15-17]</sup>,能够有效避免灵敏度估计所带来的问题。在并行成像技术中,CS 与并行成像的组合也是当前的研究热点之一<sup>[18-20]</sup>,两种加速技术的结合可以实现额外的加速。为了进一步提高图像的重构质量,文献[21]提出了一种新颖的 LORAKS (Low-Rank Modeling of Local k-Space Neighborhoods)算法,根据图像在 k 空间中的线性依赖关系或缓慢变化的相位可以将低维矩阵映射到高维矩阵中以解决重构问题。由于 LORAKS 算法的计算成本高,文献[22]提出了自动校准的 LORAKS(AC-LORAKS)算法,但是这类算法对重构速度的提升有限,而且无法有效保留 MRI 图像的边缘信息和细节信息。为了进一步扩展 LORAKS 算法的应用范围,文献[23]将 LORAKS 算法应用在并行 MRI 的重构过程中,即 P-LORAKS 算法,通过求解并行成像数据的低秩矩阵来解决图像重构的问题,有效提高了重构图像的质量,但是在该方法中未添加额外的正则项约束,所以重构质量还有进一步提升的空间。

在并行 MRI 的重构过程中,使用欠采样技术来提高成像速度会导致重构图像的质量下降,为此本文提出一种基于  $L_p$  范数联合全变分(JTV)的 MRI

重构方法。实验结果表明,所提方法在保证成像速度的同时能够保留更多的边缘信息和细节信息,有效提高了重构图像的质量。

## 2 算法原理

### 2.1 LORAKS 算法

LORAKS 算法是一种 MRI 重构的方法,该方法首先根据图像在 k 空间中的线性依赖关系将 k 空间中的数据映射到一个低秩矩阵中,然后利用低秩正则化来重构欠采样数据。MRI 的欠采样过程可以表示为

$$\mathbf{A}f = \mathbf{d}, \quad (1)$$

式中: $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times Q}$  表示  $M \times Q$  大小的欠采样矩阵; $f \in \mathbb{C}^{Q \times 1}$  表示  $Q \times 1$  大小的 k 空间数据; $\mathbf{d} \in \mathbb{C}^{M \times 1}$  表示  $M \times 1$  大小的欠采样数据。

文献[21]提出了三种构造 LORAKS 矩阵的方法,如根据图像的线性依赖关系生成的矩阵  $\mathbf{C}$ 、利用相位的缓慢变化构造的矩阵  $\mathbf{S}$  和矩阵  $\mathbf{G}$ ,本文选用矩阵  $\mathbf{S}$  来开展后续的研究。通过线性算子  $\mathbf{R}_s(\cdot): \mathbb{C}^Q \rightarrow \mathbb{R}^{2K \times 2N_R}$  (其中  $K$  表示不同的 k 空间位置数量, $N_R$  表示邻域半径为  $R$  的 k 空间上的点数)对 k 空间数据  $f(n_x, n_y)$  (其中  $n_x \in [-N_x, +N_x]$ ,  $n_y \in [-N_y, +N_y]$ ,  $N_x$  和  $N_y$  分别表示 k 空间数据的行和列的点数)进行线性运算来构造矩阵  $\mathbf{S}$ ,具体形式可表示为

$$\mathbf{R}_s(f) = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{r_+} - \mathbf{S}_{r_-} & -\mathbf{S}_{i_+} + \mathbf{S}_{i_-} \\ \mathbf{S}_{i_+} + \mathbf{S}_{i_-} & \mathbf{S}_{r_+} + \mathbf{S}_{r_-} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

式中: $r$  和  $i$  分别表示数据的实部和虚部。 $\{\mathbf{S}_{r_+}, \mathbf{S}_{r_-}, \mathbf{S}_{i_+}, \mathbf{S}_{i_-}\} \in \mathbb{R}^{K \times N_R}$  中的元素分别表示为

$$[\mathbf{S}_{r_+}]_{km} = f_r(n_x^{(k)} - p'_m, n_y^{(k)} - q_m), \quad (3)$$

$$[\mathbf{S}_{r_-}]_{km} = f_r(-n_x^{(k)} - p'_m, -n_y^{(k)} - q_m), \quad (4)$$

$$[\mathbf{S}_{i_+}]_{km} = f_i(n_x^{(k)} - p'_m, n_y^{(k)} - q_m), \quad (5)$$

$$[\mathbf{S}_{i_-}]_{km} = f_i(-n_x^{(k)} - p'_m, -n_y^{(k)} - q_m), \quad (6)$$

式中: $[\cdot]_{km}$  表示矩阵中的第  $k$  行第  $m$  列元素; $k = 1, \dots, K$ ;  $m = 1, \dots, N_R$ ;  $f_r(n_x, n_y)$  和  $f_i(n_x, n_y)$  分别表示  $f(n_x, n_y)$  的实部和虚部; $p'$  和  $q$  分别表示半径为  $R$  的邻域内数据的横纵坐标。使用  $\{(n_x^{(k)}, n_y^{(k)}) |_{k=1}^K\}$  来表示  $K$  个不同的 k 空间位置, $n_x$  和  $n_y$  分别满足  $-N_x + R \leq n_x \leq N_x - R$  和  $-N_y + R \leq n_y \leq N_y - R$ , 当  $n_x^2 + n_y^2 > R^2$  时,  $f(n_x, n_y) \approx 0$ 。使用  $\{(p_m, q_m) |_{m=1}^{N_R}\}$  来表示集合  $\Lambda_R = \{(p, q) \in \mathbb{Z}^{2 \times 1}, p^2 + q^2 \leq R^2\}$  中不同元素的

有序组合,其中  $N_R$  为  $\Lambda_R$  的基数。

线性算子  $\mathbf{R}_s$  可以使  $\mathbf{R}_s^* \mathbf{R}_s$  (其中上标 \* 表示算子的伴随运算) 构成一个  $Q \times Q$  大小的对角矩阵,则 LORAKS 算法可以表示为

$$\mathbf{f} = \operatorname{argmin}_f \left\{ \|\mathbf{A}\mathbf{f} - \mathbf{d}\|_2^2 + \lambda J_r[\mathbf{R}_s(\mathbf{f})] \right\}, \quad (7)$$

式中:  $\lambda$  表示正则化参数;  $J_r(\cdot)$  表示非凸正则化函数,其中  $r$  表示可调节参数。假设  $\mathbf{X} = \mathbf{R}_s(\mathbf{f}) \in \mathbb{C}^{M \times Q}$ , 则非凸正则化函数可表示为

$$J_r(\mathbf{X}) = \sum_{k' > r} \sigma_{k'}^2 = \min_{\mathbf{T} \in \mathbb{C}^{M \times Q}} \|\mathbf{X} - \mathbf{T}\|_F^2, \quad \text{s. t. rank}(\mathbf{X}) \leq r, \quad (8)$$

式中:  $\|\cdot\|_F$  表示 Frobenius 范数;  $\operatorname{rank}(\cdot)$  表示矩阵的秩;  $\sigma_{k'}$  表示矩阵  $\mathbf{X}$  的第  $k'$  个奇异值。通过求解优化问题[(7)式]即可得到所求的重构图像  $\mathbf{f}$ 。

## 2.2 P-LORAKS 算法

在并行成像的过程中,利用  $L$  个不同的接收线圈来采集  $k$  空间图像,由每一个线圈采集得到的数据  $f_l(x, y)$  都有细小的差别,其中  $l=1, \dots, L$ 。将 LORAKS 算法应用在并行成像中最简单的方法就是使用 LORAKS 算法对每个线圈的  $k$  空间数据进行重建,即 P-LORAKS 算法,可表示为

$$\mathbf{f}^p = \operatorname{argmin}_{\mathbf{f}^p} \left\{ \|\mathbf{A}^p \mathbf{f}^p - \mathbf{d}^p\|_2^2 + \lambda J_r[\mathbf{R}_{ps}(\mathbf{f}^p)] + \beta \|\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{f}^p)\|_{\text{JTV}} \right\}, \quad (11)$$

式中:  $\mathcal{F}^{-1}$  表示逐线圈二维傅里叶逆变换;  $\|\cdot\|_{\text{JTV}}$  表示 JTV 正则项;  $\beta$  为 JTV 正则项参数。为了方便表达,在下文的叙述中将省略变量的上标  $p$ 。

$$\mathbf{f} = \operatorname{argmin}_f \left\{ \|\mathbf{A}\mathbf{f} - \mathbf{d}\|_2^2 + \lambda J_r[\mathbf{R}_{ps}(\mathbf{f})] + \alpha \|\mathbf{D}\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{f})\|_p^p \right\}, \quad (12)$$

式中:  $\alpha$  为  $L_p$  范数联合全变分正则项的参数;  $\|\mathbf{D}\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{f})\|_p^p$  表示  $L_p$  范数联合全变分正则项,  $\|\mathbf{D}\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{f})\|_p^p = \sum_z \varphi\{\|\mathbf{D}\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{f})\|_z\} = \sum_z \varphi\{\|\mathbf{D}\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{f})\|_z\}^p$ , 其中  $z$  表示  $k$  空间索引变量,  $\mathbf{D}$  表示一阶差分算子,  $\varphi(\mathbf{g})$  表示  $\mathbf{g} \in \mathbb{C}^{2L \times 1}$  的  $L_2$  范数的  $p$  次幂,即  $\varphi(\mathbf{g}) = (\|\mathbf{g}\|_2)^p$ ,  $[\mathbf{D}\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{f})]_z \in \mathbb{C}^{2L \times 1}$  表示提取  $\mathbf{D}\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{f})$  的空间位置为  $z$  的所有点组成的列向量<sup>[24]</sup>, 表达式为

$$[\mathbf{D}\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{f})]_z = [[\mathbf{D}_v \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{f}_1)]_z \cdots [\mathbf{D}_v \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{f}_L)]_z \quad [\mathbf{D}_h \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{f}_1)]_z \cdots [\mathbf{D}_h \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{f}_L)]_z]^T \in \mathbb{C}^{2L \times 1}, \quad (13)$$

式中:  $\mathbf{D}_h$  和  $\mathbf{D}_v$  分别表示行方向和列方向的一阶有限差分变换,  $\mathbf{D}_h = \mathbf{D}_n \otimes \mathbf{I}_{m'} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ,  $\mathbf{D}_v = \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{D}_{m'} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ , 其中  $\otimes$  表示 Kronecker 积,  $\mathbf{I}_n$  和  $\mathbf{I}_{m'}$  分别表示大小为  $n \times n$  和  $m' \times m'$  的单位矩阵,  $\mathbf{D}_{m'}$  和  $\mathbf{D}_n$  均表示在周期性边界条件下的一阶有限差分算子矩阵,大小分别为  $m' \times m'$  和  $n \times n$ 。

因此, (12) 式可以转化为

$$\mathbf{f} = \operatorname{argmin}_f \left\{ \|\mathbf{A}\mathbf{f} - \mathbf{d}\|_2^2 + \lambda J_r[\mathbf{R}_{ps}(\mathbf{f})] + \alpha \sum_z \varphi\{\|\mathbf{D}\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{f})\|_z\} \right\}. \quad (14)$$

考虑隐函数  $\varphi$  的加性半二次优化<sup>[25]</sup>,  $\varphi(\mathbf{x})$  可表示为

$$\varphi(\mathbf{x}) = \operatorname{argmin}_w \left\{ \frac{\delta}{2} \|\mathbf{w} - \mathbf{x}\|_2^2 + \psi(\mathbf{w}) \right\}, \quad (15)$$

$$\mathbf{R}_{ps}(\mathbf{f}^p) =$$

$$[\mathbf{R}_s(\mathbf{f}_1) \cdots \mathbf{R}_s(\mathbf{f}_l) \cdots \mathbf{R}_s(\mathbf{f}_L)], \quad (9)$$

式中:  $\mathbf{f}^p \in \mathbb{C}^{L \times Q}$  表示由每个线圈的全采样数据  $f_l$  组合而成。(9) 式中的  $\mathbf{R}_{ps}(\mathbf{f}^p)$  可以表示为

$$\operatorname{rank}[\mathbf{R}_{ps}(\mathbf{f}^p)] \leq \sum_{l=1}^L \operatorname{rank}[\mathbf{R}_s(\mathbf{f}_l)], \quad \text{且 } \mathbf{R}_s(\mathbf{f}_l) \Big|_{l=1}^{L-1}$$

中的零空间向量可以被  $\mathbf{R}_{ps}(\mathbf{f}^p)$  中的零向量填充,这说明将单个线圈矩阵转换成 P-LORAKS 矩阵不会造成低秩矩阵结构的任何损失。

基于 LORAKS 重建算法, P-LORAKS 重建算法可以表示为

$$\mathbf{f}^p = \operatorname{argmin}_{\mathbf{f}^p} \left\{ \|\mathbf{A}^p \mathbf{f}^p - \mathbf{d}^p\|_2^2 + \lambda J_r[\mathbf{R}_{ps}(\mathbf{f}^p)] \right\}, \quad (10)$$

式中:  $\mathbf{d}^p \in \mathbb{C}^{L \times M}$  表示由每个线圈的欠采样数据  $\mathbf{d}_l$  组成。

## 2.3 所提方法

为了进一步研究 P-LORAKS 算法的重构性能,文献[23]将 P-LORAKS 算法与正则项结合以提高重构图像的质量,因此本文考虑使用联合 TV 正则项对图像进行去噪,则重建问题可表示为

式中:  $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^{2L \times 1}$  和  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{2L \times 1}$  表示辅助变量;  $\delta$  表示惩罚项的参数;  $\psi(\mathbf{w})$  表示依赖于  $\varphi(\mathbf{x})$  的矩阵函数。求解  $\mathbf{w}$  的表达式为

$$\mathbf{w} = \mathbf{x} \cdot \max \left[ 1 - \frac{(\|\mathbf{x}\|_2)^{p-2}}{\delta}, 0 \right]. \quad (16)$$

$$(\mathbf{f}, \mathbf{V}) = \operatorname{argmin}_{\mathbf{f}, \mathbf{V}} \left\{ \|\mathbf{A}\mathbf{f} - \mathbf{d}\|_2^2 + \lambda J_r[\mathbf{R}_{\text{PS}}(\mathbf{f})] + \alpha \sum_z \psi(\mathbf{V}_z) + \frac{\alpha\delta}{2} \|\mathbf{V} - \mathbf{D}\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{f}) - \mathbf{B}_V\|_2^2 \right\}. \quad (17)$$

使用 ADMM 算法可以将(17)式分解为如下子问题,表达式为

$$\mathbf{f}^{i+1} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{f}} \left\{ \|\mathbf{A}\mathbf{f} - \mathbf{d}\|_2^2 + \lambda J_r[\mathbf{R}_{\text{PS}}(\mathbf{f})] + \frac{\alpha\delta}{2} \|\mathbf{V}^i - \mathbf{D}\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{f}) - \mathbf{B}_V^i\|_2^2 \right\}, \quad (18)$$

$$\mathbf{V}^{i+1} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{V}} \left\{ \frac{\alpha\delta}{2} \|\mathbf{V} - \mathbf{D}\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{f}^i) - \mathbf{B}_V^i\|_2^2 + \alpha \sum_z \psi(\mathbf{V}_z) \right\}, \quad (19)$$

$$\mathbf{B}_V^{i+1} = \mathbf{B}_V^i + [\mathbf{D}\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{f}^{i+1}) - \mathbf{V}^{i+1}], \quad (20)$$

式中:  $i$  表示第  $i$  次迭代。(20)式是对偶变量  $\mathbf{B}_V^{i+1}$  的更新公式。(19)式可以利用(16)式进行求解,表达式为

$$\mathbf{V}^{i+1} = [\mathbf{D}\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{f}^i) + \mathbf{B}_V^i] \cdot \max \left[ 1 - \frac{(\|\mathbf{D}\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{f}^i) + \mathbf{B}_V^i\|_2)^{p-2}}{\delta}, 0 \right]. \quad (21)$$

(18)式可以通过共轭梯度法来求解,在周期性边界的条件下,  $\mathbf{D}^T \mathbf{D}$  可以通过快速傅里叶变换来实现对角化。所提算法(算法 1)的具体实现步骤如下。重建出  $\mathbf{f}$  后,通过平方和的平方根(SOS)方法即可得到重构的单张幅度图像  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_{\text{SOS}}(\mathbf{f})$ 。

初始化:  $\mathbf{f}^1 = 0, \mathbf{V}^1 = 0, \mathbf{B}_V^1 = 0, i = 0$ 。

输入:  $d$ 。

1) 令  $i = i + 1$ 。

2) 使用(21)式求解出  $\mathbf{V}^{i+1}$ 。

3) 使用共轭梯度法来求解 (18)式以得到  $\mathbf{f}^{i+1}$ 。

4) 求解  $\mathbf{B}_V^{i+1} = \mathbf{B}_V^i + [\mathbf{D}\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{f}^{i+1}) - \mathbf{V}^{i+1}]$ 。

5) 满足收敛条件停止,否则返回步骤 4)。

6) 输出幅度图像,  $\hat{\mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{l=1}^L |[\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{f}^{i+1})]_l|^2}$ 。

## 3 实验和分析

### 3.1 实验配置

为了测试所提算法的重构性能,将所提算法分别与 P-LORAKS 算法和 JTV-PLORAKS 算法进行比较,所有算法均用 MATLAB 来实现。

实验所用的数据为一个人体脑部数据集 GE\_human\_brain<sup>[26]</sup> 和一个人体膝盖数据集 P1\_imk\_100<sup>[27]</sup>,图像尺寸分别为 256 pixel × 256 pixel 和 320 pixel × 320 pixel。实验均在配置为 Intel core i7-8700 @ 3.20 GHz 的 GPU、16 GB 的内存和

使用增广拉格朗日乘子法引入辅助变量  $\mathbf{V} = \mathbf{D}\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{f}) \in \mathbb{C}^{2NL \times 1}$  和对偶变量  $\mathbf{B}_V \in \mathbb{C}^{2NL \times 1}$ , 其中  $\mathbf{V} = [\mathbf{V}_1 \cdots \mathbf{V}_z \cdots \mathbf{V}_N]$ ,  $\mathbf{V}_z = [\mathbf{D}\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{f})]_z \in \mathbb{C}^{2L \times 1}$ ,  $\mathbf{B}_V = [\mathbf{B}_{V_1} \cdots \mathbf{B}_{V_z} \cdots \mathbf{B}_{V_N}]$ , 则(14)式可以转化为

Ubuntu 18.04.5 操作系统的计算机上进行,所有实验参数均根据最佳的信噪比进行调优。本文在定量评估重建图像质量的过程中,使用信噪比(SNR)、归一化均方误差(NMSE)、图像相似性(SSIM)和高频误差范数(HFEN)4种指标进行评价。当 SNR 值和 SSIM 值越大以及 NRMSE 值和 HFEN 值越小时,表明图像的重构质量越好。4种指标的计算方法分别如下。

$$x_{\text{SNR}} = 10 \lg(x_{\text{var}}/x_{\text{MSE}}), \quad (22)$$

$$x_{\text{NRMSE}} = \frac{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_2}{\max(\mathbf{x}) - \min(\mathbf{x})}, \quad (23)$$

$$x_{\text{SSIM}} = \frac{(2u_x u_{\hat{x}} + c_1)(2\sigma_{\hat{x}\hat{x}} + c_2)}{(u_x^2 + u_{\hat{x}}^2 + c_1)(\sigma_x^2 + \sigma_{\hat{x}}^2 + c_2)}, \quad (24)$$

$$x_{\text{HFEN}} = \frac{\|\mathbf{f}_{\text{filter}}(\hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{f}_{\text{filter}}(\mathbf{x})\|_2}{\|\mathbf{f}_{\text{filter}}(\mathbf{x})\|_2}, \quad (25)$$

式中:  $x_{\text{MSE}}$  表示重建图像  $\hat{\mathbf{x}}$  与参考图像  $\mathbf{x}$  之间的均方误差;  $x_{\text{var}}$  表示参考图像的方差;  $u_x$  和  $u_{\hat{x}}$  分别表示  $\mathbf{x}$  与  $\hat{\mathbf{x}}$  的均值;  $\sigma_x^2$  和  $\sigma_{\hat{x}}^2$  分别表示  $\mathbf{x}$  与  $\hat{\mathbf{x}}$  的方差;  $\sigma_{\hat{x}\hat{x}}$  表示  $\mathbf{x}$  与  $\hat{\mathbf{x}}$  的协方差;  $\mathbf{f}_{\text{filter}}(\cdot)$  表示一个拉普拉斯高斯滤波器,用于捕捉图像边缘,滤波核的大小为  $15 \times 15$ , 标准差为 1.5 pixel。

### 3.2 视觉比较

本文使用泊松盘亚采样方式分别在数据集 GE\_human\_brain 和 P1\_imk\_100 上进行测试,图 1~4 为 P-LORAKS 算法、JTV-PLORAKS 算法和所提算法在两个数据集上的重构结果。其中,

图 1~2 的加速因子为 6 倍加速(即欠采样率为 16.7%),图 3~4 的加速因子为 8 倍加速(即欠采样率为 12.5%)。为了方便从视觉上进行比较,本文对不同算法的局部信息进行 2 倍放大显示。

从图 1~4 可以看到,P-LORAKS 算法重构的图像在纹理细节方面比较模糊,整个重构图像中存

在少量的伪影,且误差点较为分散;JTV-PLORAKS 算法重构的图像中伪影较少,整个图像中的误差点明显减少;所提算法重构的图像中伪影更少,更好地保留了重构图像的边缘轮廓信息,且误差图的颜色也是明显变深,表明了重构图像与参考图像的一致性较好。

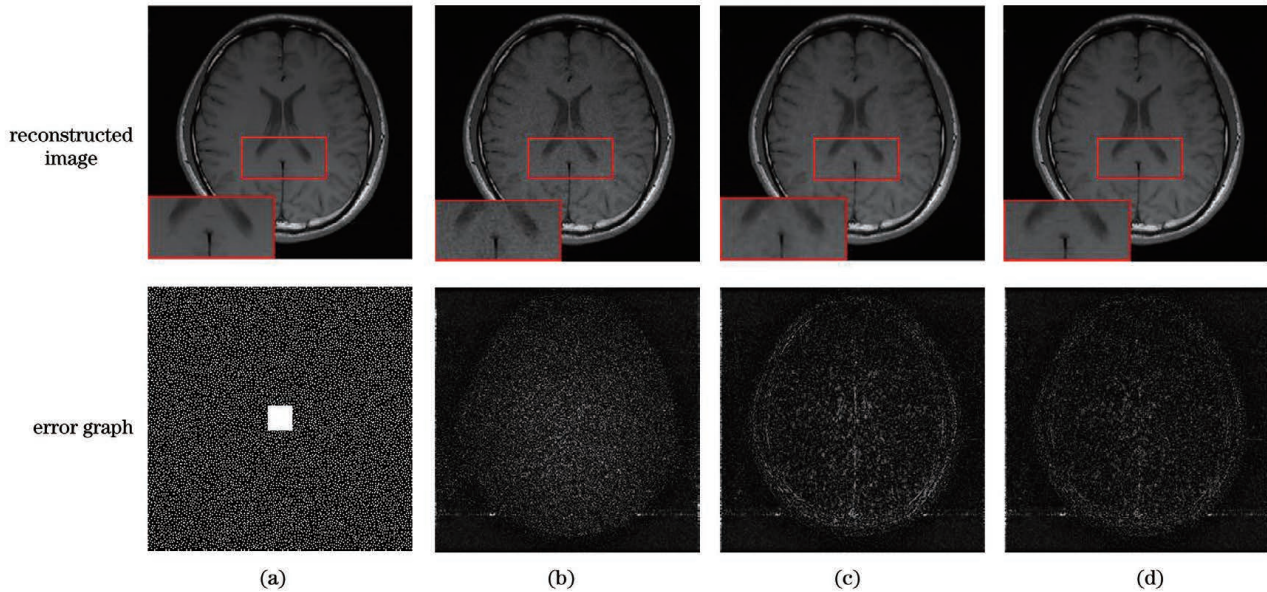


图 1 不同算法在 GE\_human\_brain 数据集上 6 倍加速下的重构图像和误差图。(a)原始图像;(b)P-LORAKS 算法;(c)JTV-PLORAKS 算法;(d)所提算法

Fig. 1 Reconstructed images and error graphs of different algorithms under 6-fold acceleration on GE\_human\_brain dataset. (a) Original images; (b) P-LORAKS algorithm; (c) JTV-PLORAKS algorithm; (d) proposed algorithm

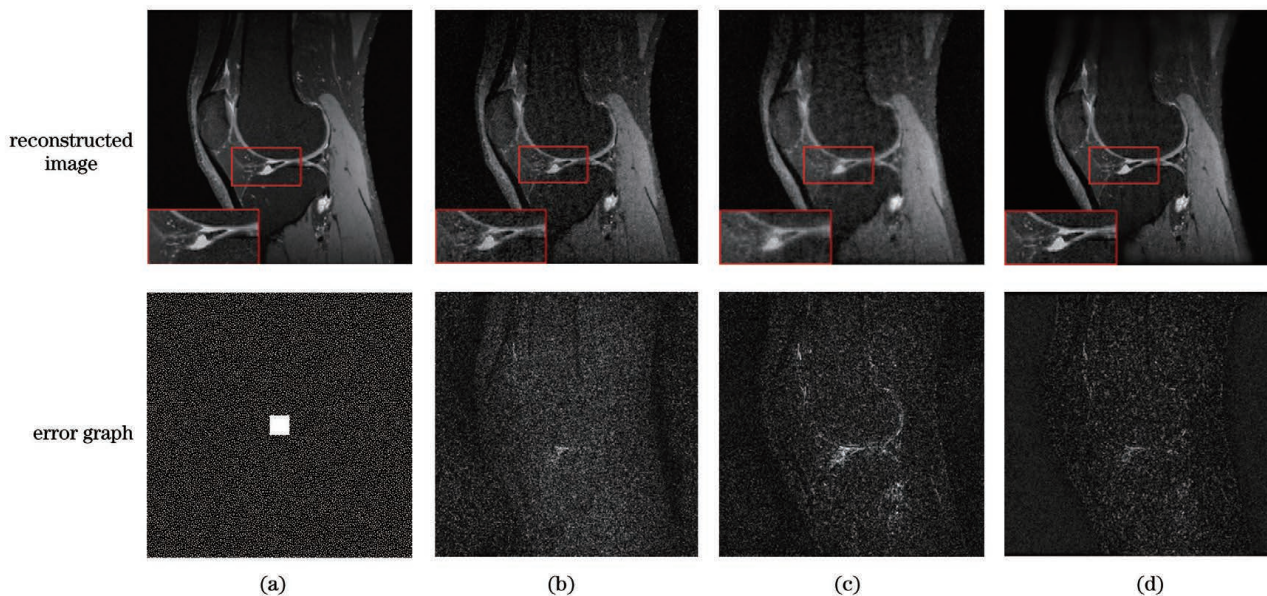


图 2 不同算法在 P1\_imk\_100 数据集上 6 倍加速下的重构图像和误差图。(a)原始图像;(b)P-LORAKS 算法;(c)JTV-PLORAKS 算法;(d)所提算法

Fig. 2 Reconstructed images and error graphs of different algorithms under 6-fold acceleration on P1\_imk\_100 dataset. (a) Original images; (b) P-LORAKS algorithm; (c) JTV-PLORAKS algorithm; (d) proposed algorithm

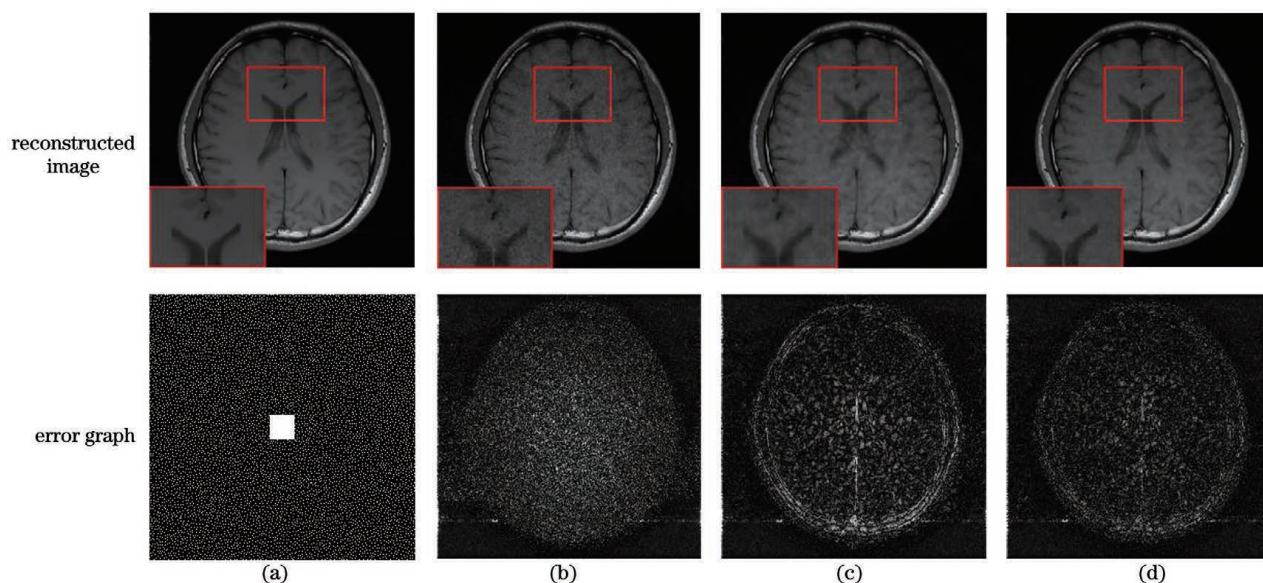


图 3 不同算法在 GE\_human\_brain 数据集上 8 倍加速下的重构图像和误差图。(a)原始图像;(b)P-LORAKS 算法;(c)JTV-PLORAKS 算法;(d)所提算法

Fig. 3 Reconstructed images and error graphs of different algorithms under 8-fold acceleration on GE\_human\_brain dataset. (a) Original images; (b) P-LORAKS algorithm; (c) JTV-PLORAKS algorithm; (d) proposed algorithm

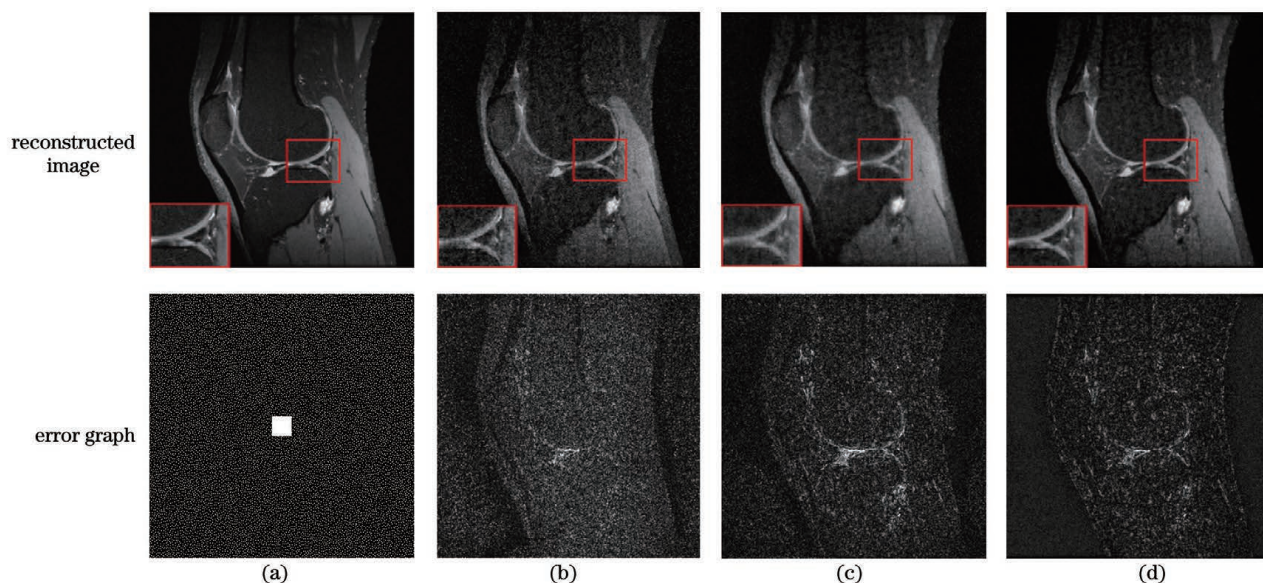


图 4 不同算法在 P1\_imk\_100 数据集上 8 倍加速下的重构图像和误差图。(a)原始图像;(b)P-LORAKS 算法;(c)JTV-PLORAKS 算法;(d)所提算法

Fig. 4 Reconstructed images and error graphs of different algorithms under 8-fold acceleration on P1\_imk\_100 dataset. (a) Original images; (b) P-LORAKS algorithm; (c) JTV-PLORAKS algorithm; (d) proposed algorithm

### 3.3 不同欠采样率下各算法的性能比较

为了更加客观地评价所提算法的重构性能,本文使用 4 种指标来定量评估加速因子  $R'$  在 3~8 倍加速的情况下,三种算法在 GE\_human\_brain 和 P1\_imk\_100 两个数据集上的重构性能,结果如表 1 和表 2 所示。

从表 1 可以看到,对于人体脑部数据集 GE\_

human\_brain, 所提算法的平均 SNR 值分别比 JTV-PLORAKS 算法和 P-LORAKS 算法提高了 0.65 dB 和 1.62 dB。从表 2 可以看到,对于人体膝盖数据集 P1\_imk\_100, 所提算法的平均 SNR 值分别比 JTV-PLORAKS 算法和 P-LORAKS 算法提高了 1.11 dB 和 2.67 dB。综上,所提算法在两个数据集上的平均 SNR 值分别比 JTV-PLORAKS 算法

表 1 三种算法在 GE\_human\_brain 数据集下的重构效果

Table 1 Reconstruction effects of three algorithms in GE\_human\_brain dataset

Algorithm	Index	$R'=3$	$R'=4$	$R'=5$	$R'=6$	$R'=7$	$R'=8$
P-LORAKS	SNR /dB	27.5100	25.7100	23.8000	21.8500	20.7700	19.3700
	NRMSE	0.0059	0.0073	0.0091	0.0114	0.0129	0.0152
	HFEN	0.0599	0.0760	0.0972	0.1262	0.1463	0.1756
	SSIM	0.9620	0.9438	0.9200	0.8838	0.8591	0.8280
JTV_PLORAKS	SNR /dB	28.4400	26.6500	25.2200	23.6700	22.3800	21.2400
	NRMSE	0.0053	0.0065	0.0077	0.0092	0.0107	0.0122
	HFEN	0.0565	0.0729	0.0925	0.1194	0.1444	0.1681
	SSIM	0.9688	0.9581	0.9486	0.9339	0.9228	0.9083
Proposed algorithm	SNR /dB	28.9000	26.9800	25.5300	24.2000	23.4900	22.3600
	NRMSE	0.0050	0.0063	0.0075	0.0087	0.0094	0.0108
	HFEN	0.0575	0.0714	0.0806	0.1070	0.1192	0.1415
	SSIM	0.9718	0.9604	0.9493	0.9393	0.9323	0.9208

表 2 三种算法在 P1\_imk\_100 数据集下的重构效果

Table 2 Reconstruction effects of three algorithms in P1\_imk\_100 dataset

Algorithms	Index	$R'=3$	$R'=4$	$R'=5$	$R'=6$	$R'=7$	$R'=8$
P-LORAKS	SNR /dB	14.0600	11.6300	10.3200	9.3200	8.5200	8.2300
	NRMSE	0.0249	0.0330	0.0384	0.0435	0.0469	0.0488
	HFEN	0.3244	0.4456	0.5177	0.5883	0.6415	0.6872
	SSIM	0.6846	0.5765	0.4981	0.4372	0.4042	0.3822
JTV_PLORAKS	SNR /dB	14.9000	12.7100	12.1800	11.0900	10.5800	9.9700
	NRMSE	0.0226	0.0291	0.0310	0.0351	0.0372	0.0400
	HFEN	0.3333	0.4572	0.4984	0.5800	0.6519	0.6885
	SSIM	0.7036	0.6051	0.5711	0.5171	0.4916	0.4669
Proposed algorithm	SNR /dB	15.5700	13.4300	12.9600	12.4300	12.1100	11.6100
	NRMSE	0.0210	0.0268	0.0283	0.0301	0.0312	0.0331
	HFEN	0.2762	0.3776	0.4374	0.4764	0.5203	0.5507
	SSIM	0.7814	0.7253	0.6681	0.6551	0.6327	0.6181

和 P-LORAKS 算法提高了 0.88 dB 和 2.15 dB。总的来说,相比于两种对比算法,所提算法有更大的 SNR 值和 SSIM 值,更小的 NRMSE 值和 HFEN 值,即 4 种评价指标都显示所提算法重构的图像质量更好。同样,在以上数值中可以明显看出,当加速因子  $R'$  值越大时,所提算法的 SNR 值与其他两种算法相比,SNR 值差距更大,优势更明显。

## 4 结 论

为了进一步改善重构图像的质量,本文结合  $L_p$  范数与全变分正则项提出一种基于交替方向乘法子的 LORAKS 并行磁共振成像重构算法,并将所提算法与其他算法分别在人体脑部和膝盖数据集上进行测试。实验结果表明,所提算法在两个数据集上的平均 SNR 值分别比 JTV-PLORAKS 算法和 P-

LORAKS 算法提高了 0.88 dB 和 2.15 dB, 说明所提算法能够在不同的应用对象上可以有效提高重构图像的质量, 特别是当加速因子越大时, 算法的重构优势越明显, 进一步促进了磁共振医学成像技术在临床上的应用。

## 参 考 文 献

- [1] Yang B, Miao P X, Shi Y C, et al. Theoretical and experimental studies on classic physical picture of two-level magnetic resonance[J]. Chinese Journal of Lasers, 2020, 47(10): 1012001.  
杨宝, 缪培贤, 史彦超, 等. 二能级磁共振经典物理图像理论和实验研究[J]. 中国激光, 2020, 47(10): 1012001.
- [2] Candes E J, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(2): 489-509.
- [3] Donoho D L. Compressed sensing[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4): 1289-1306.
- [4] Cheng D Q, Shao L R, Li Y, et al. Multi-scale block adaptive sampling rate compression sensing algorithm [J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2019, 56(3): 031005.  
程德强, 邵丽蓉, 李岩, 等. 多尺度分块的自适应采样率压缩感知算法[J]. 激光与光电子学进展, 2019, 56(3): 031005.
- [5] Lustig M, Donoho D, Pauly J M. Sparse MRI: the application of compressed sensing for rapid MR imaging[J]. Magnetic Resonance in Medicine, 2007, 58(6): 1182-1195.
- [6] Lustig M, Donoho D L, Santos J M, et al. Compressed sensing MRI[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(2): 72-82.
- [7] Yin W T, Osher S, Goldfarb D, et al. Bregman iterative algorithms for  $L_1$ -minimization with applications to compressed sensing[J]. SIAM Journal on Imaging Sciences, 2008, 1(1): 143-168.
- [8] Wang J, Zhang X Y, Cai Y F, et al. CT image segmentation method combining wavelet transform and RSF model [J]. Acta Optica Sinica, 2020, 40(21): 2110003.  
王珏, 张秀英, 蔡玉芳, 等. 联合小波变换和 RSF 模型的 CT 图像分割方法 [J]. 光学学报, 2020, 40(21): 2110003.
- [9] Wang Y L, Yang J F, Yin W T, et al. A new alternating minimization algorithm for total variation image reconstruction[J]. SIAM Journal on Imaging Sciences, 2008, 1(3): 248-272.
- [10] Ban X Z, Li Z H, Li B B, et al. Sparse image reconstruction based on improved total generalized variation [J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2018, 55(11): 111103.  
班晓征, 李志华, 李贝贝, 等. 基于改进广义全变分的稀疏图像重建算法 [J]. 激光与光电子学进展, 2018, 55(11): 111103.
- [11] Pruessmann K P. Encoding and reconstruction in parallel MRI [J]. NMR in Biomedicine, 2006, 19(3): 288-299.
- [12] Sodickson D K, Manning W J. Simultaneous acquisition of spatial harmonics (SMASH): fast imaging with radiofrequency coil arrays[J]. Magnetic Resonance in Medicine, 1997, 38(4): 591-603.
- [13] Pruessmann K P, Weiger M, Scheidegger M B, et al. SENSE: sensitivity encoding for fast MRI[J]. Magnetic Resonance in Medicine, 1999, 42(5): 952-962.
- [14] Kyriakos W E, Panych L P, Kacher D F, et al. Sensitivity profiles from an array of coils for encoding and reconstruction in parallel (SPACE RIP) [J]. Magnetic Resonance in Medicine, 2000, 44(2): 301-308.
- [15] Jakob P M, Griswold M A, Edelman R R, et al. AUTO-SMASH: a self-calibrating technique for SMASH imaging[J]. Magnetic Resonance Materials in Physics, Biology and Medicine, 1998, 7(1): 42-54.
- [16] Griswold M A, Jakob P M, Heidemann R M, et al. Generalized autocalibrating partially parallel acquisitions (GRAPPA) [J]. Magnetic Resonance in Medicine, 2002, 47(6): 1202-1210.
- [17] Lustig M, Pauly J M. SPIRiT: iterative self-consistent parallel imaging reconstruction from arbitrary k-space[J]. Magnetic Resonance in Medicine, 2010, 64(2): 457-471.
- [18] Lustig M, Alley M, Vasanawala S, et al.  $L_1$ -SPIRiT: autocalibrating parallel imaging compressed sensing [EB/OL]. [2020-12-15]. <https://people.eecs.berkeley.edu/~mlustig/l1SPIRiT.pdf>.
- [19] Mathew R S, Paul J S. Sparsity promoting adaptive regularization for compressed sensing parallel MRI [J]. IEEE Transactions on Computational Imaging, 2018, 4(1): 147-159.
- [20] Holme H C M, Rosenzweig S, Ong F, et al. ENLIVE: an efficient nonlinear method for calibrationless and robust parallel imaging[J]. Scientific Reports, 2019, 9: 3034.
- [21] Haldar J P. Low-rank modeling of local k-space neighborhoods (LORAKS) for constrained MRI[J].



- IEEE Transactions on Medical Imaging, 2014, 33 (3): 668-681.
- [22] Haldar J P. Autocalibrated LORAKS for fast constrained MRI reconstruction[C]//2015 IEEE 12th International Symposium on Biomedical Imaging (ISBI), April 16-19, 2015, Brooklyn, NY, USA. New York: IEEE Press, 2015: 910-913.
- [23] Haldar J P, Zhuo J W. P-LORAKS: low-rank modeling of local k-space neighborhoods with parallel imaging data[J]. Magnetic Resonance in Medicine, 2016, 75(4): 1499-1514.
- [24] Duan J Z, Bao Z W, Liu Y. Eigenvector-based SPIRiT parallel MR imaging reconstruction based on  $\ell_p$  pseudo-norm joint total variation [J]. Magnetic Resonance Imaging, 2019, 58: 108-115.
- [25] Mohsin Y Q, Ongie G, Jacob M. Iterative shrinkage algorithm for patch-smoothness regularized medical image recovery [J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2015, 34(12): 2417-2428.
- [26] Ying L, Sheng J. Joint image reconstruction and sensitivity estimation in SENSE (JSENSE) [J]. Magnetic Resonance in Medicine, 2007, 57 (6): 1196-1202.
- [27] Sawyer A M, Lustig M, Alley M, et al. Creation of fully sampled MR data repository for compressed sensing of the knee[EB/OL]. [2020-12-15]. <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.402.206>.