

基于全变分和梯度域卷积稀疏编码的稀疏角度 CT 重建算法

李雨^{1,2*}, 史娜¹, 孔慧华^{1,2**}, 雷肖雪^{1,2}

¹ 中北大学理学院, 山西 太原 030051;

² 中北大学信息探测与处理山西省重点实验室, 山西 太原 030051

摘要 对于不完全的扫描数据,传统算法无法保证医学电子计算机断层扫描(CT)重建图像满足诊断要求。根据压缩感知理论,可以从不完全的扫描数据中重建出具有稀疏表示的医学 CT 图像,这可为诊断提供可靠的信息。从重建的角度出发,提出了一种基于全变分和梯度域卷积稀疏编码的图像重建算法。梯度域卷积稀疏编码是对特征图施加梯度约束,采用梯度正则化约束来抑制离群点,从而解决了因滤波器不准确而造成的结构丢失或新伪影的问题。所提算法直接对整个图像进行操作,以获取局部邻域之间的相关性,并利用梯度图像的全局相关性来产生更好的边缘和清晰的梯度图像特征,它能有效地捕捉到图像的局部特征。此外,通过引进全变分作为正则项,可进一步恢复图像的微小结构和细节并有效地抑制噪声。实验的定性和定量结果表明,与其他算法相比,所提算法在去除伪影的同时保留了更多的细节,具有更高的重建质量,这验证了该方法的有效性。

关键词 图像处理; 计算机断层成像; 稀疏角度; 全变分; 卷积稀疏编码; 梯度图像

中图分类号 TP391.9

文献标志码 A

doi: 10.3788/LOP202158.1210031

Sparse Angle CT Reconstruction Algorithm Based on Total Variation and Convolutional Sparse Coding in Gradient Domain

Li Yu^{1,2*}, Shi Na¹, Kong Huihua^{1,2**}, Lei Xiaoxue^{1,2}

¹ College of Science, North University of China, Taiyuan, Shanxi 030051, China;

² Shanxi Key Laboratory of Signal Capturing & Processing, North University of China, Taiyuan, Shanxi 030051, China

Abstract For incomplete scanning data, the traditional algorithm cannot guarantee that the medical computed tomography (CT) reconstruction image meets diagnostic requirements. According to the compressed sensing theory, the medical CT image with sparse representation can be reconstructed from the incomplete scanning data, providing reliable information for diagnosis. From the perspective of reconstruction, this paper proposes an image reconstruction algorithm based on total variation and convolutional sparse coding in gradient domain. Gradient domain convolutional sparse coding is to apply gradient constraint to feature images, and gradient regularization constraint is used to suppress outliers, which solves the problems of structure loss and new artifacts caused by the inaccurate filter. The proposed algorithm directly processes the whole image to obtain the correlation of local neighborhoods, and uses the global correlation of gradient images to generate better edge and clear gradient image features, which can effectively capture the local features of the image. In addition, by introducing total variation as the regularization term, the micro structures and details of the image can be further restored and the noise can be effectively suppressed. Qualitative and quantitative experimental results show that, compared with other

收稿日期: 2020-07-30; 修回日期: 2020-09-14; 录用日期: 2020-09-30

基金项目: 国家自然科学基金(61971381, 61871351)、山西省自然科学基金(201701D221121)

* E-mail: 786765912@qq.com; ** E-mail: huihuak@163.com

algorithms, the proposed algorithm retains more details and has higher reconstruction quality, which verifies the effectiveness of the method.

Key words image processing; computed tomography; sparse angle; total variation; convolutional sparse coding; gradient image

OCIS codes 100.3010; 100.2000; 100.3020

1 引言

计算机断层扫描(CT)是一项重要的医学诊断技术,已经成功地用于临床诊断和干预。然而,X射线可以被人体部分吸收,并可能导致遗传或癌症疾病^[1]。稀疏角度CT在加速数据采集和减少CT扫描中的辐射剂量方面具有很大的前景,在实际应用中将会发挥较大的作用。若采用传统解析算法进行稀疏角度重建,图像中会有明显的条形伪影^[2]。近年来,这类稀疏角度CT重建算法主要分为基于投影域的数据插值或变换的方法和基于迭代过程进行图像重建、先验约束的重建算法^[3-4]。

压缩感知(CS)理论的兴起为稀疏角度投影的CT图像重建提供了新的理论依据和思路^[5-6]。CS的关键步骤是选择一个稀疏变换,常用的有全变分(TV)^[7]、小波变换(WT)^[8]、快速傅里叶变换(FFT)^[9]、字典学习(DL)^[10]等。Chen等^[11]提出的伪影抑制字典学习(ASDL)算法在字典学习的过程中综合考虑图像的方向和尺度信息来消除CT图像中的伪影,从而改善了重建效果。陈佩君等^[12]提出一种基于图像总变分(TV)和传统张量字典学习(TDL)的图像重建算法,该算法不但继承了TDL算法在刻画各个能量通道图像之间相似性的优势,而且通过引进TV作为正则项,可进一步恢复图像微小结构和细节并有效地抑制噪声。刘进等^[13]提出了稀疏张量约束的低剂量CT图像重建方法,该方法利用非局部相似的先验信息,将CT图像分割成一系列图像块组;通过采用张量的多维低秩分解方法,将这一先验信息引入低剂量CT重建中,提高了图像重构质量。陈星宇等^[14]提出基于多尺度与多重残差网络的图像超分辨率重建。

字典学习方法均采用传统的基于块的稀疏表示来重建CT图像,其基本缺点是将感兴趣的图像细分成相互独立的块,该方法可能会丢失重要的空间结构。为了弥补基于块的稀疏表示方法的不足,Zeiler等^[15]提出了一种基于卷积实现的稀疏编码(CSC)方法。卷积分解过程不需要将整个图像分割成重叠的小块,而是将整幅图像看作一个整体并对

图像进行稀疏编码,用滤波器和对应特征映射的卷积总和代替传统的字典矩阵与编码系数的乘积对图像进行分解,利用较少的原子个数有效描述图像的几何特征,从而有效地避免传统稀疏表示算法存在的编码冗余的缺点。Xiong等^[16]将CSC思想用于磁共振成像(MRI)图像重建,基于梯度域卷积稀疏编码(CSCGR)的思想,提出了一种新的卷积稀疏编码方法来解决重建问题。Bao等^[17]将CSC用于解决CT图像重建问题。针对基于非局部稀疏自相似性的超分辨率重建方法存在的图像边缘保持性能不佳的问题,伏伶俐等^[18]提出了基于稀疏编码和各向异性滤波的超分辨率重建算法,重建出边缘细节更加丰富的图像。

本文从重建的角度入手,提出了一种基于TV和CSCGR的稀疏角度CT重建算法,采用交替方案优化目标函数。图像梯度是比图像本身更稀疏的表示,它在卷积稀疏编码中的表示比在像素域图像中的表示更稀疏,因此需考虑梯度域中的卷积稀疏编码。CSCGR可直接获取整个梯度域图像中相邻部分的相关性,在卷积分解过程中不需要将整个图像分割成重叠的块,可以自然地利用一致性先验保持更多的细节,避免小块聚集造成的伪影,并且还能有效地获取梯度域图像中隐含的局部特征。将TV和CSCGR算法相结合,在一定程度上克服了卷积稀疏编码易受强噪声影响、训练过程中可能损失细微结构和图像边缘的缺点,该方法具有更高的准确性和更好的鲁棒性。

2 CT重建算法

2.1 CT重建模型

CT不能直接观察人体内部结构,它可以获得探测器记录的X射线以不同角度通过人体的投影数据,通过重构算法得到扫描数据的线性衰减系数。实际CT系统中使用的CT成像模型可以近似为离散的线性系统,即

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{P}, \quad (1)$$

式中: \mathbf{P} 为探测器在不同投影角度下测量得到的投影数据; \mathbf{u} 为待重建图像,即原始图像; \mathbf{A} 为投影系统矩阵, $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{I \times J}$,其中 I 为射线的总数, J

为图像像素的总数, a_{ij} 为 j 个像素对第 i 个投影数据的贡献。CT 重建是基于系统矩阵 \mathbf{A} 和投影数据 \mathbf{P} 来重建出原始图像 \mathbf{u} 。

为了解决有限投影数据 CT 重建的不适定逆问题, 通常利用图像先验知识将 (1) 式的解进行正则化。重建模型的最小化问题为

$$\arg \min_{\mathbf{u}} \left\{ \frac{\mu}{2} \|\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{P}\|_2^2 + R(\mathbf{u}) \right\}, \quad (2)$$

式中: x 和 y 代表像素位置; $u_{x,y}$ 为 \mathbf{u} 的像素值。因此, 基于 TV 最小化的 CT 重建目标函数为

$$\min_{\mathbf{u}} \left\{ \frac{\mu}{2} \|\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{P}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{u}\|_{\text{TV}} \right\}, \quad (4)$$

式中: λ 为一个平衡参数, 用来权衡数据保真度和正则化系数。

上述优化问题可采用梯度下降法、软阈值法、Split-Bregman 方法等求解。

受 CSC 在信号处理领域成功应用的启发, 研究者们也开始将其用于 CT 重建。CSC 是一组特征映射的卷积的和, 通过替换一组字典向量的线性组合, 得到

$$\min_{\{\mathbf{z}_k\}, \{\mathbf{f}_k\}} \left\{ \frac{1}{2} \left\| \sum_{k=1}^K \mathbf{f}_k \otimes \mathbf{z}_k - U \right\|_2^2 + \gamma \sum_{k=1}^K \|\mathbf{z}_k\|_1 \right\}, \quad (5)$$

式中: \otimes 为卷积算子; U 为包含 k 张训练图像的集

合; μ 为惩罚参数; $\|\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{P}\|_2^2$ 为描述重建投影与实测投影数据 \mathbf{P} 之间的差异的数据保真度项; $R(\mathbf{u})$ 为正则化项, 通常包含重建图像的先验信息。

2.2 基于 TV 和 CSCGR 的稀疏角度 CT 重建算法

Sidky 和 Pan 受 CS 理论启发, 提出了一种基于 TV 的 CT 重建算法, 该算法使用梯度算子作为稀疏表示, 其中 TV 定义为

$$\|\mathbf{u}\|_{\text{TV}} = \sum_x \sum_y \sqrt{(u_{x,y} - u_{x-1,y})^2 + (u_{x,y} - u_{x,y-1})^2}, \quad (3)$$

合, $U = \{\mathbf{u}_k\}_{k=1}^K$, \mathbf{u}_k 为第 k 张训练图像, K 为训练图像集合里的总样本数; F 为具有 k 个卷积核的一组滤波器, $F = \{\mathbf{f}_k\}_{k=1}^K$, \mathbf{f}_k 为第 k 个滤波器; Z 为对应滤波器的稀疏特征映射, 其大小与输入图像一致, $Z = \{\mathbf{z}_k\}_{k=1}^K$, \mathbf{z}_k 为第 k 滤波器的稀疏特征映射; γ 为稀疏约束项的系数。

尽管 CSC 可以很好地用于稀疏角度 CT 重建, 但由于滤波器的不准确, 某些重建图像中可能会出现结构丢失或新伪影。采用梯度正则化约束来抑制离群点是解决这一问题的有效方法。此外, 由于图像梯度比图像本身更稀疏, 因此对特征图施加梯度约束要优于对图像域施加梯度约束。利用特征图上的梯度正则化作为 CSC 中的附加约束, 可得到新的优化问题^[19]。为简单起见, 将此方法称为 CSCGR, 其目标是解决优化问题:

$$\min_{\{\mathbf{z}_k\}, \{\mathbf{f}_k\}} \left\{ \frac{1}{2} \left\| \sum_{k=1}^K \mathbf{f}_k \otimes \mathbf{z}_k - \mathbf{u} \right\|_2^2 + \gamma \sum_{k=1}^K \|\mathbf{z}_k\|_1 + \frac{\xi}{2} \sum_{k=1}^K \left\| \sqrt{(\mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{z}_k)^2 + (\mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{z}_k)^2} \right\|_2 \right\}, \quad (6)$$

式中: \mathbf{g}_1 和 \mathbf{g}_2 分别为 x 轴和 y 轴梯度方向的滤波器; ξ 为一个超参数。

基于梯度域的卷积稀疏编码可以充分利用图像的稀疏性, TV 最小化理论可以很好地保持图像的边缘结构, 因此本文将两种算法相结合, 提出一种新的 CT 图像重建模型 TV-CSCGR。构建目标函数为

$$\min_{\mathbf{u}, \{\mathbf{z}_k\}, \{\mathbf{f}_k\}} \left\{ \frac{\mu}{2} \|\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{P}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{u}\|_{\text{TV}} + \beta \left[\frac{1}{2} \left\| \sum_{k=1}^K \mathbf{f}_k \otimes \mathbf{z}_k - \mathbf{u} \right\|_2^2 + \gamma \sum_{k=1}^K \|\mathbf{z}_k\|_1 + \frac{\xi}{2} \sum_{k=1}^K \left\| \sqrt{(\mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{z}_k)^2 + (\mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{z}_k)^2} \right\|_2 \right] \right\}, \quad (7)$$

式中: μ 为惩罚参数; 第一项表示数据保真项; 第二项是 TV 正则项; 第三项是基于梯度域的卷积稀疏编码约束项, β 为 CSCGR 正则项的系数。

2.3 优化算法

由于 (7) 式有两个变量 \mathbf{u} 和 \mathbf{z}_k , 因此 (7) 式成为如下的优化问题:

$$\min_{\mathbf{u}, \{\mathbf{z}_k\}} \left\{ \frac{\mu}{2} \|\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{P}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{u}\|_{\text{TV}} + \beta \left[\frac{1}{2} \left\| \sum_{k=1}^K \mathbf{f}_k \otimes \mathbf{z}_k - \mathbf{u} \right\|_2^2 + \gamma \sum_{k=1}^K \|\mathbf{z}_k\|_1 + \frac{\xi}{2} \sum_{k=1}^K \left\| \sqrt{(\mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{z}_k)^2 + (\mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{z}_k)^2} \right\|_2 \right] \right\}. \quad (8)$$

模型的代价函数对于 \mathbf{u} 和 \mathbf{z}_k 不是联合凸的,

因此可以通过交替迭代方法 (ADMM)^[20] 更新来求解目标函数, 使得代价函数最小。具体步骤如下。

1) 固定 f_k 和 Z_k , 更新待重建图像 u , 则目标函数变为

$$\arg \min_u \left\{ \frac{\mu}{2} \| \mathbf{A}u - \mathbf{P} \|_2^2 + \lambda \| u \|_{\text{TV}} + \beta \left(\frac{1}{2} \left\| \sum_{k=1}^K f_k \otimes Z_k - u \right\|_2^2 \right) \right\}. \quad (9)$$

离散 TV 的两种常用选择是各向同性 TV 和基于 l_1 范数的各向异性 TV。本文使用基于 l_1 的

各向异性 TV。首先, 给出 (9) 式的完全离散形式为

$$\arg \min_u \left\{ \frac{\mu}{2} \| \mathbf{A}u - \mathbf{P} \|_2^2 + \lambda (|\nabla_x u| + |\nabla_y u|) + \beta \left(\frac{1}{2} \left\| \sum_{k=1}^K f_k \otimes Z_k - u \right\|_2^2 \right) \right\}, \quad (10)$$

式中: $\nabla_x u$ 为重建图像沿 x 方向的梯度; $\nabla_y u$ 为重建图像沿 y 方向的梯度。

为了实现 Bregman 分裂, 引入了两个辅助变量 d_x 和 d_y 来代替 $\nabla_x u$ 和 $\nabla_y u$, 这使得联合优化可以重写为

$$\min_{u, d_x, d_y} \left\{ |d_x| + |d_y| + \frac{\mu}{2} \| \mathbf{A}u - \mathbf{P} \|_2^2 + \frac{\lambda}{2} \| d_x - \nabla_x u \|_2^2 + \frac{\lambda}{2} \| d_y - \nabla_y u \|_2^2 + \beta \left(\frac{1}{2} \left\| \sum_{k=1}^K f_k \otimes Z_k - u \right\|_2^2 \right) \right\}, \quad (11)$$

因此得到了 Split-Bregman 迭代方案的完整形式为

$$(u^{t+1}, d_x^{t+1}, d_y^{t+1}) = \arg \min_{(u, d_x, d_y)} \left\{ |d_x| + |d_y| + \frac{\mu}{2} \| \mathbf{A}u - \mathbf{P} \|_2^2 + \frac{\lambda}{2} \| d_x - \nabla_x u - b_x^t \|_2^2 + \frac{\lambda}{2} \| d_y - \nabla_y u - b_y^t \|_2^2 + \beta \left(\frac{1}{2} \left\| \sum_{k=1}^K f_k \otimes Z_k - u \right\|_2^2 \right) \right\}, \quad (12)$$

$$\begin{cases} b_x^{t+1} = b_x^t + (\nabla_x u^{t+1}) - d_x^{t+1} \\ b_y^{t+1} = b_y^t + (\nabla_y u^{t+1}) - d_y^{t+1} \end{cases}, \quad (13)$$

式中: u^{t+1} 为待重建图像; u 为迭代更新 $t+1$ 次后的中间结果; d_x^{t+1} 和 d_y^{t+1} 为两个辅助变量迭代更新 $t+1$ 次后的中间结果; b_x^t 和 b_y^t 分别为 Bregman 参

数迭代更新 t 次后沿 x 和 y 方向的结果; t 为迭代的次数。

这种形式下, 可以将原始问题解耦为几个子问题, 这些子问题可以通过交替极小化来解决, 即

$$u^{t+1} = \arg \min_{\{u\}} \left\{ \frac{\mu}{2} \| \mathbf{A}u - \mathbf{P} \|_2^2 + \frac{\lambda}{2} \| d_x^t - \nabla_x u - b_x^t \|_2^2 + \frac{\lambda}{2} \| d_y^t - \nabla_y u - b_y^t \|_2^2 + \beta \left(\frac{1}{2} \left\| \sum_{k=1}^K f_k \otimes Z_k - u \right\|_2^2 \right) \right\}, \quad (14)$$

$$\begin{cases} d_x^{t+1} = \arg \min_{\{d_x\}} \left\{ |d_x| + \frac{\lambda}{2} \| d_x - \nabla_x u^{t+1} - b_x^t \|_2^2 \right\} \\ d_y^{t+1} = \arg \min_{\{d_y\}} \left\{ |d_y| + \frac{\lambda}{2} \| d_y - \nabla_y u^{t+1} - b_y^t \|_2^2 \right\} \end{cases}. \quad (15)$$

子问题 (14) 式属于 l_2 范数优化, 可以根据可分离的替代法直接进行求解, 子问题 (15) 式使用迭代

收缩阈值算法^[21] 进行求解。所以上述子问题可以按如下顺序求解:

$$u^{t+1} = u^t - \frac{\mu [\mathbf{A}^T (\mathbf{A}u^t - \mathbf{P})] + \lambda [\nabla_x^T (d_x^t - \nabla_x u - b_x^t) + \nabla_y^T (d_y^t - \nabla_y u - b_y^t)] + \beta \left[\left(\sum_{k=1}^K f_k \otimes Z_k \right)^t - u^t \right]}{\mu (\mathbf{A}^T \mathbf{A}) + \nabla_u (g^t) + \beta}, \quad (16)$$

$$\begin{cases} \mathbf{d}_x^{t+1} = \text{shrink}\left(\nabla_x \mathbf{u}^{t+1} + \mathbf{b}_x^t, \frac{1}{\lambda}\right) \\ \mathbf{d}_y^{t+1} = \text{shrink}\left(\nabla_y \mathbf{u}^{t+1} + \mathbf{b}_y^t, \frac{1}{\lambda}\right) \end{cases}, \quad (17)$$

式中: ∇_u 为待重建图像的梯度算子; $\text{shrink}(\cdot)$ 为软阈值收缩算子。

2) 用固定滤波器 $\{f_k\}$ 表示步骤 1) 得到的中间结果 \mathbf{u} , 即更新 $\{\mathbf{Z}_k\}$, 目标函数变为

$$\min_{\{\mathbf{Z}_k\}} \left\{ \frac{1}{2} \left\| \sum_{k=1}^K \mathbf{f}_k \otimes \mathbf{Z}_k - \mathbf{u} \right\|_2^2 + \gamma \sum_{k=1}^K \|\mathbf{Z}_k\|_1 + \frac{\xi}{2} \sum_{k=1}^K \left\| \sqrt{(\mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{Z}_k)^2 + (\mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{Z}_k)^2} \right\|_2^2 \right\}, \quad (18)$$

在对特征图 \mathbf{Z} 优化更新之前, 首先将卷积稀疏编码模型的优化函数转化为

$$\arg \min_{\mathbf{Z}} \left\{ \frac{1}{2} \|\mathbf{FZ} - \mathbf{u}^{t+1}\|_2^2 + \gamma \|\mathbf{Z}\|_1 + \frac{\xi}{2} \|\mathbf{G}_1 \mathbf{Z}\|_2^2 + \frac{\xi}{2} \|\mathbf{G}_2 \mathbf{Z}\|_2^2 \right\}, \quad (19)$$

式中: $\mathbf{F}_k \mathbf{Z}_k = \mathbf{f}_k \otimes \mathbf{Z}_k$, 其中, \mathbf{F}_k 为 f_k 在傅里叶域中相应的表达式; \mathbf{F} 为滤波器在傅里叶域中的集合, $\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_K)$; $\mathbf{Z} = (\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \dots, \mathbf{Z}_K)^\top$; \mathbf{G}_i 为 g_i 在傅里叶域中相应的表达式, \mathbf{Z}_i 为第 i 个滤波器的稀疏特征映射在傅里叶域中相应的表达式, $i=1$ 表示沿 x 轴作梯度运算, $i=2$ 表示沿 y 轴作梯度运算, $\mathbf{G}_i \mathbf{Z}_i = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{Z}_i$ ($i=1, 2$)。

将 ADMM 应用于(19)式, 引入对偶变量 \mathbf{H} , 此时问题转化为

$$\begin{aligned} \arg \min_{\mathbf{Z}, \mathbf{H}} \left\{ \frac{1}{2} \|\mathbf{FZ} - \mathbf{u}\|_2^2 + \frac{\xi}{2} \|\mathbf{G}_1 \mathbf{Z}\|_2^2 + \frac{\xi}{2} \|\mathbf{G}_2 \mathbf{Z}\|_2^2 + \gamma \|\mathbf{H}\|_1 \right\} \\ \text{s. t. } \quad \mathbf{Z} = \mathbf{H}. \end{aligned} \quad (20)$$

将(20)式解耦为几个子问题, 这些子问题交替优化为

$$\mathbf{Z}^{j+1} = \arg \min_{\mathbf{Z}} \left\{ \frac{1}{2} \|\mathbf{FZ} - \mathbf{u}\|_2^2 + \frac{\xi}{2} \|\mathbf{G}_1 \mathbf{Z}\|_2^2 + \frac{\xi}{2} \|\mathbf{G}_2 \mathbf{Z}\|_2^2 + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{Z} - \mathbf{H}^j + \mathbf{I}^j\|_2^2 \right\}, \quad (21)$$

$$\mathbf{H}^{j+1} = \arg \min_{\mathbf{H}} \left\{ \gamma \|\mathbf{H}\|_1 + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{Z}^{j+1} - \mathbf{H} + \mathbf{I}^j\|_2^2 \right\}, \quad (22)$$

$$\mathbf{I}^{j+1} = \mathbf{I}^j + \mathbf{Z}^{j+1} - \mathbf{H}^{j+1}, \quad (23)$$

式中: \mathbf{Z}^{j+1} 为滤波器的稀疏特征映射经过 $j+1$ 次更新迭代后的中间结果; ρ 为平衡参数; \mathbf{H}^{j+1} 为引入的对偶变量 \mathbf{H} 迭代 $j+1$ 次后的中间结果; \mathbf{I}^{j+1} 为 Bregman 参数经过 $j+1$ 次更新迭代后的中间结果。

TV-CSCGR 算法的主要步骤如图 1 所示。

Step 1: pre-train filter using external fully sampled CT data set;

Step 2: initialization of the number of iterations, $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mu, \lambda, \beta, \gamma, \xi, \rho$

$$\begin{cases} \mathbf{u}^0 = \mathbf{d}_x^0 = \mathbf{d}_y^0 = \mathbf{b}_x^0 = \mathbf{b}_y^0 = \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}^0 = \mathbf{H}^0 = \mathbf{I}^0 = \mathbf{0} \end{cases};$$

Step 3: update \mathbf{u}, \mathbf{d} , and \mathbf{b} by Eqs. (15)–(17), respectively;

Step 4: update \mathbf{Z}, \mathbf{H} , and \mathbf{I} according to Eqs. (21)–(23), and repeat steps 3 and 4 until iteration stop condition is met;

Step 5: output image \mathbf{u} to be reconstructed

图 1 TV-CSCGR 算法的主要步骤

Fig. 1 Main steps of TV-CSCGR algorithm

3 仿 真

3.1 仿真设置

本文选用 2 个代表性的切片, 胸部和盆腔图像作为测试图像, 以证明所提出的 TV-CSCGR 算法的性能。所有实验均采用 Siddon 的射线驱动算法对扇形波束几何中的投影数据进行仿真^[22]。图像

像素为 $256 \text{ pixel} \times 256 \text{ pixel}$, 图像阵列大小为 $20 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$, 投影视图为 64 个, 均匀分布在 360° 上。光源到旋转中心的距离为 40 cm, 探测器中心到旋转中心的距离为 40 cm。使用一个有 512 个单元的平面探测器, 探测器长度为 41.3 cm。

该模型的滤波器 $\{f_k\}$ 直接使用 NIH-AAPM-Mayo 影像数据库下载的外部全采样 CT 数据集进

行训练,训练集中的图像如图 2 所示^[23]。从该数据集中随机选取 10 幅图像,由于 CSC 不能很好地表示图像的低频分量,因此用图像的高频分量训练 CSC,预先确定 32 个大小为 10×10 的滤波器 $\{f_k\}$,图 3 即为全采样 CT 图像训练的滤波器。

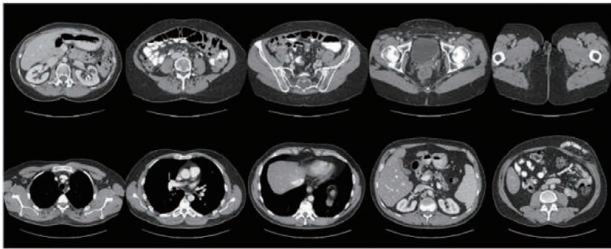


图 2 训练集的图像(显示窗口为 $[-150 \ 250]$)
Fig. 2 Images of training set (display window is $[-150 \ 250]$)

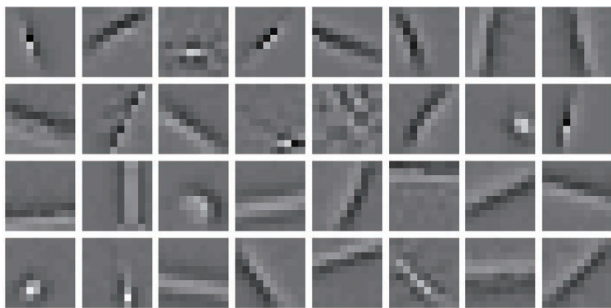


图 3 全采样 CT 图像训练的滤波器
Fig. 3 Training filters by fully sampled CT images
为了评估本文所提出的重建算法的性能,将所

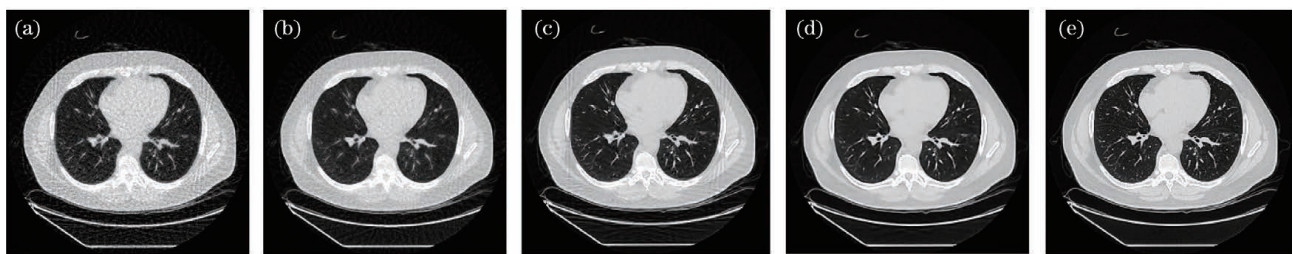


图 4 64 个投影角度时无噪声胸部重建结果(显示窗口为 $[-1000 \ 250]$)。(a) SART-TV;(b) SART-CSC;
(c) SART-CSCGR;(d) TVPI-G;(e) TV-CSCGR

Fig. 4 Reconstruction results of noiseless thoracic image with 64 projection angles (display window is $[-1000 \ 250]$).
(a) SART-TV; (b) SART-CSC; (c) SART-CSCGR; (d) TVPI-G; (e) TV-CSCGR

为了更好地说明所提算法的有效性,计算了重建图像与参考图像之间的 NRMSE 值和 PSNR 值,根据 NRMSE 值、PSNR 值和迭代次数作图。投影角度为 64 个(探测器绕扫描物体一周之后,采取了均匀间隔的 64 个角度的投影值)时,无噪声胸部图像的两种评价指标的曲线变化图如图 5 所示。

为了证明本文提出算法的鲁棒性,在投影数据中加入了泊松噪声,用于比较有噪声情况下 5 种算

提出的 TV-CSCGR 方法与基于 TV 最小化的迭代重建(SART-TV)算法^[24]、基于卷积稀疏编码的重建(SART-CSC)算法^[17]、基于梯度域卷积稀疏编码的重建(SART-CSCGR)算法^[17]、基于 TV 和先验图像引导的图像滤波重建(TVPI-G)方法^[25]进行了比较。为了保证实验的公平性,将 5 种算法的外部迭代次数均设为 50 次,联合代数重建方法(SART)的迭代次数均设为 500 次。其中,TV-CSCGR 算法中的参数设置为 $\mu = 1, \lambda = 0.01, \beta = 0.005, \gamma = 0.005, \rho = 100\gamma + 1, \xi = 0.6$ 。此外,使用峰值信噪比(PSNR)和标准均方根误差(NRMSE)来评估重建的质量。所有算法都在 MATLAB 2019a 上运行[配置 Intel(R) Core(TM) i5 4210M CPU @ 2.60 GHz]。

3.2 胸部重建结果分析

SART-TV、SART-CSC、SART-CSCGR、TVPI-G 和 TV-CSCGR 算法重建的胸部图像结果如图 4(a)~(e)所示。由于投影数据不完整,SART-TV 的结果含有明显的条纹伪影,不能清晰地辨别出肺内的伪影和血管。SART-CSC 和 SART-CSCGR 算法虽然有效地避免了阻塞效应,但引入了一些不希望出现的伪影。TVPI-G 和 TV-CSCGR 方法在抑制伪影方面都有很好的表现,但 TV-CSCGR 在去除伪影的同时保留了更多的细节,特别是对于肺部血管的造影增强表现出更好的性能。

法的重建效果。本实验中将光子数设置为 10^6 。5 种算法的重建结果如图 6 所示,由图 6 可以看出,SART-TV 算法的重建图像出现严重的伪影,该结果在临床上意义不大。SART-CSC 算法和 SART-CSCGR 算法的重建图像仍含有较多伪影,TVPI-G 算法和 TV-CSCGR 算法虽然都消除了大部分的噪声和伪影,但是 TVPI-G 算法的重建图中小血管被模糊化,可以看出所提方法具有更清晰的结构和更

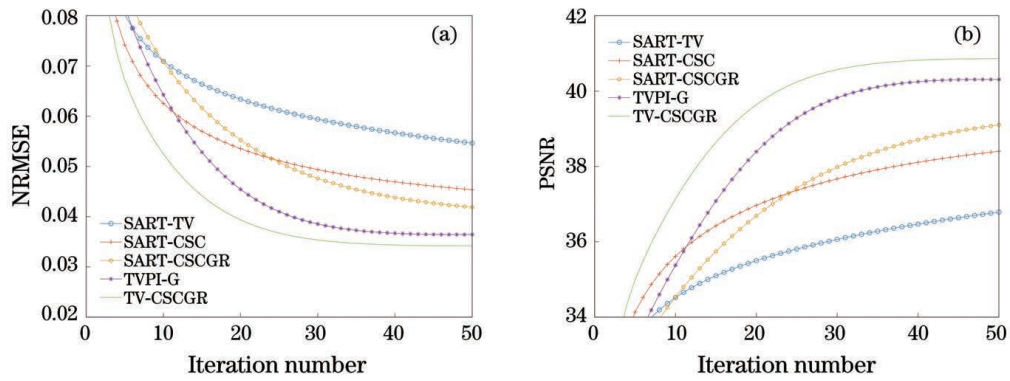


图 5 64 个投影角度时无噪声胸部图像的两种评价指标的曲线变化图。(a) NRMSE;(b) PSNR

Fig. 5 Curve change diagrams of two evaluation indexes of noiseless thoracic image when number of projection angles is 64.

(a) NRMSE; (b) PSNR

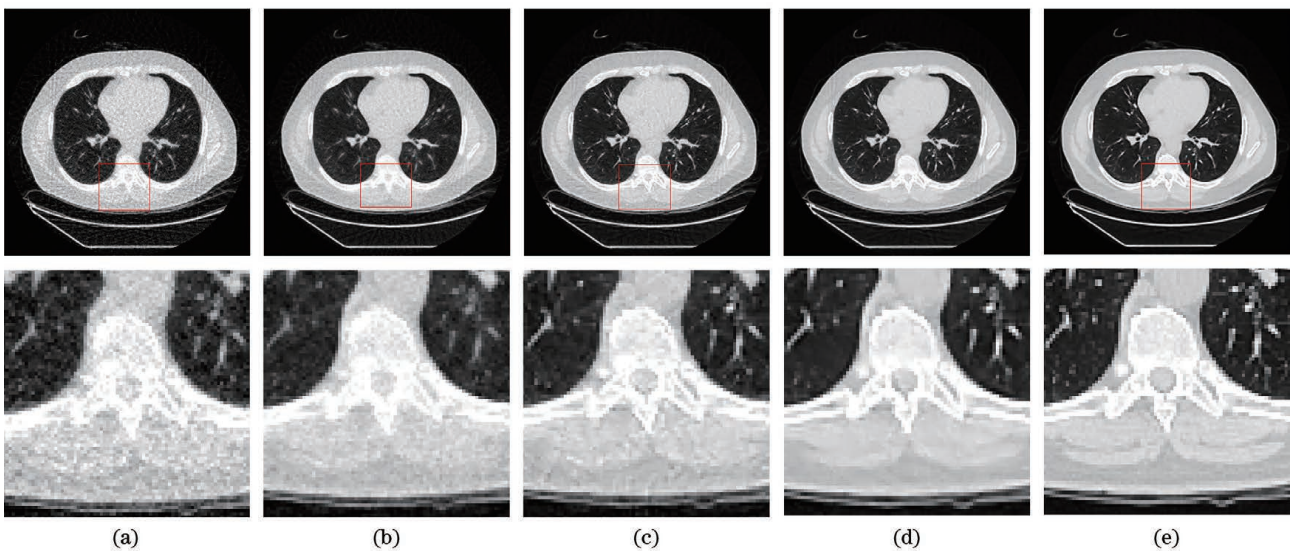


图 6 64 个投影角度时有噪声胸部重建结果(显示窗口为 $[-1000\ 250]$)。 (a) SART-TV; (b) SART-CSC; (c) SART-CSCGR; (d) TVPI-G; (e) TV-CSCGR

Fig. 6 Reconstruction results of thoracic image with noise when number of projection angles is 64 (display window is $[-1000\ 250]$). (a) SART-TV; (b) SART-CSC; (c) SART-CSCGR; (d) TVPI-G; (e) TV-CSCGR

高的分辨率。从方框区域的放大图可以看出 SART-TV 算法的重建图中存在严重的条形伪影和噪声, 脊椎扭曲, SART-CSC、SART-CSCGR 和 TVPI-G 算法虽然可抑制噪声, 但结构细节模糊。与其他方法相比, TV-CSCGR 算法能抑制更多的伪影和噪声, 使组织边缘得到更好的维护。

从图 7 可以看出, 在有噪声情况下, TV-CSCGR 算法的 NRMSE 值最小, PSNR 值最大, 并且随着迭代次数的增加, TV-CSCGR 算法的 NRMSE 值下降速度快于其他 4 种算法, PSNR 值上升速度快于其他 4 种算法, 所以 TV-CSCGR 的重建结果明显好于其他 4 种算法。

3.3 盆腔重建结果分析

为了评估所提出的算法对不同模型的适用性,

分别用上述 5 种算法对有噪声的盆腔图像进行重建, 重建结果如图 8 所示。从重建图和方框区域的放大图均可以看出 5 种重建算法中 SART-TV 算法的重建效果最差, 该方法只能去除一定的条纹伪影, 从重建结果中获得有用的信息很少。SART-CSC 算法和 SART-CSCGR 算法在消除条纹伪影的同时, 降低了空间分辨率, 组织边缘出现不同程度的模糊。TVPI-G 算法因为加入了先验信息, 所以其重建结果比 SART-TV、SART-CSC、SART-CSCGR 算法的重建效果好, TV-CSCGR 算法不仅消除了大部分伪影, 而且在有效去除伪影的同时, 保留了部分区域的更多细节。

图 9 为投影角度为 64 个时 5 种算法对盆腔图像重建的评价参数曲线变化图。从图 9 中可以看

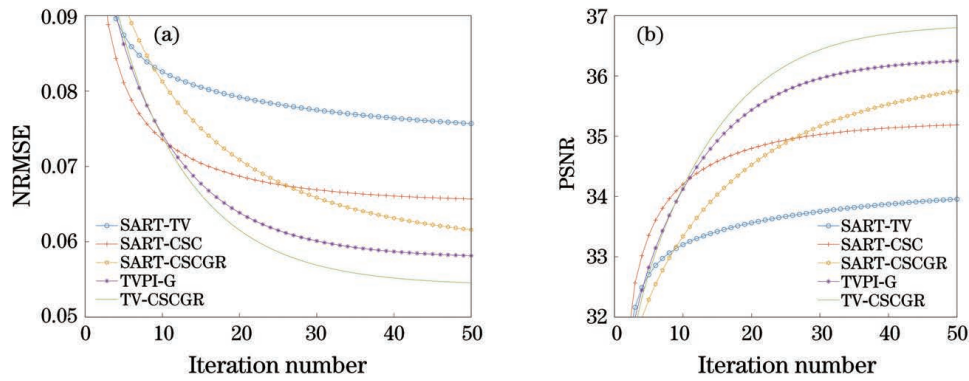


图 7 64 个投影角度时有噪声胸部图像的两种评价指标的曲线变化图。(a) NRMSE;(b) PSNR

Fig. 7 Curve change diagrams of two evaluation indexes of noisy thoracic image when number of projection angles is 64.

(a) NRMSE; (b) PSNR

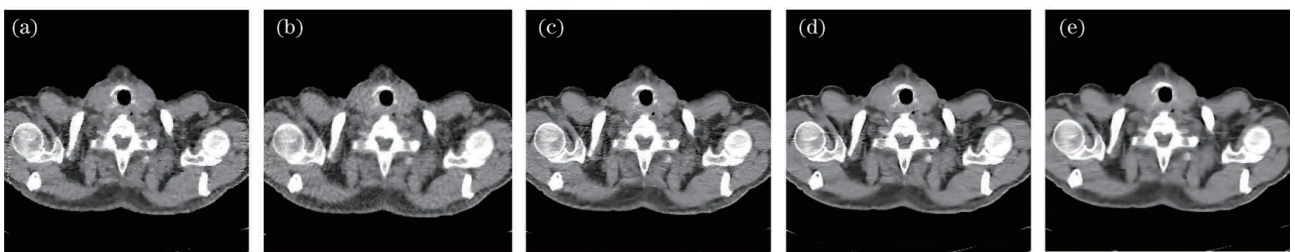


图 8 64 个投影角度时有噪声盆腔重建结果(显示窗口为 $[-1000\ 250]$)。 (a) SART-TV; (b) SART-CSC;

(c) SART-CSCGR; (d) TVPI-G; (e) TV-CSCGR

Fig. 8 Reconstruction results of pelvic image with noise when number of projection angles is 64 (display window is

$[-1000\ 250]$). (a) SART-TV; (b) SART-CSC; (c) SART-CSCGR; (d) TVPI-G; (e) TV-CSCGR

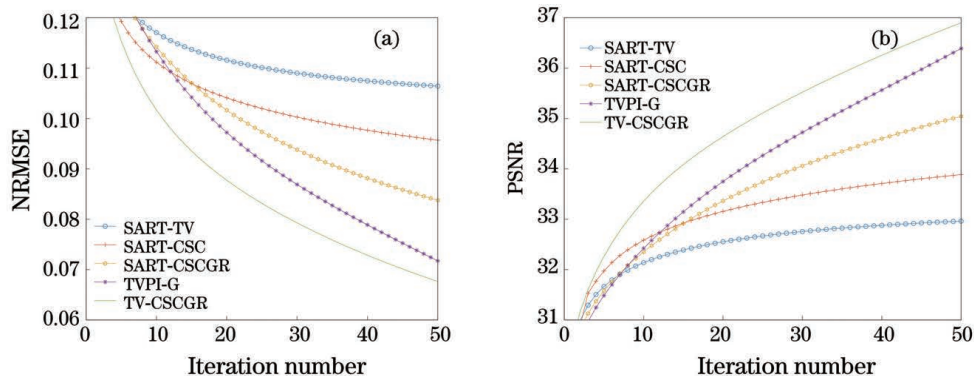


图 9 投影角度为 64 个时有噪声盆腔图像的两种评价指标的曲线变化图。(a) NRMSE;(b) PSNR

Fig. 9 Curve change diagrams of two evaluation indexes of pelvic image with noise when number of projection angles is 64.

(a) NRMSE; (b) PSNR

出,TV-CSCGR 算法在两种评价参数上都取得了最好的结果,并且该算法的收敛速度快于其他 4 种方法,所以 TV-CSCGR 算法的性能总是优于其他 4 种方法。

4 结 论

为了提高稀疏角度 CT 图像重建质量,提出了一种优化图像重建的 TV-CSCGR 算法,通过卷积稀疏编码,保留了图像的重要空间结构,利用 TV

正则项进一步提高算法性能并保留更多的边缘信息。各种实验结果表明,该方法在无噪声和有噪声的情况下都有优越的性能,不仅可以有效减小噪声,而且能够很好地保留图像的边缘和细节特征。后续的研究将针对所提重建算法运算较慢的问题,侧重于设计合理的加速算法来优化本文算法,并尝试将此方法扩展到其他应用,如减少金属伪影,也可以通过深度学习的方法来优化模型。

参 考 文 献

- [1] Brenner D J, Hall E J. Computed tomography: an increasing source of radiation exposure[J]. *The New England Journal of Medicine*, 2007, 357(22): 2277-2284.
- [2] Smith P R, Peters T M, Bates R T, et al. Image reconstruction from finite numbers of projections[J]. *Journal of Physics A: Mathematical, Nuclear and General*, 1973, 6(3): 361-382.
- [3] Li Y S, Chen Y, Hu Y N, et al. Strategy of computed tomography sinogram inpainting based on sinusoid-like curve decomposition and eigenvector-guided interpolation [J]. *Journal of the Optical Society of America A, Optics, Image Science, and Vision*, 2012, 29(1): 153-163.
- [4] Bian J, Siewerdsen J H, Han X, et al. Evaluation of sparse-view reconstruction from flat-panel-detector cone-beam CT[J]. *Physics in Medicine and Biology*, 2010, 55(22): 6575-6599.
- [5] Wang M S, Zhang Y B, Liu R, et al. An adaptive reconstruction algorithm for spectral CT regularized by a reference image [J]. *Physics in Medicine and Biology*, 2016, 61(24): 8699-8719.
- [6] Yu Z C, Leng S, Li Z B, et al. Spectral prior image constrained compressed sensing (spectral PICCS) for photon-counting computed tomography [J]. *Physics in Medicine and Biology*, 2016, 61(18): 6707-6732.
- [7] Sidky E Y, Pan X. Image reconstruction in circular cone-beam computed tomography by constrained, total-variation minimization [J]. *Physics in Medicine and Biology*, 2008, 53(17): 4777-4807.
- [8] Tang S J, Tang X Y. Statistical CT noise reduction with multi-scale decomposition and penalized weighted least square for incomplete projection data [J]. *Proceedings of SPIE*, 2013, 8668: 866839.
- [9] Elbakri I A, Fessler J A. Statistical image reconstruction for polyenergetic X-ray computed tomography [J]. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2002, 21(2): 89-99.
- [10] Xu Q, Yu H Y, Mou X Q, et al. Low-dose X-ray CT reconstruction via dictionary learning [J]. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2012, 31(9): 1682-1697.
- [11] Chen Y, Shi L Y, Feng Q J, et al. Artifact suppressed dictionary learning for low-dose CT image processing [J]. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2014, 33(12): 2271-2292.
- [12] Chen P J, Feng P, Wu W W, et al. Material discrimination by multi-spectral CT based on image total variation and tensor dictionary [J]. *Acta Optica Sinica*, 2018, 38(11): 1111002.
- 陈佩君, 冯鹏, 伍伟文, 等. 基于图像总变分和张量字典的多能谱 CT 材料识别研究 [J]. *光学学报*, 2018, 38(11): 1111002.
- [13] Liu J, Kang Y Q, Gu Y B, et al. Low dose computed tomography image reconstruction based on sparse tensor constraint [J]. *Acta Optica Sinica*, 2019, 39(8): 0811004.
- 刘进, 亢艳芹, 顾云波, 等. 稀疏张量约束的低剂量 CT 图像重建 [J]. *光学学报*, 2019, 39(8): 0811004.
- [14] Chen X Y, Zhang W J, Sun W Z, et al. Super-resolution reconstruction of images based on multi-scale and multi-residual network [J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2020, 57(18): 181009.
- 陈星宇, 张伟劲, 孙伟智, 等. 基于多尺度与多重残差网络的图像超分辨率重建 [J]. *激光与光电子学进展*, 2020, 57(18): 181009.
- [15] Zeiler M D, Krishnan D, Taylor G W, et al. Deconvolutional networks [C] // 2010 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, June 13-18, 2010, San Francisco, CA, USA. New York: IEEE Press, 2010: 2528-2535.
- [16] Xiong J J, Lu H Y, Zhan M H, et al. Convolutional sparse coding in gradient domain for MRI reconstruction [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2017, 43(10): 1841-1849.
- [17] Bao P, Xia W J, Yang K, et al. Convolutional sparse coding for compressed sensing CT reconstruction [J]. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2019, 38(11): 2607-2619.
- [18] Fu L L, Ren C, He X H, et al. Super-resolution reconstruction based on sparse coding and anisotropic filtering [J]. *Information Technology and Network Security*, 2020, 39(3): 23-28.
- 伏伶俐, 任超, 何小海, 等. 基于稀疏编码和各向异性滤波的超分辨率重建 [J]. *信息技术与网络安全*, 2020, 39(3): 23-28.
- [19] Wohlberg B. Convolutional sparse representations with gradient penalties [C] // 2018 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), April 15-20, 2018, Calgary, AB, Canada. New York: IEEE Press, 2018: 6528-6532.
- [20] Boyd S, Parikh N, Chu E, et al. Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers [J]. *Foundations and Trends © in Machine Learning*, 2010, 3(1): 1-122.
- [21] Dias J M B, Figueiredo M A T. A new TwIST: two-step iterative shrinkage/thresholding algorithms for image restoration [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2007, 16(12): 2992-3004.

- [22] Siddon R L. Fast calculation of the exact radiological path for a three-dimensional CT array [J]. *Medical Physics*, 1985, 12(2): 252-255.
- [23] NIH-AAPM-Mayo Clinic. Low dose CT grand challenge [EB/OL]. [2020-04-20]. <https://www.aapm.org/GrandChallenge/LowDoseCT/#>.
- [24] Sidky E Y, Kao C M, Pan X C, et al. Accurate image reconstruction from few-views and limited-angle data in divergent-beam CT [EB/OL]. (2009-04-28) [2020-04-20]. <https://arxiv.org/abs/0904.4495>.
- [25] Shen Z Q, Gong C C, Yu W, et al. Guided image filtering reconstruction based on total variation and prior image for limited-angle CT [J]. *IEEE Access*, 2020, 8: 151878-151887.