

球面波入射二维光栅的泰伯效应

尹东旭, 周素梅*, 谢意木男

西南大学物理科学与技术学院, 重庆 400715

摘要 从理论和实验两方面研究了球面波入射二维光栅的泰伯效应。首先, 分析球面波入射光栅后, 菲涅耳衍射区光场的复振幅分布; 其次, 讨论了泰伯像及分数泰伯像的成像条件, 得出成像位置及成像周期由光源至光栅的距离、光栅至观察面的距离共同决定, 并且球面波入射光栅的泰伯距离等于其周期放大率与平面波入射光栅泰伯距离的乘积。实验结果与理论结果相符合, 在特定位置处可观察到清晰的泰伯像及分数泰伯像。改变光源平面与光栅的距离, 泰伯像按特定规律发生变化。由于光栅周期小于两倍孔径边长、球面波自身发散特性, 分数泰伯像中出现像元交叠现象, 按交叠程度可将交叠图像分为两种分数泰伯像, 即点状离散分布及棋盘分布。本文研究可促进泰伯效应在光学测量及阵列照明等方面的应用。

关键词 衍射; 二维光栅; 泰伯效应; 菲涅耳衍射; 球面波; 像元交叠

中图分类号 O436 **文献标志码** A

doi: 10.3788/LOP202158.1105002

Talbot Effect from Spherical Wave Illuminating on Two-Dimensional Grating

Yin Dongxu, Zhou Sumei*, Xie Yimunan

School of Physical Science and Technology, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract The Talbot effect from the spherical wave illuminating on two-dimensional (2D) grating is investigated theoretically and experimentally. First, the complex amplitude distribution of the light field in the Fresnel diffraction region after the spherical wave is illuminating on the grating is analyzed. Second, the imaging conditions of the Talbot image and fractional Talbot image are discussed. The imaging position and imaging period are determined by the distance from the light source to the grating and the distance from the grating to the observation surface, and the Talbot distance of the spherical wave incident grating is equal to the product of its periodic magnification and the Talbot distance of the plane wave incident grating. Experimental results are consistent with the theoretical results, and the clear Talbot image and fractional Talbot image can be observed at specific location. By changing the distance from the light source plane to the grating, the Talbot image changes according to a specific law. Because the grating period is less than twice the aperture side length and based on the divergent characteristics of the spherical wave itself, the pixel overlap phenomenon appears in the fractional Talbot image. According to the degree of overlap, the overlapped image can be divided into two types (discrete point distribution and checkerboard distribution) of fractional Talbot images. The research in this paper can promote the application of the Talbot effect in optical measurement and array lighting.

Key words diffraction; two-dimensional grating; Talbot effect; Fresnel diffraction; spherical wave; pixel overlap

OCIS codes 050.2770; 050.1960; 070.6760

收稿日期: 2020-10-30; 修回日期: 2020-11-02; 录用日期: 2020-12-02

基金项目: 中央高校基本科研业务费专项基金项目(XDJK2016C123)、重庆市研究生科研创新项目(CYS14052)

*E-mail: sumeizhou@163.com

1 引言

泰伯效应也称自成像效应或无透镜成像现象,即不用透镜、仅靠光的衍射就可观察到周期性物体的自成像现象,1836年由Talbot首次发现^[1]。泰伯效应在光学测量^[2]、波前传感^[3]、相位恢复^[4]、阵列照明^[5]、光刻^[6]等方面得到广泛应用,并且在非线性光学^[7]及量子光学^[8]等领域也有很大的应用价值。迄今为止,各类周期性物体的泰伯效应得到广泛、深入的研究。Zhang等^[9]研究了弯曲光栅的泰伯效应,该研究有助于人们更好地理解弯曲光栅的衍射,并促进光栅泰伯效应在波前传感及光学编码中的应用。Teng等^[10]对二维分形光栅的泰伯效应进行了研究,扩展了周期性物体在信息光学处理和激光测量中的应用。已有研究所用的方法也多样,如韩振海^[11]应用快速傅里叶变换对振幅型二维点阵光栅的泰伯效应进行了理论分析以及数值模拟,简化了二维光栅衍射问题的研究方法。本课题组应用相同方法对方形孔径平面微透镜阵列的泰伯效应进行了理论和实验研究^[12],这为进一步研究方形孔径平面微透镜阵列产生的焦斑阵列的泰伯效应提供了基础。蒋俊等^[13]提出基于傅里叶变换的X射线单光栅相衬成像技术,该研究为X射线单光栅相衬成像的推广应用提供了参考。朱林伟等^[14]提出了一种用阵列光场的倒格矢来研究和描述衍射自成像(或泰伯效应)的方法,给出了用倒格矢表示的一般衍射自成像条件。

相比于平面波,球面波本身携带更丰富的信息,且基于球面波入射光栅所观测到的泰伯效应图像蕴含更多的信息。因此,研究球面波入射光栅的泰伯效应不仅可进一步完善泰伯效应理论,还将促进泰伯效应的实际应用。目前,人们已对球面波入射一维光栅引起的泰伯效应进行了研究,刘前^[15]基于菲涅耳-基尔霍夫衍射理论初步分析了球面波入射一维光栅的类平面波成像。王淮生^[16]从理论方面研究了球面波入射一维光栅的泰伯效应,并给出了泰伯效应及分数泰伯效应的相关解析式。上述理论都没有经相关实验的验证。本文首先分析球面波入射二维光栅引起的菲涅耳衍射区的光场分布,分析泰伯像、分数泰伯像的成像条件;其次通过实验研究了球面波入射光栅的泰伯像、分数泰伯

像,通过改变光源平面至光栅的距离,可观察到不同周期的泰伯像。分数泰伯像中,呈点状离散分布及棋盘分布的分数泰伯像交替出现。最后对实验结果进行分析与讨论。

2 光栅的菲涅耳衍射

2.1 菲涅耳衍射区光场分布

通常二维理想光栅的透射率函数可用傅里叶级数表示为

$$t(x_1, y_1) = \sum_m \sum_n C_m C_n \exp\left(i \frac{2\pi m x_1}{d}\right) \exp\left(i \frac{2\pi n y_1}{d}\right), \quad (1)$$

式中: d 表示光栅周期; C_m 、 C_n 表示傅里叶系数; m 、 n 表示衍射级。

当点光源与二维光栅的距离为 z_0 时,将点光源入射至二维光栅,发散球面波在物平面 x_1 - y_1 的复振幅表达式为^[17]

$$U(x_1, y_1) = \frac{1}{z_0} \exp(ikz_0) \exp\left[\frac{ik}{2z_0}(x_1^2 + y_1^2)\right], \quad (2)$$

式中: k 为波数, $k = 2\pi/\lambda$ 。根据菲涅耳-基尔霍夫衍射理论^[18],光波通过光栅后,距离光栅 z_1 处的复振幅分布为

$$U(x_2, y_2) = A_1 \iint_{-\infty}^{\infty} t(x_1, y_1) \exp\left[\frac{ik(z_1 + z_0)}{2z_1 z_0}(x_1^2 + y_1^2)\right] \times \exp\left[-i \frac{2\pi}{\lambda z_1}(x_1 x_2 + y_1 y_2)\right] dx_1 dy_1, \quad (3)$$

式中: $A_1 = \frac{\exp[ik(z_1 + z_0)]}{i\lambda z_1 z_0} \exp\left[\frac{ik}{2z_1}(x_2^2 + y_2^2)\right]$ 。可

以看出(3)式为紧靠孔径后方的复场与一个二次相位因子乘积的傅里叶变换,代入 $t(x_1, y_1)$ 并进行傅里叶变换,可得

$$U(x_2, y_2) = A_2 \sum_m \sum_n C_m C_n \delta\left(f_x - \frac{m}{d}, f_y - \frac{n}{d}\right) \otimes \exp\left[-i\pi\lambda \frac{z_1 z_0}{z_1 + z_0}(f_x^2 + f_y^2)\right], \quad (4)$$

式中: $A_2 = \frac{\exp[ik(z_1 + z_0)]}{z_1 + z_0} \exp\left[\frac{ik}{2z_1}(x_2^2 + y_2^2)\right]$;

$f_x = \frac{x_2}{\lambda z_1}$; $f_y = \frac{y_2}{\lambda z_1}$; \otimes 表示二维卷积。将(4)式中指数因子展开,并将 f_x 、 f_y 代入,可得

$$U(x_2, y_2) = A_3 \sum_m \sum_n \exp\left(i \frac{2\pi m}{d} \frac{z_0}{z_1 + z_0} x_2\right) \exp\left(i \frac{2\pi n}{d} \frac{z_0}{z_1 + z_0} y_2\right) \exp\left[-i\pi\lambda \frac{z_1 z_0}{z_1 + z_0} \frac{m^2 + n^2}{d^2}\right], \quad (5)$$

$$\text{式中: } A_3 = \frac{\exp[ik(z_1+z_0)]}{z_1+z_0} \exp\left[\frac{ik}{2(z_1+z_0)}(x_2^2+y_2^2)\right].$$

2.2 成像条件

当 z_1, z_0 满足条件 $\frac{z_1 z_0}{z_1+z_0} = \frac{2Nd^2}{\lambda}$, $N=1, 2, 3, \dots$, 即

$$z_1 = \frac{2Nd^2 z_0}{\lambda z_0 - 2Nd^2}, \text{ 则有 } \exp\left[-i\pi\lambda \frac{z_1 z_0}{(z_1+z_0)} \frac{n^2+m^2}{d^2}\right] = 1,$$

观察面上的光场复振幅分布为

$$U(x_2, y_2) = A_3 \sum_m \sum_n \exp\left(i \frac{2\pi m}{d} \frac{z_0}{z_1+z_0} x_2\right) \times \exp\left(i \frac{2\pi n}{d} \frac{z_0}{z_1+z_0} y_2\right). \quad (6)$$

由(6)式可知,忽略常指数项,球面波入射光栅后的光场分布与平面波入射光栅后的光场分布形式相似,但此时泰伯距离由 z_1, z_0 共同决定,并且在求和项中 x_2, y_2 出现 $z_0/(z_0+z_1)$ 的周期修正。 $z_1 = 2Nd^2 z_0 / (\lambda z_0 - 2Nd^2)$ 即为球面波入射光栅的泰伯距离,周期放大率 $M = (z_1+z_0)/z_0 = \lambda z_0 / (\lambda z_0 - 2Nd^2)$, 且 $z_1 = (2Nd^2/\lambda)M$ 。

当 z_1, z_0 满足条件 $\frac{z_1 z_0}{z_1+z_0} = \frac{pd^2}{q\lambda}$, 即 $z_1 = \frac{pd^2 z_0}{q\lambda z_0 - pd^2}$ (p, q 互为质数) 为分数泰伯距离。

3 实验

3.1 实验装置

实验系统如图 1 所示。实验装置包括激光器、滤光片、激光准直器、针孔成像装置、电荷耦合器件 (CCD) 和平行导轨。其中激光器可产生波长为 632.8 nm 的激光;滤光片选用透射率连续变化的反射中性滤光片,通过旋转滤光片控制光量,以防止 CCD 饱和,达到拍摄图像时灰度可调节的目的;激光准直器 (LC-075 型, Newport 公司, 美国) 可以产生直径为 100 mm 的平行激光束;针孔成像装置由三轴空间滤波器 [Metric (P001), Newport 公司, 美国] 和显微镜物镜 (放大倍率为 10, 数值孔径 NA 为 0.25, Newport 公司, 美国) 组成,用于产生球面波;实验样品为 50 mm × 50 mm 大小的二维光栅,周期为 0.4 mm,透光矩孔边长为 0.2 mm; CCD 相机 (像素为 752 pixel × 582 pixel) 的捕获幅面为 4.8 mm × 3.6 mm。实验中,激光经滤光片进入激光准直器,产生平行光束,平行光束垂直入射到针孔成像装

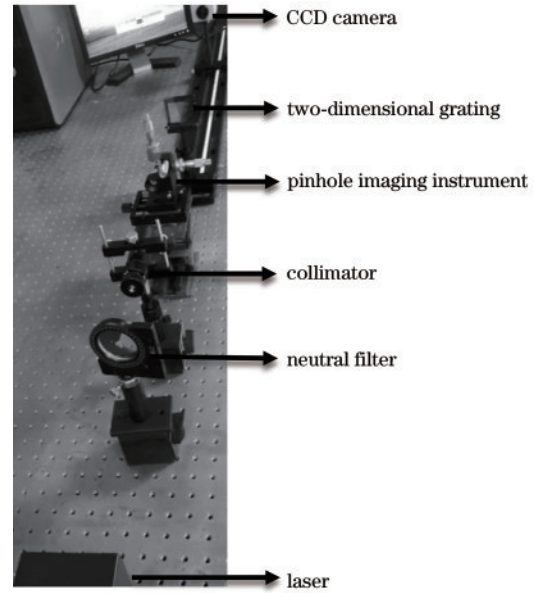


图 1 实验装置

Fig. 1 Experimental setup

置,产生球面波,通过移动平行导轨上的 CCD 相机接收衍射光场的分布信号。

3.2 实验结果

为了得到较好的实验结果且便于观察实验现象,泰伯距离表达式中 N 取 1, 则传统泰伯距离 $z_T = 2Nd^2/\lambda \approx 50.6$ cm。改变光源平面至光栅的距离 z_0 (z_0 的变化以 $0.1z_T$ 为单位), 得到的泰伯成像如图 2 所示。

图 2(a) 为以平面波入射光栅的成像图, 图 2(b)~2(f) 为以球面波入射光栅的成像图。图 2(b) 为 $z_1 \approx 75.9$ cm ($z_0 = 3z_T$) 处的成像图, 周期放大率为 1.5; 图 2(c) 为 $z_1 \approx 101.1$ cm ($z_0 = 2z_T$) 处的成像图, 周期放大率为 2; 图 2(d) 为 $z_1 \approx 113.8$ cm ($z_0 = 1.8z_T$) 处的成像图, 周期放大率为 2.25; 图 2(e) 为 $z_1 \approx 151.7$ cm ($z_0 = 1.5z_T$) 处的成像图, 周期放大率为 3; 图 2(f) 为 $z_1 \approx 177.0$ cm ($z_0 = 1.4z_T$) 处的成像图, 周期放大率为 3.5。

分数泰伯成像图如图 3 所示。图 3(a) 为泰伯子

像 (对应 $\frac{z_1 z_0}{z_1+z_0} = \frac{d^2}{2\lambda}$ 和 $\frac{z_1 z_0}{z_1+z_0} = \frac{3d^2}{2\lambda}$); 图 3(b) 为 $\frac{z_1 z_0}{z_1+z_0} = \frac{3d^2}{5\lambda}$ 处的分数泰伯像, 图 3(c) 为 $\frac{z_1 z_0}{z_1+z_0} = \frac{2d^2}{3\lambda}$ 处的分数泰伯像。

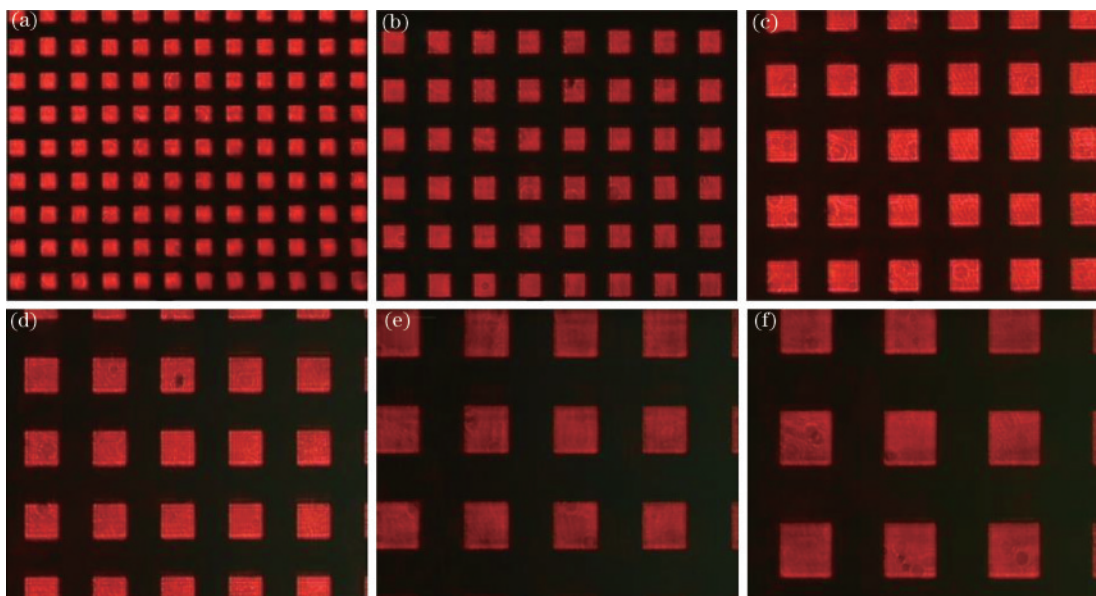


图 2 泰伯成像图。(a)平面波;(b) $z_1 \approx 75.9$ cm;(c) $z_1 \approx 101.1$ cm;(d) $z_1 \approx 113.8$ cm;(e) $z_1 \approx 151.7$ cm;(f) $z_1 \approx 177.0$ cm
 Fig. 2 Results of Talbot imaging. (a) Plane wave; (b) $z_1 \approx 75.9$ cm; (c) $z_1 \approx 101.1$ cm; (d) $z_1 \approx 113.8$ cm; (e) $z_1 \approx 151.7$ cm; (f) $z_1 \approx 177.0$ cm

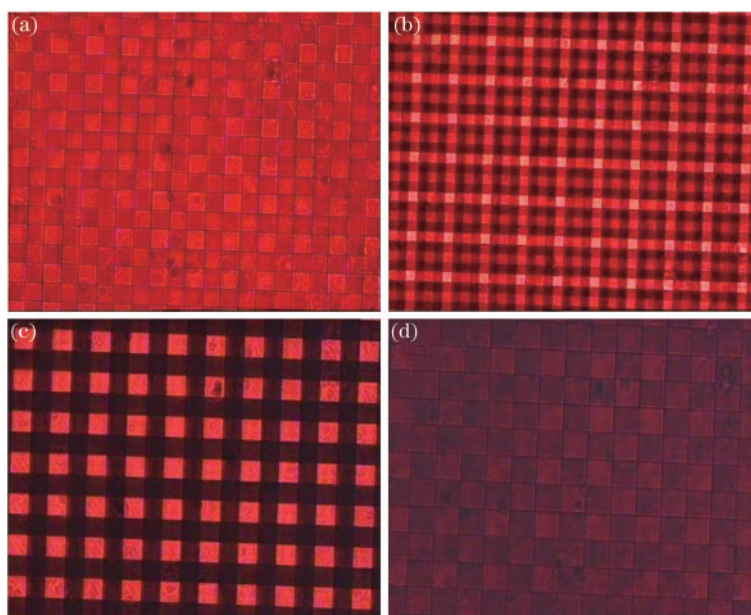


图 3 分数泰伯像($z_0 = 2z_T \approx 101.1$ cm)。(a) $z_1 \approx 14.5$ cm;(b) $z_1 \approx 17.9$ cm;(c) $z_1 \approx 20.2$ cm;(d) $z_1 \approx 60.9$ cm
 Fig. 3 Fractional Talbot images ($z_0 = 2z_T \approx 101.1$ cm). (a) $z_1 \approx 14.5$ cm; (b) $z_1 \approx 17.9$ cm; (c) $z_1 \approx 20.2$ cm; (d) $z_1 \approx 60.9$ cm

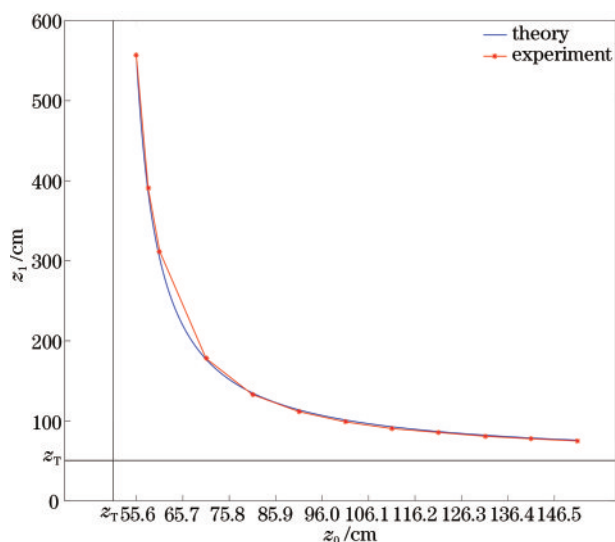
4 结果分析

从实验中观察到如图 2 所示的不同周期的泰伯像。以球面波入射光栅,泰伯距离由光源至光栅的距离、光栅至观察面的距离共同控制。随着光源平面与光栅的距离 z_0 发生变化,泰伯距离 z_1 及周期放大率 M 也随之发生改变,如图 2(b)~(f) 所示。由

表 1 中实验数据可知,泰伯距离 z_1 与周期放大率 M 的比值等于传统泰伯距离 z_T 。 z_1 随 z_0 的变化关系如图 4 所示,二者满足反比例函数关系。当 z_0 在 $(z_T, 75.9)$ 区间时,泰伯距离 z_1 的变化速度较快,测量误差较大;当 z_0 在 $(75.9, \infty)$ 区间时,泰伯距离 z_1 的变化速度较慢,实验测量值与理论计算值总体一致。此外,由图 4 可知,当光源至光栅的距离 z_0 趋近传统

表 1 成像距离 z_1 记录表Table 1 Recording table of imaging distance z_1

z_0 /cm	Theoretical value z_1 /cm	Experimental value z_1 /cm	Magnification M
151.7	75.9	74.9	1.500
131.7	82.2	80.7	1.625
111.3	92.7	90.3	1.833
101.1	101.1	98.7	2.000
91.0	113.8	111.6	2.250
80.9	134.9	132.9	2.667
75.9	151.7	141.7	3.000
70.8	177.0	178.1	3.500
60.7	303.4	312.0	6.000
55.6	556.3	557.4	11.000

图 4 z_1 随 z_0 的变化Fig. 4 z_1 changes with z_0

泰伯距离时,泰伯距离 z_1 趋近于无穷大;当 z_0 趋近于无穷大时,泰伯距离 z_1 趋近于传统泰伯距离。周期放大率 M 的变化趋势与泰伯距离 z_1 相同。受成像距离远、空间杂光、CCD 相机读出噪声的影响,实验中所检测到成像的质量有所下降。

从图 3 的分数泰伯像中可以观察到明显的像元交叠现象,并且像元交叠加强了成像平面的光照强度。像元交叠现象的出现是由球面波自身的放射特性导致的,并且选取的光栅结构参数也会影响像元交叠,即光栅周期大于透光孔径边长、小于两倍透光孔径边长时会出现像元交叠现象。本文选取的光栅周期等于透光孔径边长的两倍,因此出现如图 3(a)、图 3(d) 所示的全明亮区域呈棋盘分布的泰伯子像,如图 3(b)、3(c) 所示的呈离散点状分布的

分数泰伯像交替出现。

5 结 论

从理论和实验上研究了以球面波入射二维光栅产生的泰伯效应,对泰伯像及分数泰伯像的成像条件及成像周期进行了理论分析,发现实验结果与理论分析结果相吻合。实验中观察到光栅在泰伯平面的成像清晰,改变光源平面至光栅的距离,泰伯像成像规律总体不变。光源平面与光栅之间的距离趋近于传统泰伯距离时,泰伯距离及周期放大率为无穷大;光源平面与光栅的距离趋近于无穷大时,成像周期及成像距离与平面波入射光栅情况一致。泰伯距离与周期放大率的比值等于传统泰伯距离时,有利于拓展泰伯效应在光学测量方面的应用。在分数泰伯平面,受球面波自身发散特性及光栅本身结构参数的影响,出现了像元交叠现象,其中呈点状分布及棋盘分布的两种分数泰伯像交替出现。像元交叠加强了分数泰伯平面的光照强度,这可拓展泰伯效应在阵列照明方面的应用。该研究不仅完善了泰伯效应理论,所得实验结果也将拓展泰伯效应的实际应用。

参 考 文 献

- [1] Talbot H F. Facts relating to optical science[J]. Philosophical Magazine, 1836, 9: 401-407.
- [2] Liu T T, Sun H B. Research progress of the optical measurement based on Taber effect[J]. Laser Journal, 2018, 39(11): 34-38.
刘婷婷,孙海滨.应用泰伯效应进行光学测量的研究进展[J].激光杂志,2018,39(11):34-38.
- [3] Podanchuk D, Kovalenko A, Kurashov V, et al. Bottlenecks of the wavefront sensor based on the Talbot effect[J]. Applied Optics, 2014, 53(10): B223-B230.
- [4] Chen S, Li C W, Zhang S J. Phase retrieval based on Talbot effect of Ronchi grating[J]. Acta Optica Sinica, 2018, 38(4): 0405001.
陈升,李常伟,张思炯.基于 Ronchi 光栅 Talbot 效应的相位恢复[J].光学学报,2018,38(4):0405001.
- [5] Mondal P, Kumar M, Tiwari P, et al. Experimental realization of Talbot array illumination for a 2-dimensional phase grating[J]. Journal of Applied Physics, 2016, 120(15): 153103.
- [6] Tong J M, Liu J B, Hu S. Design and analysis of illumination system of Talbot self-imaging lithographic equipment[J]. Laser & Optoelectronics Progress,

- 2017, 54(8): 082201.
佟军民, 刘俊伯, 胡松. 基于塔尔伯特自成像光刻机的照明系统设计与分析[J]. 激光与光电子学进展, 2017, 54(8): 082201.
- [7] Zhang Y, Wen J, Zhu S N, et al. Nonlinear Talbot effect[J]. Physical Review Letters, 2010, 104(18): 183901.
- [8] Sanz A S, Miret-Artés S. A causal look into the quantum Talbot effect[J]. The Journal of Chemical Physics, 2007, 126(23): 234106.
- [9] Zhang W, Wang J H, Cui Y W, et al. Talbot effect of curved grating[J]. Optics Communications, 2015, 341: 245-251.
- [10] Teng S Y, Wang J H, Li F R, et al. Talbot image of two-dimensional fractal grating[J]. Optics Communications, 2014, 315: 103-107.
- [11] Han Z H. Experimental study on Talbot effect of two dimensional amplitude lattice grating[J]. Laser Journal, 2016, 37(6): 64-66.
韩振海. 振幅型二维点阵光栅 Talbot 效应的实验研究[J]. 激光杂志, 2016, 37(6): 64-66.
- [12] Zhang B H, Zhou S M, Yang X M, et al. Talbot effect of square-aperture microlens array[J]. Acta Optica Sinica, 2016, 36(5): 0523001.
张宝昊, 周素梅, 杨晓铭, 等. 方形孔径微透镜阵列的泰伯效应[J]. 光学学报, 2016, 36(5): 0523001.
- [13] Jiang J, Yang J, Zong F K, et al. Theoretical analysis and elimination of moiré artifacts based on single grating phase-contrast imaging[J]. Acta Optica Sinica, 2020, 40(8): 0807001.
蒋俊, 杨君, 宗方轲, 等. 单光栅相衬成像莫尔伪影的理论分析与消除[J]. 光学学报, 2020, 40(8): 0807001.
- [14] Zhu L W, Hong Z P, Guo C S. Reciprocal vector theory for analysis of the self-imaging of two dimensional periodic objects[J]. Acta Photonica Sinica, 2008, 37(5): 977-982.
朱林伟, 洪正平, 国承山. 二维阵列光场衍射自成像效应的倒格矢分析[J]. 光子学报, 2008, 37(5): 977-982.
- [15] Liu Q. The images of similar plane wave among Talbot images of spherical wave illumination[J]. Journal of Inner Mongolia Polytechnic University, 1995, 14(1): 13-16
刘前. 球面波照明时的 Talbot 成像中的类平面波成像[J]. 内蒙古工业大学学报(自然科学版), 1995, 14(1): 13-16.
- [16] Wang H S. Fractional Talbot effect of gratings under spherical wave illumination[J]. Journal of Sichuan Ordnance, 2010, 31(12): 147-150.
王淮生. 在球面波照射下光栅分数 Talbot 效应特性[J]. 四川兵工学报, 2010, 31(12): 147-150.
- [17] Yu X Y. Information optics[M]. Guangzhou: Sun Yat-sen University Press, 2015: 166-168.
余向阳. 信息光学. 广州: 中山大学出版社, 2015: 166-168.
- [18] Goodman J W. Introduction to Fourier optics[M]. Qin K C, Liu P S, Chen J B, et al. Transl. 6th ed. Beijing: Electronic Industry Press, 2011: 46-49.
约瑟夫·古德曼. 傅里叶光学导论[M]. 秦克诚, 刘培森, 陈家璧, 等, 译. 6 版. 北京: 电子工业出版社, 2011: 46-49.