

# 激光与光电子学进展

## 不同入射角下物体的穆勒矩阵

何思源, 周芷茵, 田小凡, 王安鸽, 王妍, 宋哲\*

辽宁师范大学物理与电子技术学院, 辽宁 大连 116029

**摘要** 穆勒矩阵是一种用斯托克斯矢量描述光波在传播过程中偏振态变化的关系矩阵, 是获取物体偏振特性的重要手段。但穆勒矩阵的测量与材料、粗糙度、入射角、环境等因素有密切关系。采用多次旋转波片和偏振片的方法测量了不同入射角下, 铜、铝、钢、硅和蓝宝石五种材料的穆勒矩阵, 分析了入射角对穆勒矩阵各分量值的影响。根据 Lu-Chipman 极化分解方法对穆勒矩阵进行了分解, 并分析了样品双向衰减特性、起偏特性、相位延迟特性、退偏振特性与入射角之间的关系。同时发现金属和电介质材料  $m_{23}$ 、 $m_{32}$  两个分量随入射角变化的规律不同, 可作为区分金属与电介质的一个依据。该分析结果对研究物体的偏振特性和材料识别有一定参考价值。

**关键词** 物理光学; 偏振; 斯托克斯矢量; 穆勒矩阵; 入射角

中图分类号 O436.3

文献标志码 A

doi: 10.3788/LOP202158.1726001

### Investigating the Mueller Matrix of Objects at Different Incident Angles

He Siyuan, Zhou Zhiyin, Tian Xiaofan, Wang Ange, Wang Yan, Song Zhe\*

*College of Physics and Electronic Technology, Liaoning Normal University,*

*Dalian, Liaoning 116029, China*

**Abstract** Mueller matrix is a type of relation matrix that describes the changes in light polarization during propagation using the Stokes vector. It is an important method for obtaining the polarization characteristics of objects. However, the measurement of Mueller matrix may be affected by factors such as the material, roughness, incident angle, and environment. In this work, multiple rotating wave plates and polarizers were used to measure the Mueller matrix of copper, aluminum, steel, silicon, and sapphire with different incident angles. The influence of the incident angle on the Mueller matrix components was analyzed. The Mueller matrix was decomposed into three matrix factors based on Lu-Chipman polar decomposition and the relationships between the diattenuation, polarizance, retardance, depolarization properties, and incident angles of samples were analyzed. The variations of  $m_{23}$  and  $m_{32}$  with the incident angle for metal and dielectric materials were found to be different; this phenomenon can be used to distinguish between metals and dielectrics. The results of this study can be used as a reference for studying the polarization characteristics of objects and identifying materials.

**Key words** physical optics; polarization; Stokes vector; Mueller matrix; incident angle

**OCIS codes** 260.5430; 260.2130; 240.5440; 290.5855

## 1 引言

光波经过物体反射、散射后偏振态将发生改变, 从而携带物体的许多特征信息。通过研究光波

经过物体前后偏振的变化, 可以得到物体的偏振特性, 进而获得物体的结构、光学特性、形貌等信息, 因此偏振技术被越来越多地应用到探测<sup>[1]</sup>、目标识别<sup>[2]</sup>、生物医学<sup>[3]</sup>等领域。光波与物体相互作用的

收稿日期: 2020-11-19; 修回日期: 2021-01-01; 录用日期: 2021-01-06

通信作者: \*zhesongke@163.com

偏振特征可以用穆勒矩阵来描述,它由 16 个元素组成,包含了物体全部的偏振信息。

穆勒矩阵的测量方法有多种,主要有:1)双旋转波片法,样品前后的偏振片固定, $\lambda/4$ 波片以 1:5 的角度同时旋转,然后通过傅里叶分析得到穆勒矩阵<sup>[4-6]</sup>;2)相位调制法,利用两个相位调制器进行四次测量,得到穆勒矩阵<sup>[7]</sup>;3)多次旋转法,样品前后的偏振片和波片均可任意旋转,多次测量后通过求解线性方程组得到穆勒矩阵<sup>[8]</sup>;4)基于邦加球轨迹的测量法,将穆勒矩阵与其在邦加球上的轨迹联系起来,根据输入输出光波偏振态在邦加球上的位置关系得到穆勒矩阵<sup>[9]</sup>。为了更好地从穆勒矩阵中提取物体的偏振信息,Lu 等<sup>[10]</sup>采用极分解,Ossikovski<sup>[11]</sup>采用奇异值分解,Noble 等<sup>[12]</sup>采用根分解,Ortega-Quijano 等<sup>[13]</sup>采用微分分解等方法对穆勒矩阵进行分解,得到物体双向衰减、退偏振、相位延迟等偏振信息。但是穆勒矩阵的测量与很多因

素有关,如入射角、粗糙度、环境等,了解这些因素对穆勒矩阵的影响,对获取物体的偏振特性是十分必要的。本文采用多次旋转法测量了不同入射角下五种材料的穆勒矩阵,分析了入射角对穆勒矩阵各分量的影响,并通过极分解,研究了不同入射角下物体的双向衰减、起偏、退偏振、相位延迟等偏振特性。

## 2 穆勒矩阵的测量原理

图 1 是穆勒矩阵的测量装置示意图,主要包括激光器、圆偏振产生系统、起偏系统、检偏系统以及探测器(CCD)五部分。其中圆偏振产生系统、起偏系统、检偏系统分别由一对偏振片  $P_i$  和  $\lambda/4$  波片  $Q_i$  构成, $P_1$  和  $Q_1$  的方向固定, $P_1$  偏振方向与  $Q_1$  主轴成  $45^\circ$ ,以产生圆偏振光,保证不同振动方向的光波具有相同的光强, $P_2$ 、 $P_3$ 、 $W_2$ 、 $W_3$  可以任意旋转,用以调节光束的偏振态。

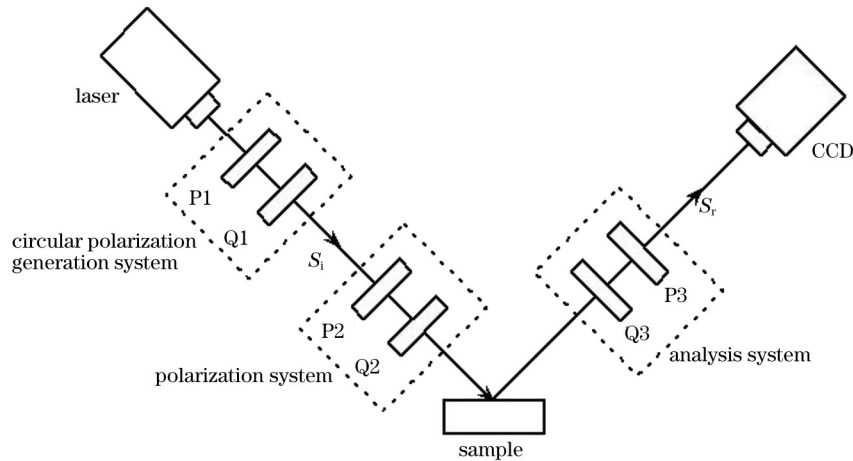


图 1 穆勒矩阵测量装置示意图

Fig. 1 Schematic of Mueller matrix measuring device

设光波经过圆偏振系统后产生的斯托克斯矢量为  $S_i = (S_{i0} \ S_{i1} \ S_{i2} \ S_{i3})^T$ , CCD 接收光波的斯托克斯矢量为  $S_r = (S_{r0} \ S_{r1} \ S_{r2} \ S_{r3})^T$ , 则有

$$S_r = M_{P_3} M_{Q_3} M_S M_{Q_2} M_{P_2} S_i, \quad (1)$$

式中:  $M_X$  代表各光学器件和目标物体的穆勒矩阵。当偏振片的偏振方向与  $x$  轴夹角为  $\theta_p$  时,偏振片的穆勒矩阵为

$$M_P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cos 2\theta_p & \sin 2\theta_p & 0 \\ \cos 2\theta_p & \cos^2 2\theta_p & \sin 2\theta_p \cos 2\theta_p & 0 \\ \sin 2\theta_p & \sin 2\theta_p \cos 2\theta_p & \sin^2 2\theta_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

当  $\lambda/4$  波片的快轴与  $x$  轴夹角为  $\theta_\lambda$  时,  $\lambda/4$  波片的穆勒矩阵为

$$M_Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 2\theta_\lambda & \sin 2\theta_\lambda \cos 2\theta_\lambda & -\sin 2\theta_\lambda \\ 0 & \sin 2\theta_\lambda \cos 2\theta_\lambda & \sin^2 2\theta_\lambda & \cos 2\theta_\lambda \\ 0 & \sin 2\theta_\lambda & -\cos 2\theta_\lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

样品的穆勒矩阵为

$$\mathbf{M}_S = \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \quad (4)$$

由于穆勒矩阵包括 16 个分量,而 CCD 只能探测光强,即斯托克斯矢量中的第一项  $S_{r0}$ ,所以由 (1)~(4) 式可知,仅通过一次测量不能得到样品的穆勒矩阵,需要多次旋转起偏系统和检偏系统的偏

振片与  $\lambda/4$  波片,至少测量 16 次,再计算求得。为使计算简单,同时考虑到减小测量误差,起偏系统和检偏系统各选取了 6 组旋转角度,即起偏系统  $(\theta_{p2}, \theta_{\lambda 2})$  为  $(90^\circ, 90^\circ)$ 、 $(0^\circ, 0^\circ)$ 、 $(0^\circ, 45^\circ)$ 、 $(45^\circ, 45^\circ)$ 、 $(90^\circ, 45^\circ)$ 、 $(135^\circ, 45^\circ)$ ,检偏系统  $(\theta_{p3}, \theta_{\lambda 3})$  为  $(90^\circ, 90^\circ)$ 、 $(0^\circ, 0^\circ)$ 、 $(0^\circ, 45^\circ)$ 、 $(45^\circ, 45^\circ)$ 、 $(90^\circ, 45^\circ)$ 、 $(135^\circ, 45^\circ)$ ,代入 (1)~(4) 式,则 CCD 每次探测到的光强(即 CCD 接收光波斯托克斯矢量的第一项  $S_{r0}$ )可用矩阵形式表示为

$$S_{r0j} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

式中:  $S_{r0j}(j=1, 2, \dots, 36)$  表示第  $j$  次 CCD 探测到的光强值,共 36 个。根据 (5) 式联立求解可得到目标物体穆勒矩阵的各分量值。

### 3 不同入射角下物体的穆勒矩阵

实验选取了铜、铝、钢三种金属材料 and 硅、蓝宝石两种电介质材料作为样品,光源使用上海虹扬激光科技有限公司腔长 1000 mm 的 He-Ne 激光器,探测器使用大恒图像 DH-SV1421FM 型 CCD 相机,偏振片和  $\lambda/4$  波片使用曲阜师范大学激光研究所的 LGP-4A 格兰-泰勒棱镜和 632.8 nm/4 波片,搭建了如图 1 所示的测量装置,分别测量了入射角为  $20^\circ$ 、 $25^\circ$ 、 $30^\circ$ 、 $35^\circ$ 、 $40^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $50^\circ$ 、 $55^\circ$ 、 $60^\circ$ 、 $65^\circ$ 、 $70^\circ$ 、 $75^\circ$ 、 $80^\circ$  时五个样品的穆勒矩阵,得到穆勒矩阵 16 个分量与入射角的变化关系,其中  $m_{00}$ 、 $m_{01}$ 、 $m_{10}$ 、 $m_{11}$ 、 $m_{22}$ 、 $m_{23}$ 、 $m_{32}$ 、 $m_{33}$  八个分量随入射角变化较大,其他分量变化较小。

图 2 给出变化较大的八个分量随入射角变化的曲线。其中  $m_{00}$  反映物体对入射光散射、反射光强的能力<sup>[8]</sup>,从图中可以看出入射角越大,铜、钢、硅、蓝宝石对光的反射能力越强,而铝反射能力下降,这与铝的复折射率较大有关。 $m_{01}$  反映物体对入射光水平双向衰减能力<sup>[8]</sup>,可以看出入射角增大,铜、铝、硅、蓝宝石的  $|m_{01}/m_{00}|$  逐渐增大,说明水平双向衰减能力增强,钢的水平双向衰减能力基本不受入射角影响。 $m_{10}$  反映物体对非偏振光的水平起偏能力<sup>[8]</sup>,可以看出入射角增大,铜、蓝宝石的  $|m_{10}/m_{00}|$

逐渐增大,铝的  $|m_{10}/m_{00}|$  先减小后增大,硅的  $|m_{10}/m_{00}|$  逐渐减小,说明铜、蓝宝石水平起偏能力增强,铝的水平起偏能力先减弱后增强,硅的水平起偏能力减弱,钢的水平起偏能力最强,但受入射角影响较小。 $m_{11}$ 、 $m_{22}$ 、 $m_{23}$ 、 $m_{32}$ 、 $m_{33}$  反映物体对光波的退偏振和相位延迟<sup>[8]</sup>,可以看出随着入射角的增大,钢、硅、蓝宝石  $m_{11}/m_{00}$  略有增大,铜  $m_{11}/m_{00}$  先略有减小后增大,铝  $m_{11}/m_{00}$  逐渐减小,铜、钢  $m_{22}/m_{00}$  和  $m_{33}/m_{00}$  逐渐增大,铝、硅、蓝宝石  $m_{22}/m_{00}$  和  $m_{33}/m_{00}$  逐渐减小,蓝宝石减小幅度最大,铜、钢、铝  $m_{23}/m_{00}$  和  $m_{32}/m_{00}$  逐渐增大,硅、蓝宝石  $m_{23}/m_{00}$  和  $m_{32}/m_{00}$  逐渐减小,所以五种材料的退偏振能力和相位延迟受入射角的影响不能确定。

为获得样品的退偏振特性和相位延迟特性,根据 Lu-Chipman 极化分解方法,可以将穆勒矩阵分解为三个独立子矩阵,分别为退偏矩阵  $\mathbf{M}_\Delta$ 、相位延迟矩阵  $\mathbf{M}_R$ 、双向衰减矩阵  $\mathbf{M}_D$ ,从而获得物体的退偏特性、相位延迟特性和双向衰减特性。归一化(4)式并写成如下形式,

$$\mathbf{M}_S = m_{00} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{P} & \mathbf{m} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

式中:  $\mathbf{D} = \frac{1}{m_{00}} \begin{pmatrix} m_{01} \\ m_{02} \\ m_{03} \end{pmatrix}$ ;  $\mathbf{P} = \frac{1}{m_{00}} \begin{pmatrix} m_{10} \\ m_{20} \\ m_{30} \end{pmatrix}$ ;  $\mathbf{m}$  是除第一行

和第一列的  $3 \times 3$  矩阵。用 Lu-Chipman 极化分解法<sup>[10]</sup>分解(6)式,得:

$$\mathbf{M}_S = \mathbf{M}_\Delta \mathbf{M}_R \mathbf{M}_D = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{P}_\Delta & \mathbf{m}_\Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{m}_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{D} & \mathbf{m}_D \end{pmatrix}, \quad (7)$$

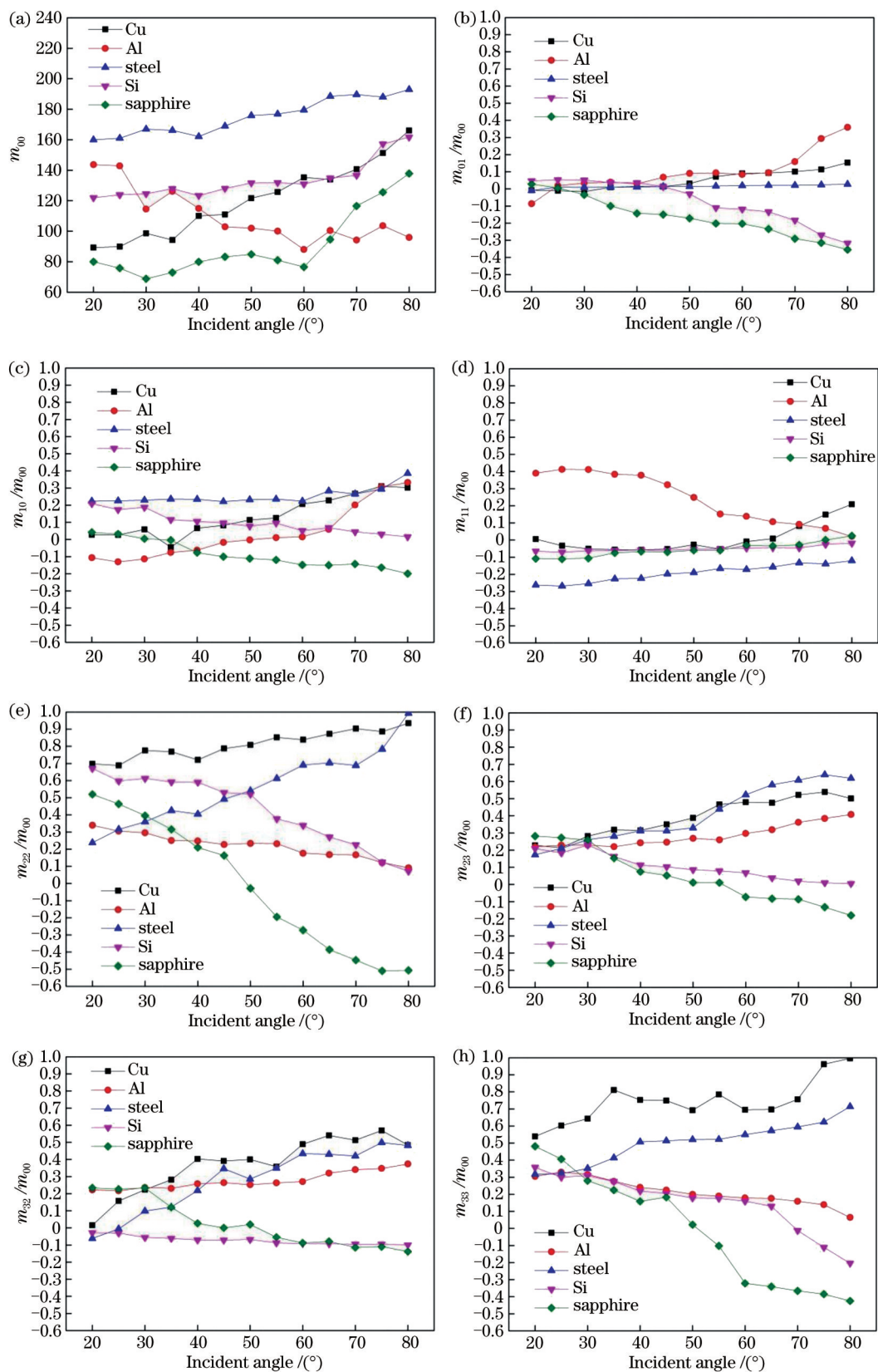


图 2 穆勒矩阵各元素随入射角变化曲线。(a)  $m_{00}$ ; (b)  $m_{01}/m_{00}$ ; (c)  $m_{10}/m_{00}$ ; (d)  $m_{11}/m_{00}$ ; (e)  $m_{22}/m_{00}$ ; (f)  $m_{23}/m_{00}$ ; (g)  $m_{32}/m_{00}$ ; (h)  $m_{33}/m_{00}$

Fig. 2 Variation curves of Mueller matrix elements with incident angle. (a)  $m_{00}$ ; (b)  $m_{01}/m_{00}$ ; (c)  $m_{10}/m_{00}$ ; (d)  $m_{11}/m_{00}$ ; (e)  $m_{22}/m_{00}$ ; (f)  $m_{23}/m_{00}$ ; (g)  $m_{32}/m_{00}$ ; (h)  $m_{33}/m_{00}$



$$m_D = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix} + \frac{1-A}{m_{01}^2 + m_{02}^2 + m_{03}^2} \begin{bmatrix} m_{01}m_{01} & m_{01}m_{02} & m_{01}m_{03} \\ m_{02}m_{01} & m_{02}m_{02} & m_{02}m_{03} \\ m_{03}m_{01} & m_{03}m_{02} & m_{03}m_{03} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$m_R = \frac{1}{A} \left\{ m - \frac{(1-A)}{\sqrt{m_{01}^2 + m_{02}^2 + m_{03}^2} \sqrt{m_{10}^2 + m_{20}^2 + m_{30}^2}} \begin{bmatrix} m_{10}m_{01} & m_{10}m_{02} & m_{10}m_{03} \\ m_{20}m_{01} & m_{20}m_{02} & m_{20}m_{03} \\ m_{30}m_{01} & m_{30}m_{02} & m_{30}m_{03} \end{bmatrix} \right\}, \quad (9)$$

$$A = \sqrt{1 - \frac{1}{m_{00}^2} (m_{01}^2 + m_{02}^2 + m_{03}^2)}, \quad (10)$$

$$P_\Delta = \frac{P - mD}{A^2}, \quad (11)$$

$$M_\Delta = M_S M_D^{-1} M_R^{-1}. \quad (12)$$

并定义  $D$  表征双向衰减特性为

$$D = \frac{1}{m_{00}} \sqrt{m_{01}^2 + m_{02}^2 + m_{03}^2}, \quad (13)$$

$P$  表征对非偏振光的起偏特性为

$$P = \frac{1}{m_{00}} \sqrt{m_{10}^2 + m_{20}^2 + m_{30}^2}, \quad (14)$$

$R$  表征相位延迟特性为

$$R = \arccos \left[ \frac{\text{tr}(M_R)}{2} - 1 \right], \quad (15)$$

$\Delta$  表征退偏特性为

$$\Delta = 1 - \frac{|\text{tr}(M_\Delta) - 1|}{3}. \quad (16)$$

由(13)~(16)式可得不同入射角下样品的双向衰减特性、起偏特性、相位延迟特性和退偏振特性,如图3所示。

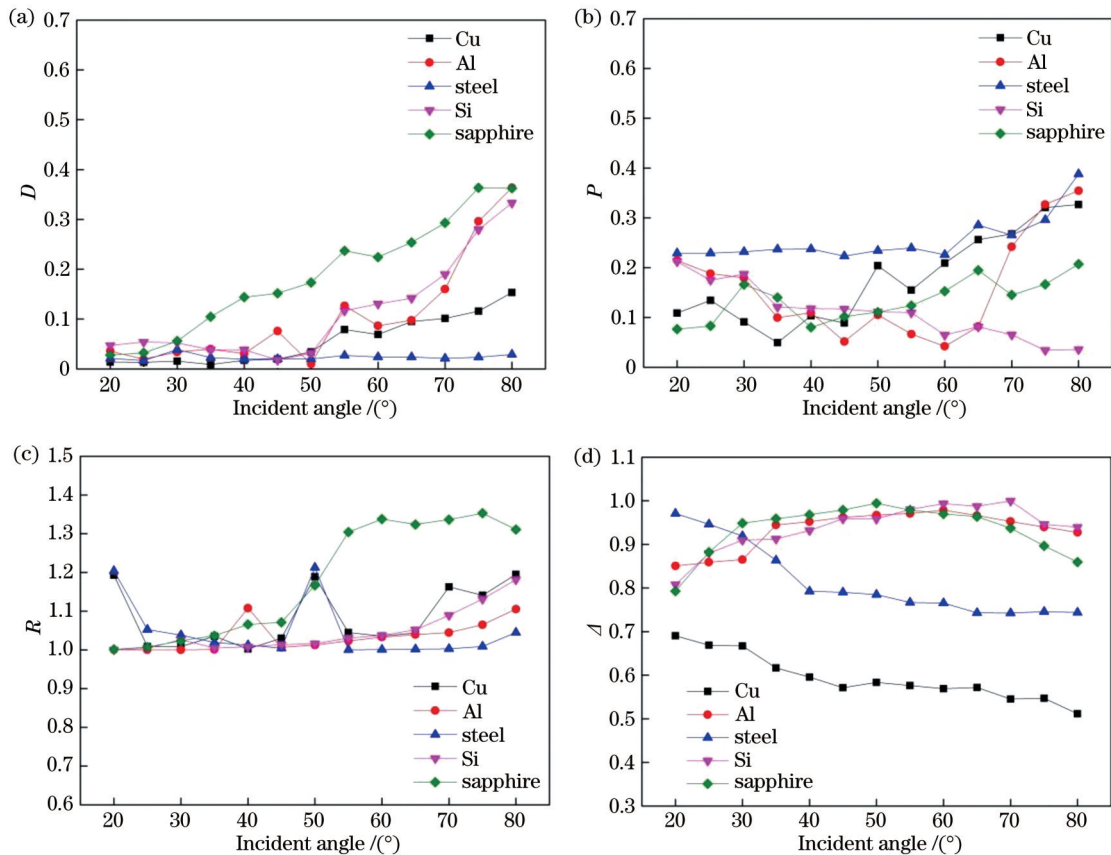


图3 不同特性随入射角的变化曲线。(a)双向衰减特性;(b)起偏特性;(c)延迟特性;(d)退偏振特性

Fig. 3 Variation curves of different characteristics with incident angle. (a) Diattenuation property; (b) polarizance property; (c) retardance property; (d) depolarization property

由图3可知,铜、铝、硅和蓝宝石四种样品的双向衰减能力随着入射角的增大而增强,钢的双向衰减能力较弱且几乎不随入射角变化;硅对非偏

振光的起偏能力随入射角的增大而逐渐减弱,铝的起偏能力随入射角增大先减弱后增强。铜、钢、蓝宝石的起偏能力随入射角增大逐渐增强,其中

钢的起偏能力最强,但入射角小于  $60^\circ$  时受入射角影响较小。铝、硅、蓝宝石的相位延迟随入射角增大而逐渐增大,铜、钢的相位延迟随入射角增大先减小后增大。铜、钢的退偏能力随入射角增大而减弱,铝、硅、蓝宝石的退偏能力随入射角增大先增强后减弱。

## 4 讨 论

物体穆勒矩阵与光波的反射率和相位延迟有关。金属具有导电性,对光波有强吸收和强反射作用,其介电常数、折射率等均为复数,因此金属和电介质的反射率不一样,反射光的偏振态和相位延迟也不一样。线偏光经金属面反射后一般为椭圆偏振光,偏振态和相位延迟与入射角、介质折射率有关,相位延迟随入射角增大是渐变的,而线偏光经电介质反射后一般仍为线偏光,相位延迟是固定的,s波有  $\pi$  的相位延迟,p波在布儒斯特角处有  $0 \rightarrow \pi$  的相位突变。金属和电介质的这些差异导致其穆勒矩阵的不同,从图 2 中可以发现,金属和电介质材料  $m_{23}$ 、 $m_{32}$  两个分量随入射角变化的趋势不同,金属材料  $m_{23}$ 、 $m_{32}$  随入射角增大而增大,电介质材料  $m_{23}$ 、 $m_{32}$  随入射角增大而减小,可以将  $m_{23}$ 、 $m_{32}$  两个分量随入射角变化的规律作为区分金属和电介质材料的一个依据。

本文采用多次旋转法测量穆勒矩阵,在旋转偏振片和  $\lambda/4$  波片时采用手动式旋转,这是造成测量误差的一个主要因素。偏振片和  $\lambda/4$  波片的旋转误差约为  $0.1^\circ$ ,根据(2)、(3)式可得,由旋转误差引起的偏振片和  $\lambda/4$  波片穆勒矩阵各分量的最大误差约为 0.0035,根据(1)、(5)式,最终样品穆勒矩阵测量结果的最大误差约为 0.0035。但本文在不同旋转角度下共测量了 36 次,然后通过 36 个方程求解 16 个穆勒矩阵分量值,每个分量都是通过对多个方程求解平均获得的,大大减小了测量误差。

## 5 结 论

从穆勒矩阵中可以提取出物体的偏振信息,但穆勒矩阵的测量与许多因素有关。本文采用多次旋转法测量了不同入射角下,铜、铝、钢三种金属样品和硅、蓝宝石两种电介质样品的穆勒矩阵,并用 Lu-Chipman 极化分解方法对穆勒矩阵进行了分解。作图分析了入射角对穆勒矩阵各分量值的影响,以及样品的双向衰减特性、起偏特性、相位延迟特性、

退偏振特性与入射角之间的关系。同时还发现金属和电介质材料  $m_{23}$ 、 $m_{32}$  两个分量随入射角变化的趋势不同,金属材料  $m_{23}$ 、 $m_{32}$  随入射角增大而增大,电介质材料  $m_{23}$ 、 $m_{32}$  随入射角增大而减小,可将这两个参数随入射角变化的规律作为识别金属与电介质的一个依据。分析结果对研究物体的偏振特性和识别金属与电介质材料有一定参考价值。本文从金属和电介质材料对光波作用不同的角度,解释了它们的穆勒矩阵随入射角变化规律不同的原因,主要是光波被金属和电介质反射后反射率、偏振态、相位延迟不同造成的,但更深入的解释,还需进行进一步的研究。

## 参 考 文 献

- [1] Liang J, Ju H J, Zhang W F, et al. Review of optical polarimetric dehazing technique[J]. Acta Optica Sinica, 2017, 37(4): 0400001.  
梁健, 巨海娟, 张文飞, 等. 偏振光学成像去雾技术综述[J]. 光学学报, 2017, 37(4): 0400001.
- [2] Yan Z G, Sun W P, Li J, et al. Identification of metals and dielectrics based on Mueller matrix[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2019, 56(14): 142401.  
闫振纲, 孙卫平, 李杰, 等. 基于穆勒矩阵的金属和电介质识别方法[J]. 激光与光电子学进展, 2019, 56(14): 142401.
- [3] Wang Y, He H H, Chang J T, et al. Mueller matrix microscope: a quantitative tool to facilitate detections and fibrosis scorings of liver cirrhosis and cancer tissues[J]. Journal of Biomedical Optics, 2016, 21(7): 071112.
- [4] Azzam R M. Photopolarimetric measurement of the Mueller matrix by Fourier analysis of a single detected signal[J]. Optics Letters, 1978, 2(6): 148-150.
- [5] Goldstein D H. Mueller matrix dual-rotating retarder polarimeter[J]. Applied Optics, 1992, 31(31): 6676-6683.
- [6] Smith M H. Optimization of a dual-rotating-retarder Mueller matrix polarimeter[J]. Applied Optics, 2002, 41(13): 2488-2493.
- [7] Anderson R. Measurement of Mueller matrices[J]. Applied Optics, 1992, 31(1): 11-13.
- [8] Yang W. Research on the key techniques for the polarization information extraction and application in the target detection[D]. Nanjing: Nanjing University of Science and Technology, 2016.

- 杨蔚. 目标探测中偏振信息提取的关键技术与应用 [D]. 南京: 南京理工大学, 2016.
- [9] Xiao Y Y, Jiang X Y, Chen H. Measurement method of Müller matrix based on trajectories on Poincare sphere[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2018, 55(12): 122603.  
肖悦娱, 蒋晓勇, 陈华. 基于邦加球轨迹的穆勒矩阵测量法[J]. *激光与光电子学进展*, 2018, 55(12): 122603.
- [10] Lu S Y, Chipman R A. Interpretation of Mueller matrices based on polar decomposition[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 1996, 13(5): 1106-1113.
- [11] Ossikovski R. Interpretation of nondepolarizing Mueller matrices based on singular-value decomposition [J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2008, 25(2): 473-482.
- [12] Noble H D, McClain S C, Chipman R A. Mueller matrix roots depolarization parameters[J]. *Applied Optics*, 2012, 51(6): 735-744.
- [13] Ortega-Quijano N, Arce-Diego J L. Mueller matrix differential decomposition[J]. *Optics Letters*, 2011, 36(10): 1942-1944.