

光子计数成像算法的研究进展

陈松懋^{1,2,3,4}, 郝伟^{1,2,3,4*}, 苏秀琴^{1,2,3,4}, 张振扬^{1,2,3,4,5}, 徐伟豪^{1,2,5}¹中国科学院空间精密测量技术重点实验室, 陕西 西安 710119;²中国科学院西安光学精密机械研究所, 陕西 西安 710119;³海洋观测与探测联合实验室(西安光机所部分), 山东 青岛 266200;⁴青岛海洋科学与技术试点国家实验室, 山东 青岛 266200;⁵中国科学院大学, 北京 100049

摘要 光子计数成像技术具有灵敏度高、时间分辨率高、光子利用率高的特点,是近年来激光雷达技术领域的研究前沿。高效的图像重建算法能在硬件系统的基础上以较低的代价提升重建图像的质量或突破单纯依靠硬件技术的瓶颈,成为光子计数成像技术领域的热点问题。针对已有的光子计数成像算法,系统梳理了光子计数成像技术的原理与特点,对若干典型问题进行了深入的调研与讨论,并对该领域未来的发展趋势进行了思考与展望。

关键词 成像系统; 单光子成像; 激光雷达; 图像重建; 计算成像

中图分类号 TN29

文献标志码 A

doi: 10.3788/LOP202158.1811010

Research Progress on Photon Counting Imaging Algorithms

Chen Songmao^{1,2,3,4}, Hao Wei^{1,2,3,4*}, Su Xiuqin^{1,2,3,4}, Zhang Zhenyang^{1,2,3,4,5}, Xu Weihao^{1,2,5}¹Key Laboratory of Space Precision Measurement Technology, Chinese Academy of Sciences, Xi'an, Shaanxi 710119 China;²Xi'an Institute of Optics and Precision Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Xi'an, Shaanxi 710119 China;³Joint Laboratory for Ocean Observation and Detection (Xi'an Institute of Optics and Precision Mechanics), Qingdao, Shandong 266200, China;⁴Pilot National Laboratory for Marine Science and Technology (Qingdao), Qingdao, Shandong 266200, China;⁵University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

Abstract Recently, photon counting imaging technology has become a research frontier in the field of LiDAR technology owing to its high sensitivity, high time resolution, and high photon efficiency. Efficient image reconstruction algorithms can improve the quality of reconstructed images at lower costs based on hardware systems or break through the bottleneck of solely relying on hardware technology, which has become a trending issue in the field of photon counting imaging technology. Aiming at the existing photon counting imaging algorithm, this study systematically sorts out the principles and characteristics of photon counting imaging technology, conducts in-depth investigations and discussions on several common issues, and considers and looks forward to the future development trend of this field.

Key words imaging systems; single photon imaging; LiDAR; image restoration; computational imaging

OCIS codes 110.1758; 150.6910; 100.3020; 270.5290

收稿日期: 2021-07-04; 修回日期: 2021-08-13; 录用日期: 2021-08-16

基金项目: 中国博士后科学基金面上项目(2020M683600)、中科院战略高新技术创新基金(GQRC-19-19)

通信作者: *hwei@opt.ac.cn

1 引言

传统光学成像技术在远距离、水下、浓雾等极端条件下往往因难以克服复杂的环境因素而失效^[1], 目前, 对视线以外区域的探测成像缺乏有效的技术手段^[2], 对脆弱的生物样本或文物的探测则需尽可能地平衡探测功率与成像性能的矛盾^[3]。光子计数成像技术具有探测灵敏度高、时间分辨率高与光子利用率高的特点, 成为了解决上述问题的重要途径。光子计数成像技术通过单光子雪崩二极管 (SPAD)^[4] 实现单光子级的探测灵敏度, 同时, 基于 SPAD 探测器数字化响应特点的时间相关光子计数技术应运而生^[5]。时间相关光子计数技术并非通过单次回波判别目标信息, 而是通过对单次回波进行大量累积恢复出回波信号的离散波形, 进而获取目标的距离与反射率信息。一方面, 该技术不依赖于单次测量结果, 因此并不要求单次回波具有高信噪比, 进一步放宽了对激光器在功率方面的要求。另一方面, 离散回波的形成过程可以看作是通过大量脉冲对目标信息的采样, 这就意味着每次的微弱回波中均包含着丰富的目标信息, 使设计思想从高信噪比的鉴别转变到充分利用有限的资源, 也催生了一系列高效的图像重建算法^[6]。该思想使光子计数成像技术在高灵敏度的基础上进一步提升了光子的利用率, 也充分发挥了其高时间分辨率的特点, 使时间相关光子计数技术在复杂场景感知等应用领域^[7] 具有传统技术难以比拟的优势。

2014 年, Kirmani 等^[8] 设计了一种高效的首光子成像系统, 该系统在成像过程中仅接收每个像素的首个回波光子, 并用不同像素消耗的时间表征空

间反射率特性, 再采用总变分 (TV) 正则化的方法重建目标信息。研究表明, 图像重建算法可以在每个像素仅接收一个光子的极端条件下实现目标信息的高精度三维 (3D) 重建, 将光子计数成像技术带进了计算成像的时代。2016 年, Altmann 等^[9] 通过构建层次贝叶斯模型实现了平均像素光子数 (PPP) 小于 1 (即回波中的总光子数少于总像素数) 的高质量重建, 突破了单纯依靠物理器件成像的极限, 极大提高了光子的利用率。该研究表明, 通过合理的统计假设与图像重建算法可突破成像器件存在的物理极限, 进而掀起了探讨成像能力极限的研究热潮。随着光子成像技术应用领域的拓展, 在多个场景中单纯依靠硬件系统已难以实现对目标信息的感知。如在复杂场景的感知中, 单个像素的回波可能包含多个峰值, 此时仅依靠硬件的处理很难获取完整的场景信息^[10]。因此, 对回波数据进行深入分析与利用以实现高质量的信息获取具有重要意义。

针对已有的光子计数成像算法, 本文介绍了光子计数成像算法的物理背景与理论基础, 对相关领域中若干代表性问题的成因与进展进行了分析与研究, 并展望了光子计数成像算法未来的发展趋势与挑战。

2 光子计数成像原理与挑战

2.1 光子计数成像系统

典型的光子计数成像原理如图 1 所示, 激光器发射的高重频脉冲序列经发射光学系统与传输介质照明目标, 由接收光学系统收集从目标漫反射的回波光子并耦合到 SPAD。发射信号与接收信号的时

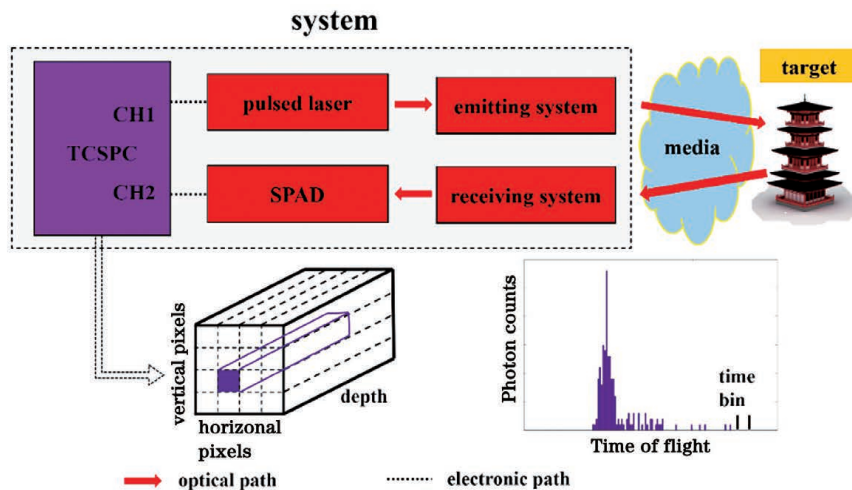


图 1 光子计数成像的原理

Fig. 1 Principle of the photon counting imaging system

独立通道(CH1 与 CH2)记录在离散的时间栅格中。根据光子计数成像技术的累积原理可知^[5],成像系统需在每个扫描点上停留一段时间以获取每个像素回波的直方图,如图 1 右下角所示。再通过振镜等扫描设备获取不同像素的直方图,进而得到目标的三维图像。

常见的光子计数成像系统大致可分为共轴光路与非共轴光路两大类,其中,共轴光路视场易于调节,但内部的后向散射较大,非共轴光路则相反^[11]。此外,随着 SPAD 阵列的发展与成熟,无扫描的成像系统逐渐得到了广泛应用,并进一步推动了成像的实时化^[12-13],集成高精度计时模块的探测器则可以省去独立的 TCSPC 器件^[14]。但未来成像系统中器件的工艺水平、可靠性等因素仍是制约成像系统性能的关键^[15]。

2.2 光子计数成像模型

从计算成像的角度来看,高效的光子计数成像算法需要分别对回波信号与目标场景进行建模分析^[16],前者需要分析回波中包含的信息,后者则可作为重建过程中有效的先验信息。大量研究表明,光子计数成像技术的回波光子数符合泊松分布^[8,16],因此,用 $y_{n,t}$ 表示第 n 个像素中 t 时刻的回波光子数,即^[9]

$$y_{n,t} \sim P[r_n \times g_0(t - t_n) + b_n], \quad (1)$$

式中, $P(\cdot)$ 为泊松分布, $g_0(\cdot)$ 为成像系统的仪器响应函数(IRF), r_n 为第 n 个像素中目标的反射率, t_n 为第 n 个像素中回波峰值的时刻, b_n 为第 n 个像素中每个计时栅格上噪声的期望值。根据(1)式可对回波中包含的目标反射率与距离进行估计,传统算法主要为逐点重建算法^[17],即假设所有像素独立同分布,再根据每个像素的信息独立求解其距离与反射率。其中的典型代表是互相关算法,该算法基于回波信号与 IRF 的互相关获取回波的时间延迟信息,进而得到目标的距离信息,也被称为匹配滤波^[18]或最大似然估计算法^[19]。但该算法一般适用于回波累积充分的情况,在极端环境下的重建效果较差。

2.3 研究意义与挑战

光子计数成像技术不仅具有超高的灵敏度与分辨率,其概率探测的特点可充分利用每个回波光子携带的信息,为远距离成像^[20-22]、透过复杂介质成像^[14,23]等光学成像领域亟待攻克的难题提供了新思路;且该技术具有功耗低、质量轻等特点,有助于系统的小型化、集成化^[24],进而在国防安全、自动驾驶等领域发挥重要作用。此外,该技术还逐渐与其

他技术衍生出了单像素成像、非视域成像等多种新型成像技术^[25],具有重要的学术价值。图 2 为不同情况下的回波示意图与重建结果,可以发现,虽然光子计数成像技术已经取得了长足的发展,但仍然面临着许多技术挑战,主要包括以下 7 个方面。

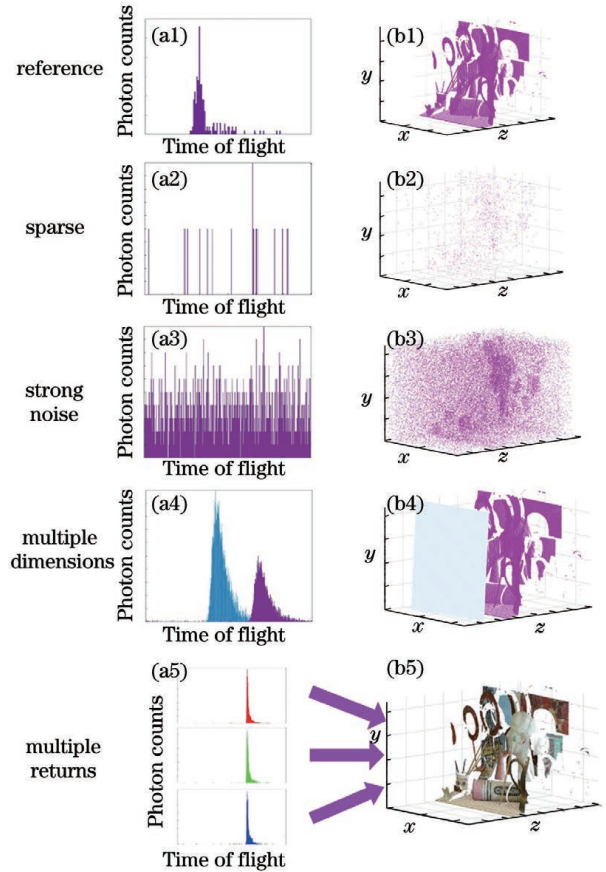


图 2 不同情况下的回波示意图与重建结果。(a)单像素回波示意图;(b)重建结果

Fig. 2 Schematic diagram of echo and reconstruction results under different conditions. (a) Schematic diagram of single-pixel echo; (b) reconstruction result

1) 从稀疏回波情况下的重建结果可以发现,在成像过程中累积时间过短或环境对激光的衰减过强时,探测器仅能响应非常有限的回波信号。此时,成像算法必须能够处理回波信号极为稀疏的状况,该情况可认为是对理想波形的不充分采样,极端情况下某些像素的回波光子数可能为 0,导致 PPP 小于 1。此时,逐点重建算法会失效,因此,必须开发光子利用率极高的重建算法。

2) 从强噪声情况下的重建结果可以发现,由于光子计数成像技术的回波能量仅为单光子量级,环境的背景光、后向散射光子及电子器件的暗计数(热电流)等因素均会对成像结果造成严重干扰。为了

重建出高质量的目标信息,重建算法必须能大幅度抑制噪声。

3) 从多维信号的重建结果可以发现,随着器件的集成化与成像系统的发展,光子计数成像系统往往在获取目标三维信息的同时还可以获取目标的光谱、偏振等信息。一方面,多维信号虽然包含着更丰富的信息,但如何对多维信号中的信息进行有效感知与利用也成为了关键问题。另一方面,大容量的信息对信号处理算法的实时性也提出了新的挑战。

4) 在复杂场景的感知中,由于光斑尺寸较大或目标被半透明物体遮挡(如毛玻璃)时,回波中可能包含多个物体表面的信息,从而出现多峰信号。传统重建算法一般默认每个像素的回波中仅有一个峰值,重建时必然会导致部分信息的丢失,因此,重建算法还须应对多峰信号的挑战。

5) 大阵列单光子探测器的研制比较困难,而扫描式成像系统又必须平衡成像速率与质量,导致目前光子计数成像技术的成像分辨率普遍较低。为获取高精度的目标信息,如何在不明显增加硬件成本的前提下大幅增加系统的分辨率也成为了研究重建算法的一个主要问题。

6) 光子计数成像技术超高的灵敏度使对视线之外的成像成为了可能,如非视域(NLOS)成像技术,其原理如图 3 所示。该技术一般采用脉冲激光器逐点照射中介面,利用漫反射照亮待重建目标,并通过探测器获取三次漫反射后的回波数据。此时,仅依靠硬件系统无法解译出目标的信息。因此,重建算法也需要对三次漫反射的回波数据进行精确

建模,以恢复出原有的高精度信息。

7) 成像的质量与速率一般相互矛盾,更好的重建质量往往意味着更大的计算量。但对于运动目标成像等应用的需求,光子计数成像算法必须在非常有限的时间内高质量地重建出目标信息,从而对算法在结构设计及对计算资源的利用能力方面提出了更高的要求。

由 2.2 节的分析可知,仅靠(1)式对回波信息进行建模难以应对以上 7 个方面的技术挑战,因此,近年来人们将研究的重点转向了对目标场景中先验信息的建模分析与利用。

3 典型问题的研究进展

3.1 稀疏回波重建

关于光子计数成像技术回波的稀疏性研究起步较早,2013 年,He 等^[26]针对稀疏回波造成的距离随机游走问题提出了一种先验模型。2014 年,Kirman 等^[8]设计的首光子成像系统表明,回波的稀疏问题可通过引入像素间的局部相关性来解决。2015 年,Shin 等^[19]基于该思想提出了一种稀疏正则化重建算法,为稀疏重建算法后续的发展提供了理论指导,并进一步提出了基于联合子空间模型的重建算法^[27]。2016 年,Altmann 等^[9]将贝叶斯估计方法引入图像重建中,将像素间的相关性建模为先验信息,并结合似然函数等统计理论提出了基于层级贝叶斯模型重建的框架,最终实现了 PPP 小于 1 的重建。2016 年,Halimi 等^[17]基于近似似然函数与 TV 正则项构建了目标函数,该函数可通过交替方向乘法(ADMM)求解,具有良好的重建性能;且将离散余弦变换作为正则项也能获得较好的重建性能。2018 年,Lindell 等^[18]采用 SPAD 与普通高分辨率相机结合的数据获取方法,提出了一种基于卷积神经网络(CNN)的图像重建算法,该算法的重建性能更佳。但由于普通相机难以达到 SPAD 的灵敏度,因此,该算法难以应用于远距离、复杂介质成像等情况下的重建。2019 年,Chen 等^[28]提出了一种 OPN3DR (Optimized based nonlocal 3D restoration)算法,其原理如图 4 所示。首先,通过多尺度三维低通滤波获取图像的先验信息,再通过 Laplacian 矩阵引入像素间的非局部空间关系;然后,迭代更新非局部空间关系与重建结果,以提升重建质量。同时,该算法还提出了一种压缩计算量的非均匀采样方法,不仅能应对 PPP 小于 1 等极端情况,运行速度也达到了近实时级^[28]。图 5 为 OPN3DR

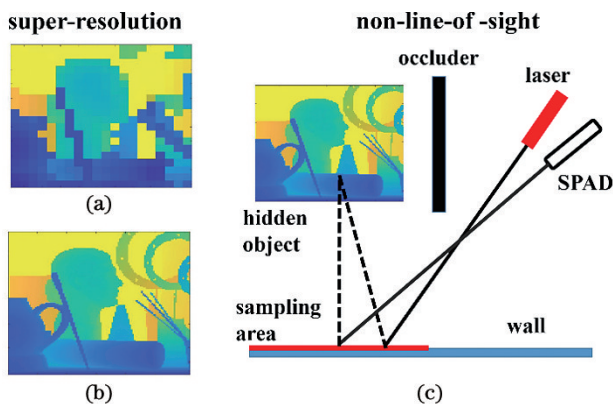
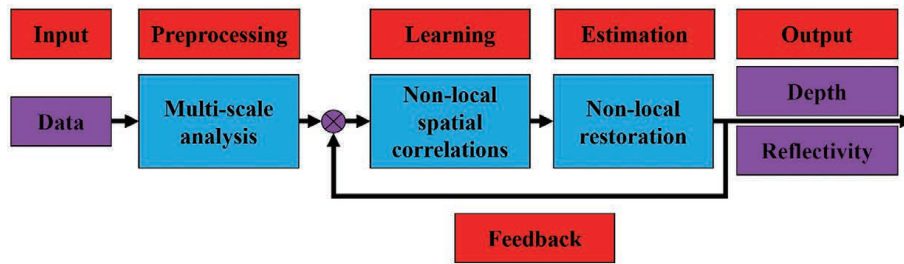
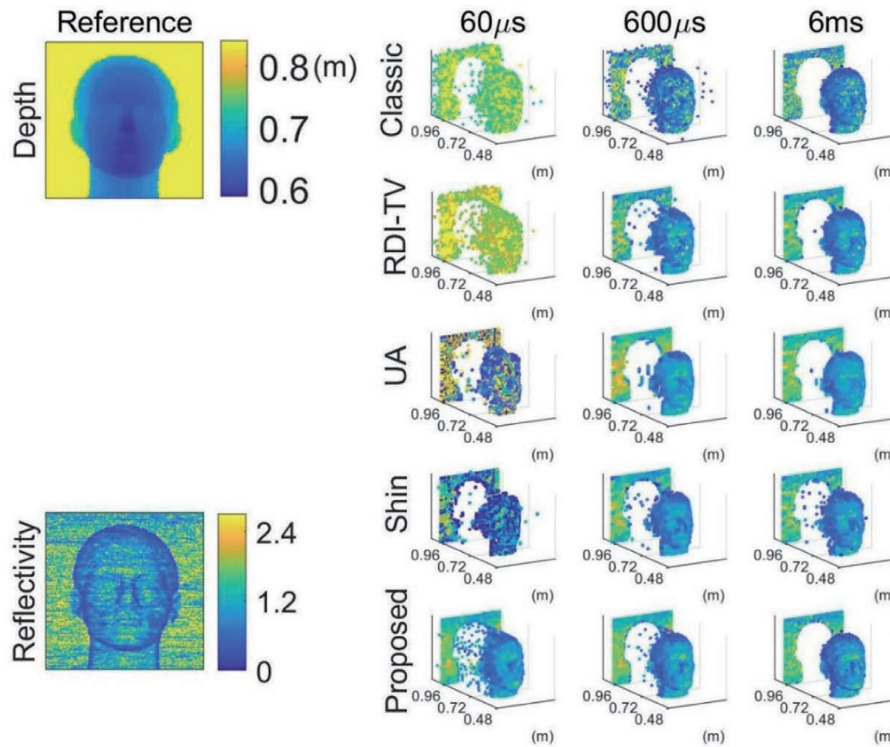


图 3 超分辨成像与 NLOS 成像的原理。(a)低分辨率图像;(b)超分辨结果;(c)NLOS 成像的原理

Fig. 3 Principles of super-resolution imaging and NLOS imaging. (a) Low-resolution image; (b) super-resolution result; (c) principle of the NLOS imaging

图 4 OPN3DR 算法的原理图^[28]Fig. 4 Schematic diagram of the OPN3DR algorithm^[28]图 5 不同算法在不同累积时间下的重建结果^[28]Fig. 5 Reconstruction results of different algorithms under different dwelling times^[28]

算法与其他算法在单像素累积时间分别为 $60 \mu\text{s}$ 、 $600 \mu\text{s}$ 与 6ms 时对实测数据的处理结果,其中, Classic 表示互相关算法, Proposed 表示 OPN3DR 算法, RDI-TV (Restoration of depth and intensity-total variation)、解混合算法 (UA)^[29] 与 Shin 算法分别为文献[17]、文献[29]、文献[19]提出的算法。

作为最早开始研究的问题之一,对于稀疏回波的重建问题已逐渐形成了比较统一的思路,即将重建图像看作马尔科夫随机场,将各像素间的空间联系作为先验信息实现高质量的目标重建。该思路通过充分的空间采样弥补成像过程中对于时间采样的不足^[6],也为解决其他典型问题提供了理论指导与借鉴。对于成像能力的极限仍在不断探索,如 Cao 等^[30]将光子计数成像与单像素成像结合,基于空间采样点与回波分布间的关系实现了零光子成像,再

次刷新了稀疏重建的记录。

3.2 强噪声干扰重建

噪声干扰是制约高质量成像的关键因素之一,因此,人们研究了多种噪声抑制方法。如 2017 年, Pawlikowska 等^[31]提出了高速电子门控的抑噪方法;2020 年, Li 等^[21]提出了基于偏振选通的抑噪方法;2011 年, Kong 等^[32]针对随机噪声提出了双探测器抑噪方法。上述方法是硬件级抑噪的典型代表,但其在强噪声干扰下仍不能实现理想的重建效果。为了在信号级对噪声进行抑制,2021 年,汪书潮等^[33]提出了一种弹性变分模态提取算法,通过对单像素回波信号进行时频分解实现噪声的滤除。除了对单像素的回波信号进行处理,人们还研究了图像级的抑噪方法。如 2017 年, Rapp 等^[29]提出了经典的 UA,该算法基于噪声分布的随机性与信号在

回波时刻分布上的一致性,先对回波在空间域上进行降采样求和,大幅增加了降采样后的信噪比,然后采用 TV 正则化方法对降采样后的图像进行平滑,以提升重建效果,该算法也被认为是基于统计模型去噪的代表性算法。2017 年, Halimi 等^[34]采用层次贝叶斯方法对强衰减、强噪声水下环境中获取的信号进行了高精度重建,实现了 9.2 个衰减长度(传输能量每降低 e 倍为一个衰减长度,其中, e 为自然对数)下的成像;并针对烟雾环境下的成像提出了一种基于非局部分析的重建算法,实现了信号背景比(SBR)小于 1 情况下的重建^[23]。2019 年, Tachella 等^[12]采用经典的点云去噪方法实现了实时级抑噪重建。2020 年, Peng 等^[35]针对首光子成像系统设计了基于小波域的 1-范数正则化与 TV 正则化的混合正则化方法,该方法平衡了去噪效果与图像细节的保持,重建效果优于单正则项方

法。此外, Peng 等^[36]设计了非局部神经网络,通过特征提取与非局部网络获取回波的时空联系重建目标信息,其原理图如图 6 所示。针对 21 km 外的实测数据,该算法在 PPP 为 1, SBR 为 0.1 的极限条件下实现了高质量重建,且耗时仅为 0.55 s,重建结果如图 7 所示。其中, 1~3 行的目标距离分别约为 1, 4, 21 km; GT, LM Filter、Shin、Rapp、Lindell、Ours 分别为参考图像、互相关算法、文献[19]、文献[29]、文献[18]中的算法以及基于非局部神经网络的重建结果, RMSE 为距离信息的均方根误差。受首光子成像与 UA 的启发, 2021 年, Hua 等^[37]设计了首序列成像方法,该方法对噪声较高的像素累积时间较长,直至可以在回波中分辨出信号簇再扫描下一个像素,并通过中值滤波与 TV 正则化对逐点重建的结果进行处理,以进一步提升成像质量。

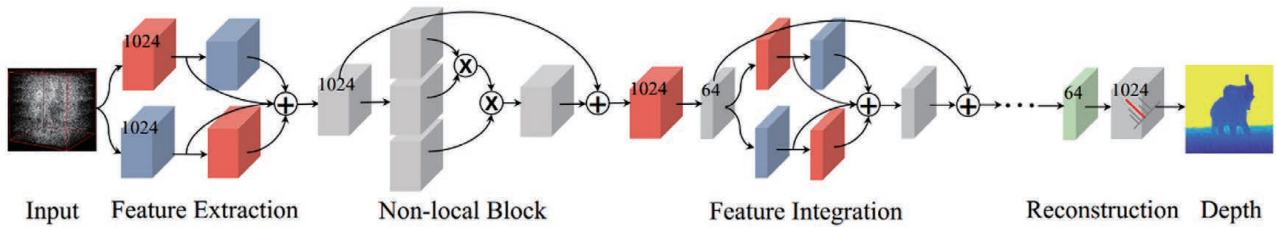


图 6 非局部神经网络重建算法的原理^[36]

Fig. 6 Principle of the non-local neural network reconstruction algorithm^[36]

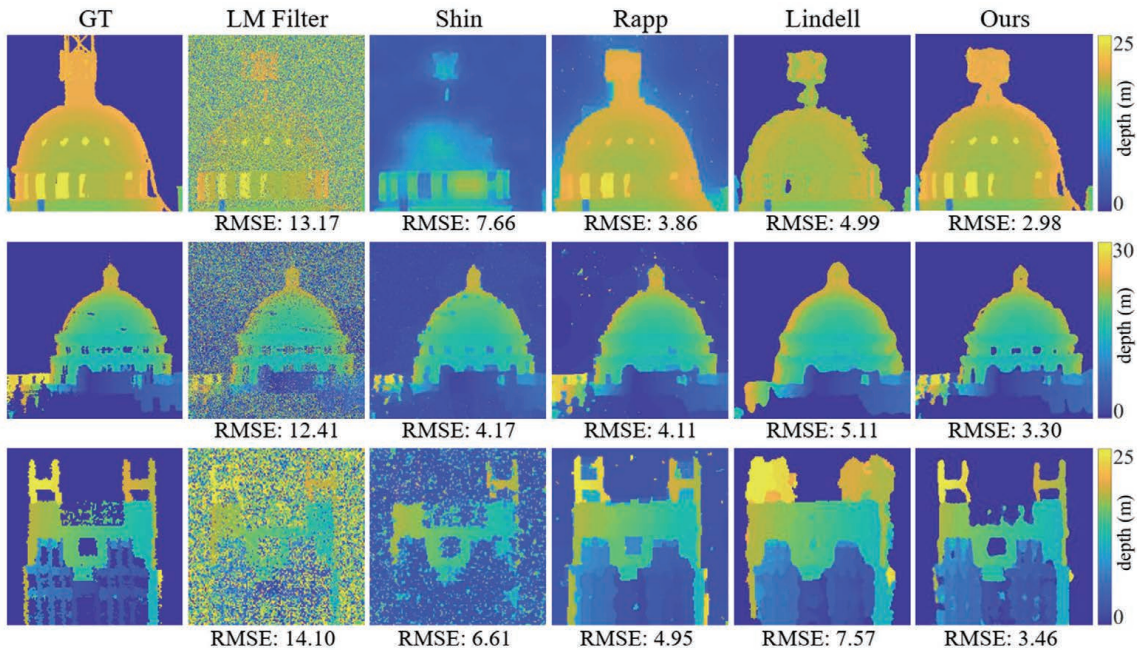


图 7 不同算法对远距离目标的重建结果^[36]

Fig. 7 Reconstruction results of different algorithms on long-distance targets^[36]

噪声抑制始终是光子计数成像算法的核心问题之一,对于硬件系统难以完全滤除的噪声,高效且抗

噪的重建算法是高质量重建的重要保障。除了硬件系统的设计优化与新型物理降噪原理,抑噪算法可

大致分为信号级(单像素回波)抑噪与图像级(三维回波)抑噪。其中,信号级抑噪算法一般有相对明确的物理背景与意义,但包含的信息较少,抑噪能力有限;而图像级抑噪算法可分析利用三维的回波信息,功能更强大,计算量也较大。随着光子计数成像技术应用的扩展,抑噪算法逐渐与其他方法结合,在多峰信号处理、多维信号处理等领域发挥着重要作用。

3.3 多维信号的处理与应用

由于(1)式仅能描述三维回波信号,因此,对多维信号进行处理时要先对多维回波信号建立合理的模型。2015年,Altmann等^[38]基于多光谱光子计数成像系统提出了一种新的信号观测模型,可表示为

$$y_{n,l,t} \sim P[\lambda_{n,l} g_l(t - t_n) + b_l], \quad (2)$$

式中, $n \in [1, \dots, N]$, $l \in [1, \dots, L]$, $t \in [1, \dots, T]$, N, L, T 分别为像素总数、谱段总数与计时栅格总数。2016年,Altmann等^[39-40]基于该模型实现了光谱解混合,并基于马尔科夫随机场理论与层次贝叶斯模型将图像的空间联系纳入重建过程,再通过马尔科夫链蒙特卡罗算法的优化求解分别实现了目标的高质量三维重建^[39]与分类识别^[40],分类结果如图8所示。2016年,Chhabra等^[41]将回波的三维数据与光谱数据作为联合特征,通过构建稀疏字典与半监督学习方法对水下目标进行识别,识别率可达98.7%。为简化多光谱光子计数成像系统并提升其效率,2018年,Ren等^[42]设计了波长-时间编码的多

光谱成像系统,基于不同波长在光纤中传播速度的微小差异将光谱信息记录在时间维度,从而将多维信息转化成了复杂的三维回波信息,再通过贝叶斯估计与TV正则化方法重建得到高质量的目标信息。2020年,Legros等^[43]将各谱段响应幅值的估计转化为对隐变量的估计,从而采用期望最大化算法进行高效求解重建,最终实现了PPP为1.1,SBR约为1.4极限条件下的重建。2019年,Tachella等^[44]采用随机几何中的泊松点过程与高斯马尔科夫随机场分别描述图像的空间联系及谱间联系,在复杂场景下实现了高质量的重建。2020年,Chen等^[45]对各谱段回波进行最大似然估计并求和,增强了距离信息的信噪比,再通过OPN3DR算法分析图像的空间联系,在稀疏且含噪的条件下实现了多谱段的三维重建。2021年,Halimi等^[46]通过分析光子计数成像系统回波的多层级信息增强了信息获取的鲁棒性,将其与光子计数成像领域中其他经典算法进行融合消除异常值,实现了强噪声干扰下的多谱段光子计数三维重建,处理结果如图9所示。其中,Reference PC为参考图像,Xcorr为互相关算法,Musapop为文献^[44]中的算法,Proposed为基于多层级分析与融合的重建结果。2021年,Tian等^[47]在光子计数成像技术的基础上引入了偏振信息,并通过非局部块匹配方法构建了高信噪比的图像块作为先验,进而通过构建代价函数求解实现了比传统光子计数成像更好的成像效果。

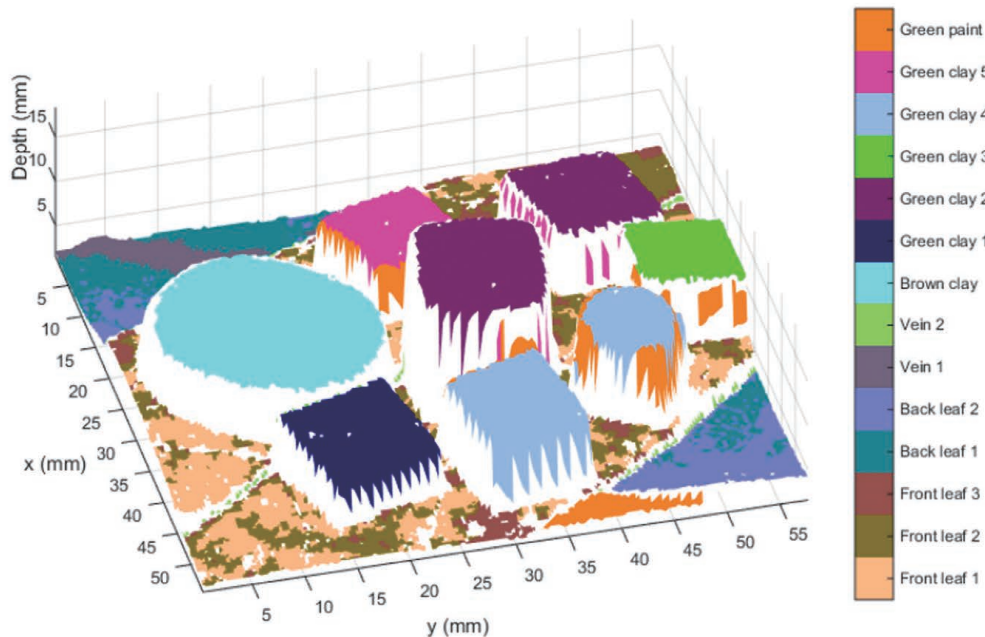


图 8 基于多光谱光子计数成像的目标分类结果^[40]

Fig. 8 Target classification results based on multispectral photon counting imaging^[40]

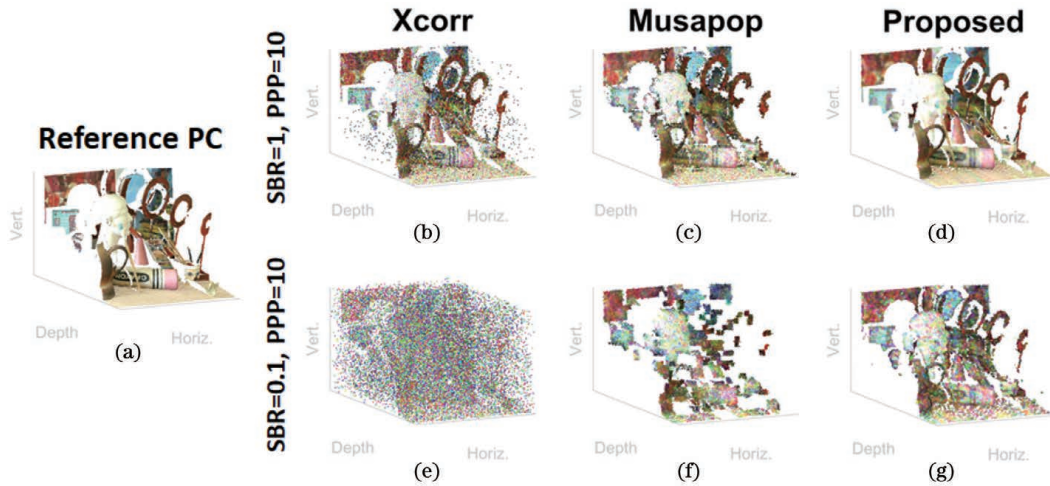


图 9 不同情况下多光谱光子计数的三维重建结果。(a)参考图像;(b)~(d)SBR 为 1,PPP 为 10;(e)~(g)SBR 为 0.1, PPP 为 10^[46]

Fig. 9 Three-dimensional reconstruction results of multispectral photon counting under different conditions. (a) Reference image; (b)–(d) SBR is 1, PPP is 10; (e)–(g) SBR is 0.1, PPP is 10^[46]

综上所述,多维信号处理与应用的研究可大致归纳为三个方向:1)通过其他维度的信息进一步增强三维成像的性能;2)充分利用回波信息以实现多维信息的高质量重建,增强信息的感知能力;3)在三维成像的同时利用其他维度中物理量的特性实现目标识别等功能。此外,多维信号的处理呈现出与光谱成像、偏振成像等学科交叉的趋势,未来还可能与微波雷达等多个模态的数据进行融合,以实现更佳的成像性能^[1]。

3.4 多峰信号处理

2014 年, Yin 等^[48] 针对一个激光光斑包含多个距离信息的情况提出了一种自适应的模拟退火马尔科夫链蒙特卡罗分析方法。2016 年, Shin 等^[49] 将多峰信号重建问题转化为一个稀疏解卷积问题,并通过凸优化方法进行求解。由于(1)式不能准确描述包含多峰信号的回波(下文简称为多层回波),2017 年, Tobin 等^[10] 提出了一种新的模型,可表示为

$$y_{n,t} \sim P \left\{ \sum_{m=1}^{M_n} [r_{n,m} g_0(t - k_{n,m} T)] + b_n \right\}, \quad (3)$$

式中, M_n 为回波中的峰值总数, T 为系统的时间分辨率, $k_{n,m}$ 为第 m 个峰值的回波时刻。该模型一方面通过 TV 正则化方法对每层回波中的信息进行增强;另一方面,提出了回波层数的稀疏性假设,并通过 ADMM 算法实现了 230 m 外用尼龙网伪装目标的成像。2019 年, Halimi 等^[50] 进一步采用图像的非局部空间关系对各层回波信号进行重建以提升成像效果,并将其应用于复杂环境下多光谱成像等多维多峰信号的处理中。2019 年, Tachella 等^[7] 采用空间点过程与像素间的马尔科夫性对各层回波中的空间结构进行建模,并提出了 ManiPoP 算法。该算法采用逆变可跳跃马尔科夫链蒙特卡罗方法估计贝叶斯后验分布,同时根据由粗到细的方法大幅加速了重建过程,对实测数据的重建结果如图 10 所示。其中, ManiPoP、SPISTA 与 L21+TV 分别为文

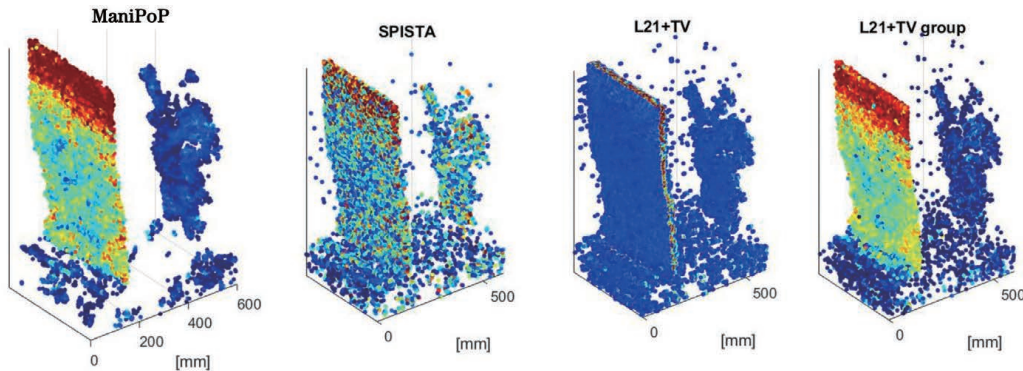


图 10 尼龙网与隐藏目标的重建结果^[7]

Fig. 10 Restoration results of nylon net and the hiding target^[7]

献[7]、文献[49]、文献[10]中的算法; L21 + TV group 为在文献[10]的基础上采用文献[49]中聚集策略得到的结果。可以发现,该算法能有效获取尼龙网与隐藏在其后的目标信息。2020 年, Aßmann 等^[51]基于 CNN 在低信噪比下实现了多峰信号的峰值识别,准确率可达 99%,单像素回波的处理时间仅为 3.4 ms,展现出了强大的识别能力。Tan 等^[52]针对远距离成像中大视场导致的多重回波问

题提出了基于 CNN 的重建算法,将多重回波问题转化为图像去模糊问题,并成功获取了 21.6 km 外目标的空间细节与多峰信号的信息,成像结果如图 11 所示。其中,1~3 行的目标距离分别为 21.6, 1.2, 3.8 km; GT、Shin、Rapp、Lindell、Tachella、Li、Ours 列分别为参考图像、文献[19]、文献[29]、文献[18]、文献[7]、文献[21]中的算法以及基于 CNN 算法的重建结果。

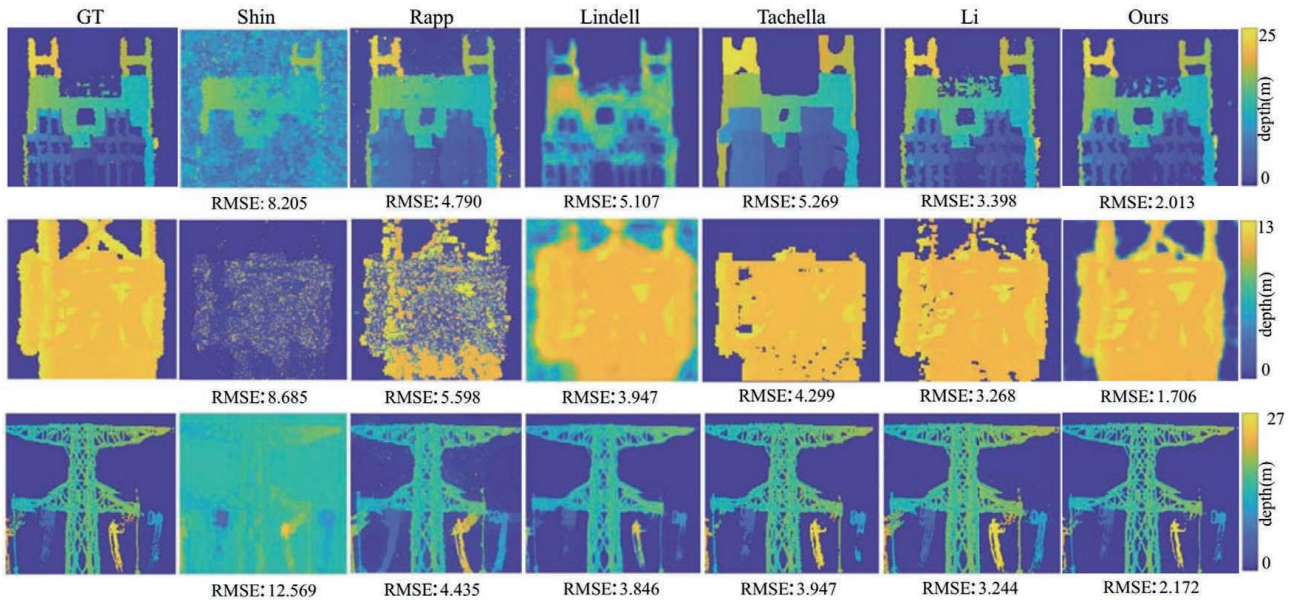


图 11 不同算法对多峰信号的远距离目标重建结果^[52]

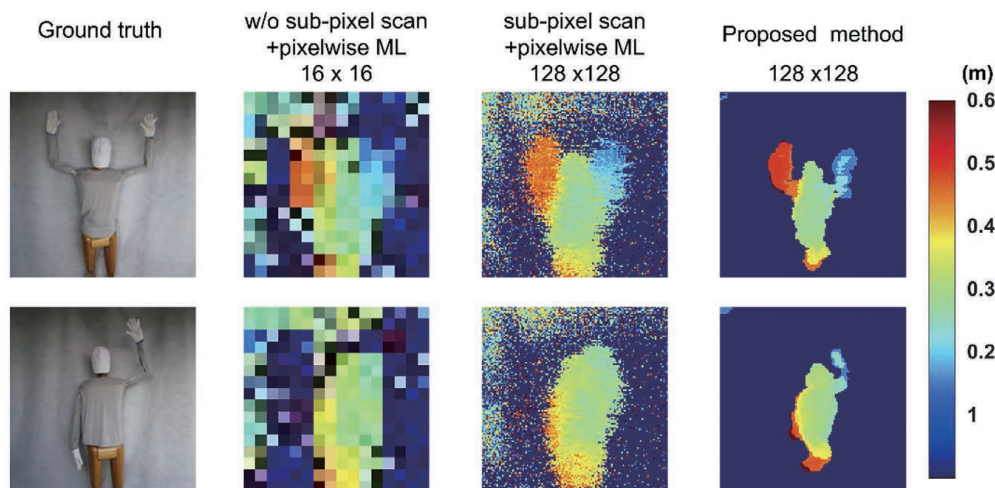
Fig. 11 Reconstruction results of long-distance targets for multi-peak signals by different algorithms^[52]

多峰信号的处理对于光子计数成像技术的实用化有着非常重要的意义,处理思路可以分为三类: 1) 基于三维回波数据的处理,通过稀疏性假设与空间联系重建目标信息; 2) 采用点云处理方法重建目标; 3) 基于深度学习的方法对多峰信号进行识别与利用。目前思路 1) 与思路 2) 虽然已经实现了多峰信息的重建,且具有良好的理论基础与扩展性,但处理速度一般需要几秒至几分钟不等,主要作为图像的后处理手段。而基于深度学习的方法功能更强大,且能进行快速重建,有望在未来发挥重要的作用。

3.5 超分辨成像

受探测器阵列尺寸与系统成像速率等因素的限制,光子计数成像仅依靠提升硬件水平很难实现高分辨率成像。针对图像空间分辨率较低的问题,2020 年, Sun 等^[53]将衍射光学模型与深度神经网络进行联合设计,实现了超薄光学衍射元件以及对光子计数图像的编码超分辨重建。Li 等^[54]设计了基于亚像素扫描的超分辨重建算法,该算法通过小于视场宽度的步长移动实现亚像素扫描,再通过对亚

像素扫描过程的建模与三维解卷积算法实现超分辨重建,成像结果如图 12 所示。其中,目标与系统的距离约为 8.2 km,无超分辨图像的分辨率为 16×16 ,超分辨后的图像分辨率为 128×128 。受制于工艺、散热等因素,SPAD 阵列的填充因子一般较低,从而限制了成像的空间分辨率,2021 年, Xue 等^[55]通过衍射光学元件与亚像素扫描的方法将空间分辨率由 3 mm 提升至 0.33 mm。2020 年, Gyongy 等^[56]采用高分辨率强度图像与低分辨率距离图像融合的方式产生高分辨率的距离图像,其中,距离图像通过降采样至低分辨率以保证信噪比,强度图像则保持较高的分辨率以获取空间信息,最终通过对距离图像的插值与强度图像的信息引导实现能保持图像细节的快速超分辨重建。2021 年, Ruget 等^[57]提出了一种 HistNet 算法,该算法采用 U 型网络提取距离图像在不同尺度下的特征,从而在超分辨的基础上进一步增强了稀疏与噪声条件下的重建性能,同时还具备对多峰信号的处理能力。除了对空间信息的超分辨,2020 年, Rapp 等^[58]还针

图 12 8.2 km 外目标的超分辨成像结果^[54]Fig. 12 Super-resolution results of target located at 8.2 km^[54]

对探测器集成化造成的时间分辨率降低问题提出了时间(距离)超分辨算法,采用高频振动的思想估计高分辨率的时间信息,即在光子计数成像过程中加入少量已知可控的噪声,再根据加入的已知噪声对原始信息进行恢复。此外,还提出了一种指数修正高斯分布模型,以精确描述系统响应波形的时间分布。实验结果表明,该算法重建的距离图像比未使用该算法重建图像的均方根误差降低了 13 倍。2021 年,Ren 等^[59]基于两个光频梳与光子计数成像系统实现了 $2 \mu\text{m}$ 的测距精度,其功率为 2.8 pW ,但成像距离仅为 15.6 m ,累积时间则长达 1000 s 。

超分辨成像是近年来光子计数成像领域兴起的一个重要研究方向,主要研究思路包含三种:1)与硬件系统深度结合以充分获取目标信息;2)通过对三维回波的深度发掘利用实现超分辨成像;3)通过人为加入部分信息实现对原有信息的增强。目前对超分辨单光子成像的研究较少,但已展示出了巨大的技术潜力,未来可能成为突破硬件性能限制的关键方向之一。

3.6 非视域成像

2012 年,Velten 等^[2]利用滤波反投影首次实现了非视域实验重建,即利用中介面上的照射点与接收点作为重建椭球的两个焦点,以光子飞行距离为重建椭球的长轴,不同的照射点-接收点构成了多个椭球约束,重建目标位于椭球相交的区域。该算法能处理不同的扫描模式,但计算复杂度过高,重建精度较低,不易处理复杂目标的重建。针对这些问题,目前已有相关的改进方案^[60-61]。2018 年,O'Toole 等^[62]提出的光锥变换算法将扫描模式改为共焦系统,简化了光路,将非视域前向过程描述为一个卷积

过程,从而将非视域问题转化为一个逆问题,给出了闭环解并降低了计算复杂度。但该算法对于目标物体反射特性做出了一定假设,其适用性有所下降。2019 年,Xin 等^[63]基于费马原理提出了一种重建算法,该算法不依赖于测量数据的强度信息,而是利用测量数据在不连续处的特征点进行重建,理论上适用于不同反射特性的物体。上述算法更多基于光传输过程中的几何特性,基于虚拟波的算法在近年来也获得了快速发展。2019 年,Lindell 等^[64]利用地震学的频率波数($f-k$)域算法解决 NLOS 问题,将非视域重建问题描述为一个求解边界值的问题。该算法基于快速傅里叶变换与频率域上的施托尔特插值实现,计算复杂度与 LCT 相当,可应用于大场景的重建,其重建结果如图 13 所示,其中, $x-t$ 表示回波-时刻,FBP、LCT 与 $f-k$ Mig. 分别表示文献[2]、文献[62]、文献[64]的重建结果。Liu 等^[65]提出虚拟波的概念,将测量数据卷积成一个带相位的小波,获得对应的虚拟相位信息,并引入光学的瑞利-索默菲尔德衍射积分,实现了大范围场景的重建。相比基于几何特性的算法,虚拟波类算法对于目标及中介面反射特性的鲁棒性更强,且更容易与声学、光学等相近领域的算法相结合。目前,非视域虚拟波类算法的相关理论与应用得到了快速发展^[66-67],非视域算法也呈现出与多学科领域算法交叉融合的趋势。2021 年,Wu 等^[68-69]将统计学理论应用于非视域成像,实现了非视域的压缩感知与 1.43 km 的远距离成像。2019 年,Ahn 等^[70]引入椭球投影的伴随算子对重建过程进行了优化,使不同扫描模式获得的反投影结果都能通过卷积操作实现。

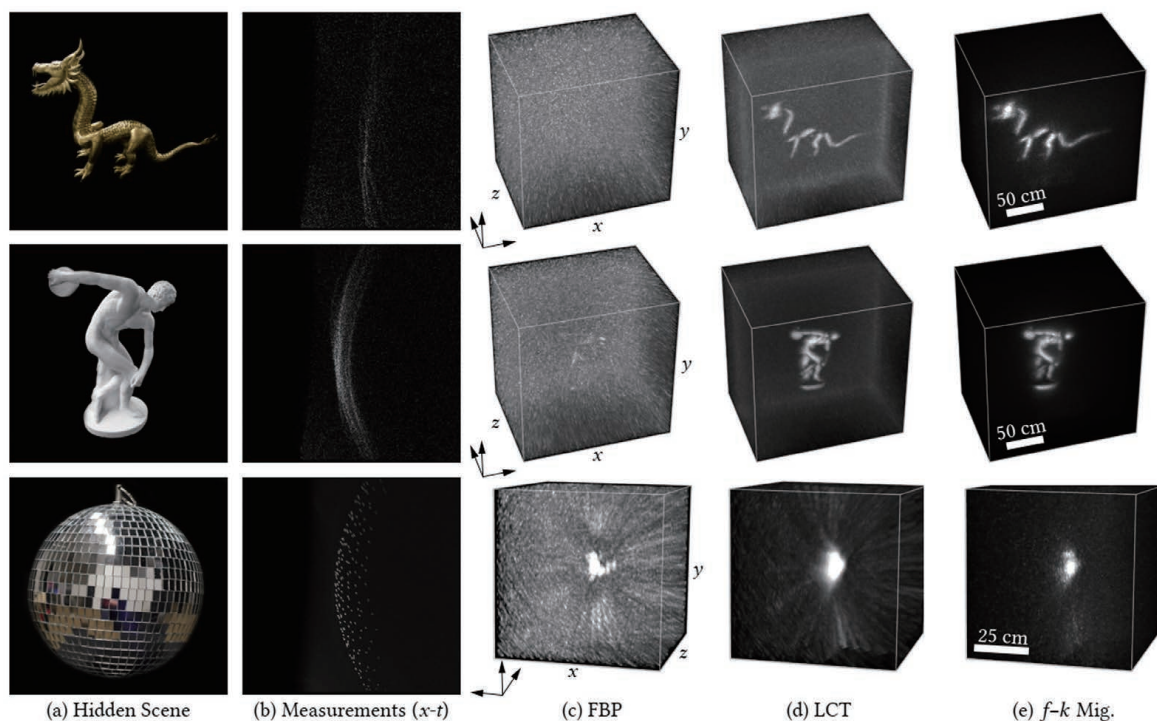


图 13 不同算法的 NLOS 成像结果。(a)实物图;(b)回波-时刻分布图;(c)FBP 算法;(d)LCT 算法;(e) $f-k$ 算法^[64]

Fig. 13 NLOS imaging results of different algorithms. (a) Physical map; (b) echo-time distribution diagram; (c) FBP algorithm; (d) LCT algorithm; (e) $f-k$ algorithm^[64]

非视域成像是光子计数成像技术衍生的新技术,在多个领域具有重要的应用潜力。目前,非视域成像算法的思路可分为四大类:1)基于反投影并辅以滤波等处理手段的重建;2)对成像过程建模,并通过优化手段求解逆问题实现重建;3)基于虚拟波的重建;4)利用目标几何特性的重建。其中,思路 1)易于理解,但计算复杂度较高且重建精度较低;思路 2)的难点在于对非视域前向过程卷积核的建模;思路 3)可以结合声学、光学等相近领域的算法,受反射特性的影响较小,应用前景广阔;思路 4)利用目标的表面及法向量等信息重建,能提供更丰富的细节信息。目前,非视域重建算法面临着信噪比低、计算复杂度高、数据获取时间过长、成像分辨率依赖于器件精度等诸多问题的挑战,作为计算成像技术的典型代表,非视域重建算法未来将在非视域成像技术中扮演更重要的角色。

3.7 实时成像

受探测器阵列尺寸、计数率等方面的限制,成像速率成为光子计数成像技术的瓶颈之一。2006 年,Cho 等^[71]采用高性能的刀片服务器并行重建算法加速重建过程,并实现了 4 Hz 的成像速率。随着算法设计的发展,成像算法的计算成本逐渐降低。2019 年,Tachella 等^[12]基于计算机图形学中的点云

处理算法及其在 GPU 模块上的并行化实现了对 320 m 外目标 50 Hz 的光子计数成像,该算法的实时性较强,且能处理多峰信号。将该算法进一步扩展至实时多光谱成像,仅用 65 ms 就能重建出包含 4 个谱段的多光谱图像^[72]。2020 年,Alßmann 等^[73]通过设计压缩感知矩阵的伪逆矩阵大幅降低了光子计数成像过程的计算量,基于 FPGA 系统实现了 1 kHz 的成像速率,在不明显降低重建质量的前提下,其功耗可降低约 90%。2020 年,Legros 等^[74]研究了回波的帧间关系,通过每帧的回波信息实时对动态场景进行感知与重建,不要求首先获取离散的波形。该成果主要针对理论创新,尚未优化代码并在 GPU 上运行,成像速率约为 50 Hz。2019 年,Altmann 等^[75]指出在高性能计算资源的配合下,基于帧间时空模型的方法处理单帧光子计数图像的时间可低于 1 ms。2021 年,Mora-Martín 等^[76]在文献[56]中系统的基础上设计了基于 CNN 的重建算法,该算法可以处理 SBR 低至 0.05 的极限情况,在 GPU 的加速下处理速度可达 1 kHz 以上。此外,算法设计的革新也带动了成像原理的革新,2021 年,Rapp 等^[77]将探测时间的序列建模为马尔科夫链并展开分析与重建,大大降低了探测器与电子器件的死时间对回波信号的畸变,使高光流的单光子成像

成为了可能。实验结果表明,相比典型的单光子成像系统,基于该方法设计的系统光流强度提高了约两个数量级,突破了传统时间相关光子计数原理中关于计数损失(堆积效应)对单个探测周期内回波概率小于 5% 的限制,极大提升了光子获取的效率,进而提升了成像速率。

实时成像是光子计数成像技术迈向实用化的重要保障,也是近年来本领域研究的重点问题。目前实现实时成像的思路主要包括四个方面:1)设计近

似算法,降低算法对计算资源的需求;2)与成像系统深度结合,在获取数据的同时进行处理;3)优化算法结构并借助强大的计算平台实现并行化;4)通过算法的革新推动成像原理的革新,从而提升成像效率。未来实时光子计数成像算法需要不断平衡成像的速率与质量,因此,研究高效且准确的场景先验信息具有重要意义,而并行计算也要求成像算法必须具有可量化(Scalable)等特点。表 1 为典型应用中对应的主要问题,其中,●表示对应关系。

表 1 典型应用中的主要问题

Table 1 Main problems of featured applications

Problem	Long-range imaging	Underwater imaging	Imaging through obstruct	Complex scenes	NLOS imaging	Fluorescence imaging
Sparse	●	●	●	●	●	●
Strong noise	●	●	●	●	●	
Multiple returns	●			●		
Multiple dimensions			●	●		●
Super-resolution	●	●	●		●	
Real-time imaging		●	●	●	●	●

4 结 论

概述了光子计数成像算法的研究背景、技术挑战以及典型问题的进展。光子计数成像算法可以有效解决硬件系统性能限制导致的图像质量下降问题,同时也在不断突破传统成像性能的极限。通过对典型问题进展的梳理与思考,得到目前光子计数成像算法的发展趋势如下。

1) 综合化:随着光子计数成像技术的发展,实际应用中遇到的情况可能是若干典型问题混合而成的综合性问题。如在复杂场景的感知中,可能同时存在单峰信号与多峰信号,且面临着稀疏回波与强噪声干扰的挑战。因此,重建算法必须通过集成典型问题的解决方法增强自身的处理能力,以应对复杂的状况。目前,大部分算法可推广至多维信号中,未来实际应用中还将不断推动该趋势的发展。

2) 模块化:光子计数成像算法往往是根据成像系统的具体问题所提出,针对各种具体问题的思路与方法也不断涌现。随着实际应用需求的明确及待处理问题难度的增加,各类方法需要进一步配合以实现最终的目标。一些经典问题已逐渐显现出较为成熟的处理方式,随着技术的发展,各类典型问题的处理方法有望模块化,进而通过各模块的配合实现

更强的重建能力。

3) 智能化:目前,光子计数成像算法已在多个方面取得了巨大的成功,但大部分算法仍然需要人工选取或调节参数,未来应用中回波的复杂性与成像的实时性要求算法必须更加智能化。因此,基于深度学习的方法在该方面具有更大的发展潜力,但其昂贵的训练成本及专用网络对复杂问题的重建能力是目前面临的主要技术挑战之一。此外,通过对物理机理的深入研究与多种算法的有效利用也可以提升算法整体的智能化水平。

4) 实时化:已有算法主要针对的是静态或慢速移动目标的场景,未来应用场景将更加极端,光子计数成像算法需在有限的运算时间内重建出较好的目标信息。近年来,人们提出了多种提高图像重建速率的算法,为实时化成像的进一步发展提供了新思路。

基于上述趋势,未来光子计数成像算法将在探索成像性能极限、成像原理革新与推动技术的应用中占据更重要的角色,也有望成为推动光子计数成像技术发展的新动力。

参 考 文 献

- [1] Wallace A M, Halimi A, Buller G S. Full waveform LiDAR for adverse weather conditions [J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2020, 69(7):

- 7064-7077.
- [2] Velten A, Willwacher T, Gupta O, et al. Recovering three-dimensional shape around a corner using ultrafast time-of-flight imaging[J]. *Nature Communications*, 2012, 3: 745.
- [3] Connolly P W R, Valli J, Shah Y D, et al. Simultaneous multi-spectral, single-photon fluorescence imaging using a plasmonic colour filter array[J]. *Journal of Biophotonics*, 2021, 14: e202000505.
- [4] Liu Y X, Fan Q, Li X Y, et al. Realization of silicon single-photon detector with ultra-low dark count rate [J]. *Acta Optica Sinica*, 2020, 40(10): 1004001.
刘岩鑫, 范青, 李翔艳, 等. 超低暗计数率硅单光子探测器的实现 [J]. *光学学报*, 2020, 40(10): 1004001.
- [5] Becker W. Advanced time-correlated single photon counting techniques [M]. Qu J, Transl. Beijing: Science Press, 2009.
Becker W. 高级时间相关单光子计数技术 [M]. 屈军乐, 译. 北京: 科学出版社, 2009.
- [6] Chen S M. Research on coding technique and image reconstruction algorithm based on single photon detection [D]. Beijing: University of Chinese Academy of Sciences, 2020: 11-56.
陈松懋. 单光子探测编码技术及图像重构算法研究 [D]. 北京: 中国科学院大学, 2020: 11-56.
- [7] Tachella J, Altmann Y, Ren X, et al. Bayesian 3D reconstruction of complex scenes from single-photon lidar data [J]. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2019, 12(1): 521-550.
- [8] Kirmani A, Venkatraman D, Shin D, et al. First-photon imaging[J]. *Science*, 2014, 343(6166): 58-61.
- [9] Altmann Y, Ren X M, McCarthy A, et al. Lidar waveform-based analysis of depth images constructed using sparse single-photon data[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2016, 25(5): 1935-1946.
- [10] Tobin R, Halimi A, McCarthy A, et al. Long-range depth profiling of camouflaged targets using single-photon detection[J]. *Optical Engineering*, 2017, 57(3): 031303.
- [11] Kang Y. Research on single photon counting lidar 3D imaging technology with a few echo photons [D]. Beijing: University of Chinese Academy of Sciences, 2019: 40-44.
康岩. 基于少量回波光子的单光子计数雷达三维成像技术研究 [D]. 北京: 中国科学院大学, 2019: 40-44.
- [12] Tachella J, Altmann Y, Mellado N, et al. Real-time 3D reconstruction from single-photon lidar data using plug-and-play point cloud denoisers[J]. *Nature Communications*, 2019, 10: 4984.
- [13] Ge P, Guo J J, Chen C, et al. Photon-counting 3D imaging based on Geiger-mode APD array[J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2020, 49(3): 0305007.
葛鹏, 郭静菁, 陈丛, 等. 基于盖革 APD 阵列的光子计数三维成像 [J]. *红外与激光工程*, 2020, 49(3): 0305007.
- [14] Maccarone A, Rocca F M D, McCarthy A, et al. Three-dimensional imaging of stationary and moving targets in turbid underwater environments using a single-photon detector array [J]. *Optics Express*, 2019, 27(20): 28437-28456.
- [15] Kong L D, Zhao Q Y, Tu X C, et al. Progress and applications of superconducting nanowire delay-line single-photon imagers[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2021, 58(10): 1011002.
孔令东, 赵清源, 涂学凑, 等. 超导纳米线延迟线单光子成像器件进展及应用 [J]. *激光与光电子学进展*, 2021, 58(10): 1011002.
- [16] Rapp J, Tachella J, Altmann Y, et al. Advances in single-photon lidar for autonomous vehicles: working principles, challenges, and recent advances[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2020, 37(4): 62-71.
- [17] Halimi A, Altmann Y, McCarthy A, et al. Restoration of intensity and depth images constructed using sparse single-photon data[C]//2016 24th European Signal Processing Conference (EUSIPCO), August 29-September 2, 2016, Budapest, Hungary. New York: IEEE Press, 2016: 86-90.
- [18] Lindell D B, O' Toole M, Wetzstein G. Single-photon 3D imaging with deep sensor fusion[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2018, 37(4): 1-12.
- [19] Shin D, Kirmani A, Goyal V K, et al. Photon-efficient computational 3-D and reflectivity imaging with single-photon detectors[J]. *IEEE Transactions on Computational Imaging*, 2015, 1(2): 112-125.
- [20] Li Z P, Ye J T, Huang X, et al. Single-photon imaging over 200 km[J]. *Optica*, 2021, 8(3): 344-349.
- [21] Li Z P, Huang X, Cao Y, et al. Single-photon computational 3D imaging at 45 km [J]. *Photonics Research*, 2020, 8(9): 1532-1540.
- [22] Shao Y, Wang D J, Zhang D, et al. Research progress of single photon laser ranging technology [J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2021, 58(10): 1011020.
邵禹, 王德江, 张迪, 等. 单光子激光测距技术研究进展 [J]. *激光与光电子学进展*, 2021, 58(10): 1011020.

- [23] Tobin R, Halimi A, McCarthy A, et al. Three-dimensional single-photon imaging through obscurants[J]. *Optics Express*, 2019, 27(4): 4590-4611.
- [24] Jiang P Y, Li Z P, Xu F H. Compact long-range single-photon imager with dynamic imaging capability [J]. *Optics Letters*, 2021, 46(5): 1181-1184.
- [25] Altmann Y, McLaughlin S, Padgett M J, et al. Quantum-inspired computational imaging[J]. *Science*, 2018, 361(6403): eaat2298.
- [26] He W J, Sima B Y, Chen Y F, et al. A correction method for range walk error in photon counting 3D imaging LiDAR[J]. *Optics Communications*, 2013, 308: 211-217.
- [27] Shin D, Shapiro J H, Goyal V K. Performance analysis of low-flux least-squares single-pixel imaging [J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2016, 23(12): 1756-1760.
- [28] Chen S M, Halimi A, Ren X M, et al. Learning non-local spatial correlations to restore sparse 3D single-photon data[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2019, 29: 3119-3131.
- [29] Rapp J, Goyal V K. A few photons among many: unmixing signal and noise for photon-efficient active imaging [J]. *IEEE Transactions on Computational Imaging*, 2017, 3(3): 445-459.
- [30] Cao D Z, Zhang S H, Zhao Y A, et al. Zero-photon imaging under extremely low-light illumination[EB/OL]. [2021-07-01]. <https://arxiv.org/abs/2108.01037>.
- [31] Pawlikowska A M, Halimi A, Lamb R A, et al. Single-photon three-dimensional imaging at up to 10 kilometers range [J]. *Optics Express*, 2017, 25(10): 11919-11931.
- [32] Kong H J, Kim T H, Jo S E, et al. Smart three-dimensional imaging lidar using two Geiger-mode avalanche photodiodes[J]. *Optics Express*, 2011, 19(20): 19323-19329.
- [33] Wang S C, Su X Q, Zhu W H, et al. A time-correlated single photon counting signal denoising method based on elastic variational mode extraction [J/OL]. *Acta Physica Sinica*, 2021: 1-25 [2021-07-01]. <https://kns.cnki.net/kcms/detail/11.1958.04.20210428.1852.016.html>. 汪书潮, 苏秀琴, 朱文华, 等. 基于弹性变分模式提取的时间相关单光子计数信号去噪[J/OL]. *物理学报*, 2021: 1-25 [2021-07-01]. <https://kns.cnki.net/kcms/detail/11.1958.04.20210428.1852.016.html>.
- [34] Maccarone A, Halimi A, McCarthy A, et al. Underwater three-dimensional imaging using single-photon detection[C]//2017 Conference on Lasers and Electro-Optics (CLEO), May 14-19, 2017, San Jose, California. Washington, D. C.: OSA, 2017: SF2M.2.
- [35] Peng X, Zhao X Y, Li L J, et al. First-photon imaging via a hybrid penalty[J]. *Photonics Research*, 2020, 8(3): 325-330.
- [36] Peng J Y, Xiong Z W, Huang X, et al. Photon-efficient 3D imaging with a non-local neural network [M] // Vedaldi A, Bischof H, Brox T, et al. *Computer vision-ECCV 2020. Lecture notes in computer science*. Cham: Springer, 2020, 12351: 225-241.
- [37] Hua K J, Liu B, Chen Z, et al. Efficient and noise robust photon-counting imaging with first signal photon unit method [J]. *Photonics*, 2021, 8(6): 229.
- [38] Altmann Y, Wallace A, McLaughlin S. Spectral unmixing of multispectral lidar signals [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2015, 63(20): 5525-5534.
- [39] Altmann Y, Maccarone A, Halimi A, et al. Efficient range estimation and material quantification from multispectral lidar waveforms[C]//2016 Sensor Signal Processing for Defence (SSPD), September 22-23, 2016, Edinburgh, UK. New York: IEEE Press, 2016: 1-5.
- [40] Altmann Y, Maccarone A, McCarthy A, et al. Joint spectral clustering and range estimation for 3D scene reconstruction using multispectral lidar waveforms [C]//2016 24th European Signal Processing Conference (EUSIPCO), August 29-September 2, 2016, Budapest, Hungary. New York: IEEE Press, 2016: 513-517.
- [41] Chhabra P, Maccarone A, McCarthy A, et al. Discriminating underwater LiDAR target signatures using sparse multi-spectral depth codes [C] // 2016 Sensor Signal Processing for Defence (SSPD), September 22-23, 2016, Edinburgh, UK. New York: IEEE Press, 2016: 1-5.
- [42] Ren X M, Altmann Y, Tobin R, et al. Wavelength-time coding for multispectral 3D imaging using single-photon LiDAR[J]. *Optics Express*, 2018, 26(23): 30146-30161.
- [43] Legros Q, Meignen S, McLaughlin S, et al. Expectation-maximization based approach to 3D reconstruction from single-waveform multispectral lidar data [J]. *IEEE Transactions on Computational Imaging*, 2020, 6: 1033-1043.
- [44] Tachella J, Altmann Y, Márquez M, et al. Bayesian 3D reconstruction of subsampled multispectral single-photon lidar signals [J]. *IEEE Transactions on*

- Computational Imaging, 2019, 6: 208-220.
- [45] Chen S M, Hao W, Su X Q, et al. Restoration of sparse multispectral single photon lidar data [C] // 2020 IEEE International Conference on Signal Processing, Communications and Computing (ICSPCC), August 21-24, 2020, Macao, China. New York: IEEE Press, 2020: 1-5.
- [46] Halimi A, Maccarone A, Lamb R, et al. Robust and guided Bayesian reconstruction of single-photon 3D lidar data: application to multispectral and underwater imaging [EB/OL]. (2021-03-18) [2021-07-01]. <https://arxiv.org/abs/2103.10122>.
- [47] Tian X, Chen W, Wang Z Y, et al. Polarization prior to single-photon counting image denoising[J]. Optics Express, 2021, 29(14): 21664-21682.
- [48] Yin W, He W, Gu G, et al. Approach for LiDAR signals with multiple returns [J]. Applied Optics, 2014, 53(30): 6963-6969.
- [49] Shin D, Xu F H, Wong F N C, et al. Computational multi-depth single-photon imaging[J]. Optics Express, 2016, 24(3): 1873-1888.
- [50] Halimi A, Tobin R, McCarthy A, et al. Robust restoration of sparse multidimensional single-photon LiDAR images[J]. IEEE Transactions on Computational Imaging, 2019, 6: 138-152.
- [51] Aßmann A, Stewart B, Wallace A M. Deep learning for LiDAR waveforms with multiple returns [C] // 2020 28th European Signal Processing Conference (EUSIPCO), January 18-21, 2021, Amsterdam, Netherlands. New York: IEEE Press, 2021: 1571-1575.
- [52] Tan H, Peng J Y, Xiong Z W, et al. Deep learning based single-photon 3D imaging with multiple returns [C] // 2020 International Conference on 3D Vision (3DV), November 25-28, 2020, Fukuoka, Japan. New York: IEEE Press, 2020: 1196-1205.
- [53] Sun Q L, Zhang J, Dun X, et al. End-to-end learned, optically coded super-resolution SPAD camera[J]. ACM Transactions on Graphics, 2020, 39(2): 1-14.
- [54] Li Z P, Huang X, Jiang P Y, et al. Super-resolution single-photon imaging at 8.2 kilometers[J]. Optics Express, 2020, 28(3): 4076-4087.
- [55] Xue R K, Kang Y, Zhang T Y, et al. Sub-pixel scanning high-resolution panoramic 3D imaging based on a SPAD array[J/OL]. IEEE Photonics Journal, 2021: 1-6 [2021-07-01]. <https://ieeexplore.ieee.org/document/9511027>.
- [56] Gyongy I, Hutchings S W, Halimi A, et al. High-speed 3D sensing via hybrid-mode imaging and guided upsampling[J]. Optica, 2020, 7(10): 1253-1260.
- [57] Ruget A, McLaughlin S, Henderson R K, et al. Robust super-resolution depth imaging via a multi-feature fusion deep network [J]. Optics Express, 2021, 29(8): 11917-11937.
- [58] Rapp J, Dawson R M A, Goyal V K. Dithered depth imaging[J]. Optics Express, 2020, 28(23): 35143-35157.
- [59] Ren X Y, Xu B, Fei Q L, et al. Single-photon counting laser ranging with optical frequency combs [J]. IEEE Photonics Technology Letters, 2021, 33(1): 27-30.
- [60] Arellano V, Gutierrez D, Jarabo A. Fast back-projection for non-line of sight reconstruction [J]. Optics Express, 2017, 25(10): 11574-11583.
- [61] La Manna M, Kine F, Breitbach E, et al. Error backprojection algorithms for non-line-of-sight imaging[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2019, 41(7): 1615-1626.
- [62] O'Toole M, Lindell D B, Wetzstein G. Confocal non-line-of-sight imaging based on the light-cone transform[J]. Nature, 2018, 555(7696): 338-341.
- [63] Xin S M, Nousias S, Kutulakos K N, et al. A theory of Fermat paths for non-line-of-sight shape reconstruction [C] // 2019 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), June 15-20, 2019, Long Beach, CA, USA. New York: IEEE Press, 2019: 6793-6802.
- [64] Lindell D B, Wetzstein G, O'Toole M. Wave-based non-line-of-sight imaging using fast $f-k$ migration [J]. ACM Transactions on Graphics, 2019, 38(4): 1-13.
- [65] Liu X C, Guillén I, La Manna M, et al. Non-line-of-sight imaging using phasor-field virtual wave optics [J]. Nature, 2019, 572(7771): 620-623.
- [66] Marco J, Jarabo A, Nam J H, et al. Virtual light transport matrices for non-line-of-sight imaging [EB/OL]. (2021-03-23) [2021-07-01]. <https://arxiv.org/abs/2103.12622>.
- [67] Liu X C, Bauer S, Velten A. Phasor field diffraction based reconstruction for fast non-line-of-sight imaging systems [J]. Nature Communications, 2020, 11: 1645.
- [68] Wu C, Liu J J, Huang X, et al. Non-line-of-sight imaging over 1.43 km[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of USA, 2021, 118(10): e2024468118.
- [69] Ye J T, Huang X, Li Z P, et al. Compressed sensing for active non-line-of-sight imaging [J]. Optics Express, 2021, 29(2): 1749-1763.
- [70] Ahn B, Dave A, Veeraraghavan A, et al. Convolutional approximations to the general non-line-

- of-sight imaging operator[C]//2019 IEEE/CVF International Conference on Computer Vision (ICCV), October 27-November 2, 2019, Seoul, Korea (South). New York: IEEE Press, 2019: 7888-7898.
- [71] Cho P, Anderson H, Hatch R, et al. Real-time 3-D lidar imaging [C] // 2006 HPCMP Users Group Conference (HPCMP-UGC'06), June 26-29, 2006, Denver, CO, USA. New York: IEEE Press, 2006: 321-326.
- [72] Tachella J, Altmann Y, McLaughlin S, et al. Real-time 3D color imaging with single-photon lidar data [C]//2019 IEEE 8th International Workshop on Computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing (CAMSAP), December 15-18, 2019, Le Gosier, Guadeloupe. New York: IEEE Press, 2019: 206-210.
- [73] Aßmann A, Wu Y, Stewart B, et al. Accelerated 3D image reconstruction for resource constrained systems [C]//2020 28th European Signal Processing Conference (EUSIPCO), January 18-21, 2021, Amsterdam, Netherlands. New York: IEEE Press, 2021: 565-569.
- [74] Legros Q, Tachella J, Tobin R, et al. Robust 3D reconstruction of dynamic scenes from single-photon lidar using beta-divergences [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2020, 30: 1716-1727.
- [75] Altmann Y, McLaughlin S, Davies M E. Fast online 3D reconstruction of dynamic scenes from individual single-photon detection events [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2019, 29: 2666-2675.
- [76] Mora-Martín G, Turpin A, Ruget A, et al. High-speed object detection with a single-photon time-of-flight image sensor [EB/OL]. [2021-07-01]. <https://arxiv.org/abs/2107.13407>.
- [77] Rapp J, Ma Y T, Dawson R M A, et al. High-flux single-photon lidar [J]. Optica, 2021, 8(1): 30-39.