

单像素成像及其概率统计分析综述

肖许意, 陈刘雅, 张学智, 王翀, 兰瑞君, 任承, 曹德忠*

烟台大学光电信息科学技术学院, 山东 烟台 264005

摘要 单像素成像的图像复原依赖于单像素接收信号和调制光源的关联, 包括计算鬼成像和压缩感知成像两种方案。其中, 计算鬼成像利用光源和单像素信号之间的高阶强度关联函数复原图像, 而压缩感知成像采用优化压缩感知算法复原图像。单像素成像实验采用的光源种类繁多, 既包括热光、X 射线、电子、中子、单光子源等物理光源, 也包括由空间光调制器和数字微镜等系统调制的人工光源。这些光源遵从不同的统计概率分布, 照明物体的光场强度可看作统计独立的连续或离散随机变量, 也被称为参考信号。单像素信号是所有参考信号的线性组合, 根据光源的统计性质确定了参考信号与单像素信号之间的联合统计概率分布。此外, 还研究了参考信号概率分布函数对关联鬼成像图像质量的影响, 为单像素成像提供了物理和统计理论基础。

关键词 图像处理; 单像素成像; 鬼成像; 密度分布函数; 可见度; 信噪比

中图分类号 O436

文献标志码 A

doi: 10.3788/LOP202158.1011018

Review on Single-Pixel Imaging and Its Probability Statistical Analysis

Xiao Xuyi, Chen Liuya, Zhang Xuezhi, Wang Chong, Lan Ruijun, Ren Cheng,
Cao Dezhong*

School of Opto-Electronic Information Science and Technology, Yantai University, Yantai, Shandong 264005, China

Abstract The image restoration of single-pixel imaging relies on the connection between the received signal and the modulated light source, including computational ghost imaging and compressed sensing imaging. Computational ghost imaging uses a high-order intensity correlation function between the light source and the single-pixel signal to restore the image, while compressed sensing imaging uses an optimized compressed sensing algorithm to restore the image. Typically, single-pixel imaging experiments use a wide variety of light sources, including physical light sources, such as thermal light, X-rays, electrons, neutrons, and single photon sources, and artificial light sources modulated by spatial light modulators and digital micromirror systems. These light sources follow different statistical probability distributions, and the light field intensity of the illuminated object can be considered as a statistically independent continuous or discrete random variable, also known as a reference signal. The single-pixel signal is a linear combination of all reference signals. The joint statistical probability distribution between the reference signal and the single pixel signal is determined according to the statistical properties of the light source. In addition, we investigate the effects of the probability distribution functions on the image quality, providing theoretical bases of physics and statistics for single-pixel imaging.

Key words image processing; single-pixel imaging; ghost imaging; density distribution function; visibility; signal-to-noise ratio

OCIS codes 100.3020; 110.3010; 030.6600

收稿日期: 2021-01-29; 修回日期: 2021-03-04; 录用日期: 2021-03-25

基金项目: 国家自然科学基金(11674273)

* E-mail: dzcao@ytu.edu.cn

1 引 言

传统光学成像是指物体发出的光束经光学系统成像后,再被感光介质记录的过程。普通光学成像系统采用二维(2D)介质记录图像信息,如光学胶片、CCD 芯片。Takhar 等^[1-2]基于压缩感知(CS)提出了一种单像素成像方法,Shapiro^[3]基于热光强度关联提出了计算鬼成像(CGI)理论模型,之后,Bromberg 等^[4]通过实验验证了该模型的可行性。单像素成像的标志性技术特点是只包含一个感光像素器件,光源或物光信号的空间分布经时空调制后,被单像素感光器件接收。但单像素器件仅起到收集光强的作用,采集的信号不包含任何空间分布,没有空间分辨能力,无法直接进行成像。由于单像素信号与参考信号(随机空间结构光场)存在物理关联,因此,可利用 CS 优化算法^[5-6]或高阶关联函数^[7-12]复原图像。

CS 可以突破奈奎斯特采样极限,对信号进行欠采样,然后进行图像重构,实现单像素成像^[1]。Candès 等^[5]提出了一种从高度不完备频率信息中重建信号的方案,Donoho^[6]提出了一种可稀疏化信号的 CS 重建算法,随后,Candès 等^[13]对 CS 重建算法进行了对比分析。Chan 等^[14-15]研究了基于 CS 的 THz 单像素成像,在位置空间和傅里叶空间进行随机调制,利用优化的 CS 算法及相位恢复算法重构图像。Shrekenhamer 等^[16]采用半导体光学激发制备了空间 THz 波调制器,实现了实时高保真的 THz 波单像素成像,输出图像的频率为 0.5 Hz。Radwell 等^[17]研究了红外可视化单像素显微镜,成像帧频可达 0.6~10 Hz。

Klyshko^[18]研究了量子纠缠光子的空间关联行为,Pittman 等^[19]通过实验研究了纠缠光子的鬼成像,Strekalov 等^[20]通过实验研究了纠缠光子的鬼干涉效应。在鬼成像实验中,存在量子纠缠的一对光子分别进入物光系统和参考系统,物光光子被桶探测器(Bucket detector)接收,参考光子进入成像系统后由空间分辨探测器测量。桶探测器没有空间分辨本领,参考光场与物体也没有直接关联,导致两路探测信号均不能独立对物体进行成像。将桶探测物光信号和参考信号进行符合计数测量,就能通过纠缠光子高阶关联函数获取物体的图像信息。Bennink 等^[21-22]利用经典随机光源观察到鬼成像和鬼干涉效应;Cheng 等^[7]在 X 射线傅里叶成像研究中提出了一种热光关联成像算法;Gatti 等^[8]研究了

热光关联成像和关联干涉现象;Wang 等^[23-24]提出了一种基于亚波长干涉的热光成像算法,并通过实验验证了该算法的可行性;Cao 等^[12]研究了热光关联成像的共轭成像几何行为;Zhang 等^[11]实现了真热光的关联成像实验;Cai 等^[25]从黑体辐射理论角度研究了热光关联的高阶相干函数,这些原创性研究为热光关联效应(高阶关联干涉与关联成像)的研究奠定了基础。

热光关联成像原理简单,近年来得到了人们广泛的研究,而 CS 单像素成像借助优化算法也可以提高成像质量。从系统结构来看,热光 CGI 与 CS 成像方案非常相似,CS 中的测量矩阵就是 CGI 中的参考信号,都是具有特定随机性质的空间结构光场。Katz 等^[26]利用 CS 原理研究了热光 CGI,以较少的测量数据获得了高质量的图像;Luo 等^[27]研究了热光关联的 Talbot 自成像效应;Li 等^[28]研究了运动物体的热光关联成像。非定域关联成像在随机介质^[29]和大气湍流^[30-32]中的应用研究也已逐步展开,如 Liu 等^[33]研究了热光关联层析成像,Tian 等^[34-36]研究了荧光关联成像,Liu 等^[37-38]研究了快速第一光子鬼成像和光子受限单像素成像,Xu 等^[39]研究了空间结构光照明下的快速 CGI,Zhou 等^[40]研究了迭代鬼成像的边缘测量,Sun 等^[41-42]研究了二阶相干归一化鬼成像方案和基于运动目标追踪的渐变鬼成像方案,Pan 等^[43]完成了啁啾调幅外差鬼成像的实验研究,Fu 等^[44]研究了基于时间相关单光子计数的三维(3D)成像,Ye 等^[45]研究了基于主动非视见成像的 CS 技术。Luo 等^[46-47]提出了一种基于逻辑条件阈值法的正负条件对应鬼成像(PNCCGI)方法,该方法不需要考虑单像素信号的具体量值,而是通过判断单像素信号与某一阈值的大小进行成像。如果单像素信号高于阈值,则对相应的参考信号进行平均运算,得到正像;反之,得到负像。PNCCGI 的实验和计算都非常简单,相关成像技术的研究也取得了突破性进展^[48-50],但该方法的成像机制不明确^[51],因此,需要建立单像素成像的统计概率模型,为单像素成像提供理论支撑。

本文首先介绍了单像素成像中的 CS 和 CGI 两个方案,并对比了两个方案的实验装置、信号调制和图像恢复原理。然后介绍了 PNCCGI 的研究现状和理论挑战,建立了单像素成像的概率论模型,分别提出了一种基于连续随机变量和离散随机变量的单像素成像理论分析,并提出了一种极弱光单像素成像和分数阶关联成像方案。最后对单像素成像的前

沿发展进行了分析与讨论,为研究 CS 和 CGI 的基本原理、发展历程及融合提供了理论基础。

2 单像素成像的实现方案

单像素成像的原理性实验需要空间分布可控的光源,光学控制系统包括数字微镜器件(DMD)、数字光处理器(DLP)和空间光调制器(SLM)等光学器件。

2.1 基于压缩感知的单像素成像

基于 CS 的单像素成像一般采用后调制方法,即成像系统将物体成像在光学调制器件上,成像光场经空间调制后,被单像素探测器接收,如图 1 所

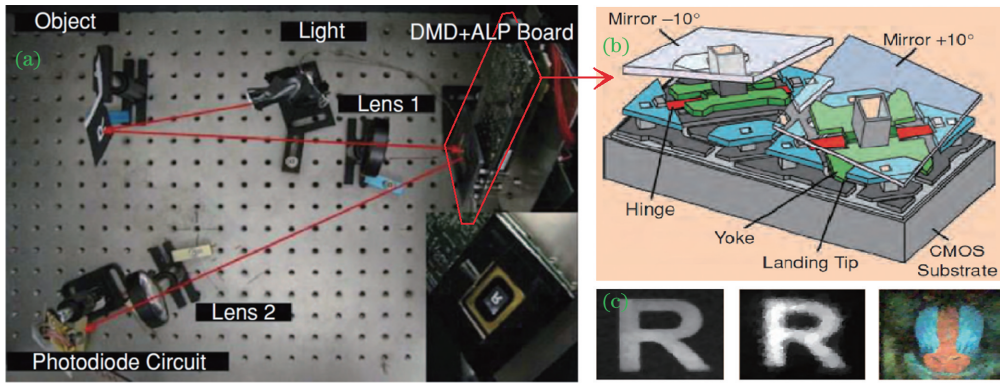


图 1 基于 CS 的单像素成像。(a) 成像系统;(b) DMD 的结构;(c) 重构图像^[1-2]

Fig. 1 Single-pixel imaging based on CS. (a) Imaging system; (b) structure of the DMD; (c) reconstructed image^[1-2]

考虑到物体和 DMD 均为一维信号,假设物体分布由 $N \times 1$ 的列向量 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$ 表示,其中, N 为物体的像素数目。DMD 产生的一系列空间随机调制信号构成测量矩阵 $\Phi: \{\phi_m\}_{m=1}^M$, 其中, M 为测量次数。单像素信号可表示为

$$\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x}, \quad (1)$$

式中, \mathbf{y} 为 $M \times 1$ 的列向量。由于 DMD 的空间调制信号是随机统计信号,很难直接对(1)式进行求解。如果物体分布是可稀疏表示,即 $\mathbf{x} = \Psi \mathbf{s}$, 则

$$\mathbf{y} = \Phi \Psi \mathbf{s}, \quad (2)$$

式中, Ψ 为 $N \times N$ 的标准正交变换矩阵, \mathbf{s} 为稀疏信号,大部分元素值为零。当测量次数小于原图像像素数,即 $M < N$ 时,可以找到满足(2)式的解 \mathbf{s} 。此时,图像的恢复变成解 l_0 范数或 l_1 范数的优化问题,可表示为

$$\min_x \|\mathbf{x}\|_0 \text{ subject to } \mathbf{y} = \Phi \mathbf{x}, \quad (3)$$

$$\min_x \|\mathbf{x}\|_1 \text{ subject to } \mathbf{y} = \Phi \mathbf{x}, \quad (4)$$

式中, $\|\dots\|_0$ 和 $\|\dots\|_1$ 分别为 l_0 范数和 l_1 范数。近年来,基于傅里叶正交基^[52]和 Walsh-Hadamard 正交基^[53]的单像素成像方法相继被提出,基于标准正

交变换矩阵的 CS 图像恢复算法也得到了快速发展。

示。图 1(a)为 Takhar 等^[1]设计的实验装置,被激光照明的物体经过成像透镜投影到空间光学调制系统。空间光学调制系统由 DMD 和附属光调制器(ALP)组成,如图 1(b)所示。DMD 的分辨率为 $1024 \text{ pixel} \times 768 \text{ pixel}$,每个微镜均可在 $\pm 12^\circ$ 两个方向反射光束,单像素探测器放置在 $\pm 12^\circ$ 方向收集光强。单像素探测器的核心部件是一个光学二极管,其前面的透镜仅起到会聚光束的作用。由于单像素探测器没有空间分辨本领,获得的信号本身无法直接进行成像。图 1(c)的实验结果是根据相互关联的 DMD 调制信号和单像素信号,利用 CS 优化成像算法重构的图像。

2.2 计算鬼成像

Shapiro^[3]提出的 CGI 方案原理如图 2(a)所示,其中,连续波(cw)激光经空间光调制器后,形成空间分布确定可控的激光散斑并照射到物体上。从物体出射的光被桶探测器接收后,通过桶探测信号和调制信号间的高阶关联函数给出恢复图像。Silberberg 等^[4]研究的 CGI 实验装置如图 2(b)所示,

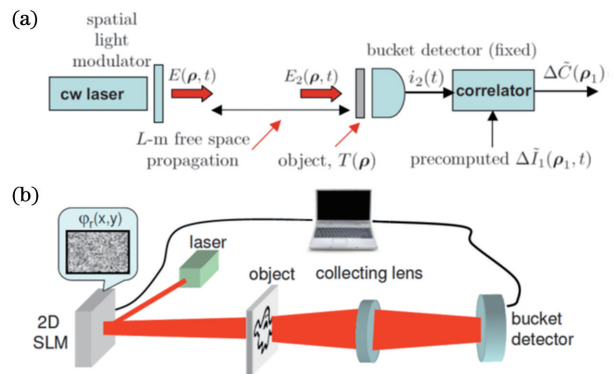


图 2 CGI 示意图。(a) 原理示意图^[3];(b) 实验装置图^[4]

Fig. 2 Diagrams of the CGI. (a) Principle diagram^[3]; (b) experimental setup^[4]

其中,连续波激光经二维 SLM 编码调制后,形成分布为 $\varphi_r(x, y)$ 的随机光场 $E(\boldsymbol{\rho}, t)$, 其中, $\boldsymbol{\rho}, t$ 分别为空间位置、时间。随机光场经自由传播形成照明光场 $E_2(\boldsymbol{\rho}, t)$ 并照明物体 $T(\boldsymbol{\rho})$, 物光通过透镜会聚至桶探测器, 最后由电脑计算出桶探测信号 $i_2(t)$ 和 SLM 调制信号 $\Delta\tilde{I}_1(\boldsymbol{\rho}_1, t)$ 的高阶关联函数 $\Delta\tilde{C}(\boldsymbol{\rho}_1)$, 并恢复出图像。

假设照明物体的随机光场强度分布为 $I(\boldsymbol{r})$, 则桶探测信号 $I_b = \int d\boldsymbol{r} I(\boldsymbol{r}) T(\boldsymbol{r})$ 。其中, \boldsymbol{r} 为空间位置坐标, $T(\boldsymbol{r})$ 为物体空间分布。桶探测信号 I_b 和 SLM 调制信号 $I(\boldsymbol{r})$ 的高阶关联函数可表示为

$$G^{(2)}(\boldsymbol{r}) = \langle I_b I(\boldsymbol{r}) \rangle = k I_0^2 + I_0^2 T(\boldsymbol{r}), \quad (5)$$

式中, $\langle \cdot \rangle$ 为系综平均, k 为图像的非零像素数目。假设调制信号为负指数分布的赝热光信号, 各点系综平均值为常数。桶探测信号的系综平均 $\langle I_b \rangle = k \times I_0$ 。可以发现, 热光鬼成像总是携带常数背景, 因此, 鬼成像的可见度为

$$V = \frac{1}{1 + 2k}. \quad (6)$$

可以发现, CGI 的高阶关联函数恢复图像的可见度总是小于 $1/3$ 。Silberberg 等^[4,26] 先后实现了 CGI^[4] 和 CS 成像^[26], 结果如图 3 所示, 其中, 图 3(a)和图 3(b)是鬼成像(GI)得到的图像, 图 3(c)和图 3(d)是 CS 成像的结果。可以发现, CS 单像素成像是成像之后进行空间调制, 采用被动光源; CGI 是用调制光场照明物体, 采用主动光源。在成像效果上, CGI 中高阶关联函数法输出图像的质量较差, 而基于 CS 得到的图像质量较高, 原因是 CS 单像素

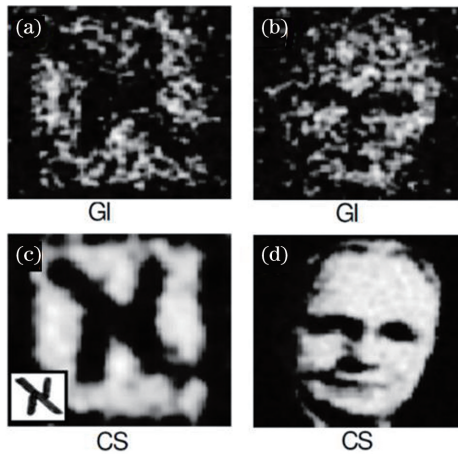


图 3 CGI 与 CS 成像的结果。(a)~(b) CGI 的结果; (c)~(d) CS 成像的结果^[26]

Fig. 3 Results of CGI and CS imaging. (a)~(b) Results of the CGI; (c)~(d) results of the CS imaging^[26]

成像采用了优化算法。但两种方案的照明光源、调制方式和单像素采集都可以相互交换, 互通有无。CS 成像决定了单像素成像的应用前景, CGI 能表明单像素成像的物理本质, 二者在原理和技术等方面相互促进、相互融合。

3 正负条件对应鬼成像理论

鬼成像的图像恢复依赖于单像素信号与参考信号高阶关联函数的计算, 但 PNCCGI 不需要计算高阶关联函数。在 PNCCGI 方案中, 将单像素信号按量值大小进行分类, 如以平均值为阈值将单像素信号分成大于和小于平均值两类, 再将不同类单像素信号对应的参考信号进行算数平均, 从而恢复出物体信息。该方案只需对部分参考信号进行平均计算, 无需进行高阶关联函数的计算和复杂算法的迭代计算。

3.1 正负条件对应鬼成像

PNCCGI 的实验装置与经典鬼成像实验装置相同, 文献[46]中对应鬼成像的系统装置如图 4 所示。其中, 热光被分束器(BS)分成两束, 透射光(物光)照明物体后被桶探测器 D_B 在 x_B 处接收, 反射光(参考光)由空间分辨探测器 D_R 在 x_R 处测量。物体和探测器 D_R 到 BS 的距离相等, 即 $d_B = d_R$ ^[12]。

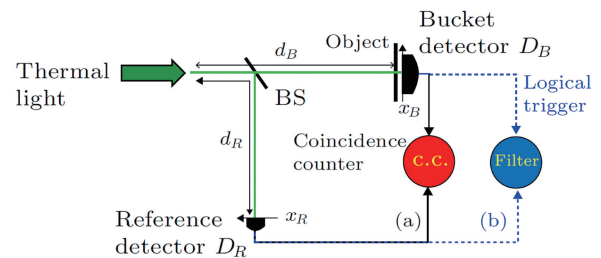


图 4 PNCCGI 的实验装置^[46]

Fig. 4 Experimental device for PNCCGI^[46]

图 5(a)为按测量时间(t)排列的单像素信号 I_B , 图 5(b)为以平均值为阈值将单像素信号分为大于和小于平均值的两个部分的概率 $P(I_B)$ 随桶探测信号的变化量 $\Delta I_B / \bar{I}_B$ 。图 5(c)为以平均值为阈值的单像素信号得到的图像, 低于阈值的单像素信号对应负像, 高于阈值的单像素信号对应正像, 图 5(d)为以三个阈值将单像素信号分为 4 组 (P_1, P_2, P_3, P_4)。图 5(e)是将单像素信号按照三种分类方法得到的鬼成像, 单像素信号的 4 组数量分别为 N_1, N_2, N_3 和 N_4 , 第 1 行四张图像对应的 $N_1 \approx N_2 \approx N_3 \approx N_4$, 第 2 行四张图像对应的 $N_1 : N_2 : N_3 : N_4 \approx 0.5 : 4.5 : 4.5 : 0.5$, 第 3 行四张

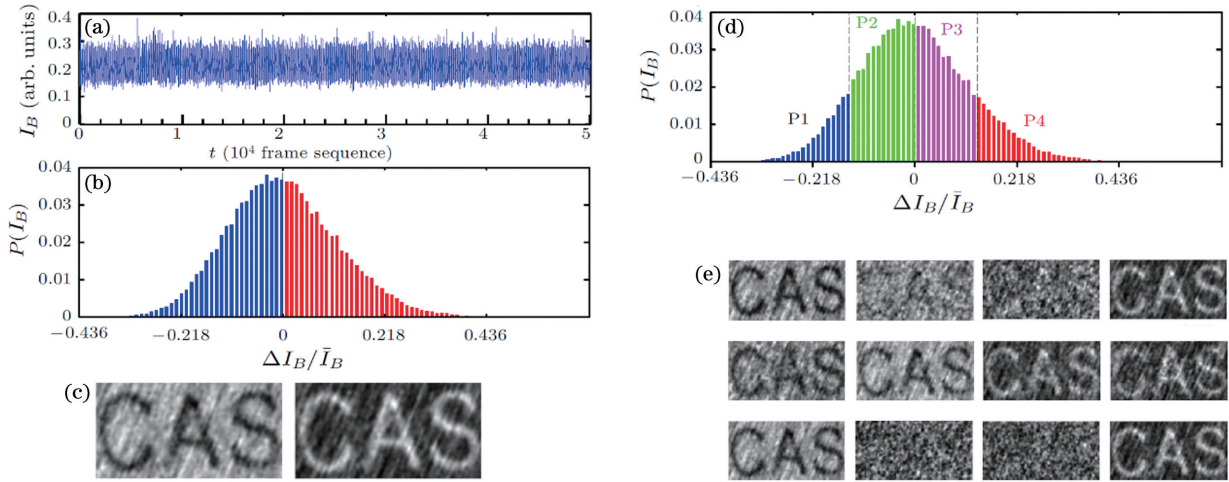


图 5 PNCCGI 的结果。(a) 单像素信号; (b) 单像素信号的统计直方图; (c) 以平均值为阈值得到的恢复图像; (d) 单像素信号的 4 分组; (e) 4 分组对应的鬼成像^[46]

Fig. 5 Results of the PNCCGI. (a) Single-pixel signal; (b) statistical histogram of single-pixel signal; (c) recovered image obtained by thresholding the average value; (d) 4 groups of single-pixel signal; (e) ghost imaging corresponding to 4 groups^[46]

图像对应的 $N_1 : N_2 : N_3 : N_4 \approx 4 : 1 : 1 : 4$, 其中, 单像素信号低于平均值大概率会得到负像, 高于平均值大概率会得到正像。

3.2 理论挑战

目前, PNCCGI 技术的成像机制还不明确, 虽然文献[46-47]对 PNCCGI 的单像素信号分类和成像进行了详细论述, 但没有给出 PNCCGI 的严格理论证明, 即未给出正像和负像的成因以及图像质量随相应参数的变化规律。Wu 等^[54]在国际国内会议上分享了当时最新的实验结论, Wen^[51]给出了一些有益的理论探索, 但这些尝试局限于高阶关联函数和单像素信号分组的讨论, 仍需进行深入分析和研究。因此, 本课题组从概率论角度研究了单像素成像, 分析了参考信号和单像素信号的统计分布规律, 并建立了单像素信号和参考信号之间的联合概率密度分布函数^[55]。该方法不仅能解释鬼成像中单像素信号和参考信号之间的高阶关联, 还能对 PNCCGI 的正像和负像给出合理解释, 阐明 PNCCGI 的物理机制^[50], 基于该理论, 还发展了基于分数阶矩^[56]和代数函数矩^[57]的鬼成像及暗场鬼成像^[58]。并将单像素鬼成像的概率理论从连续随机变量推广至离散随机变量^[59], 讨论了以离散随机变量作为参考信号的单像素鬼成像的成像机制和图像质量。

4 连续变量光源照明的单像素成像

在经典统计光学中, 热光场各模式间统计独立、

相位随机, 因此, 可将热光强度作为满足负指数分布的随机变量。在热光关联单像素成像方案中, 像面任一像素受到的照明强度概率密度分布函数可表示为 $p(I) = \frac{1}{I_0} \exp\left[-\frac{I}{I_0}\right]$, 其中, I 为参考信号, I_0 为参考信号的平均值。函数 $p(I)$ 可作为参考信号的统计分布, 单像素信号是有限个参考信号之和, 也可以看成满足特定统计分布的随机变量。因此, 需要建立单像素成像的连续变量概率统计模型, 计算单像素信号的概率密度分布函数以及单像素信号和参考信号之间的联合概率密度分布函数, 研究极弱光条件下的 PNCCGI。

4.1 单像素成像的概率统计理论

为了进行简便讨论, 给出了 3 个假设: 1) 物体和图像的空间离散化假设, 即认为物体和图像是由若干个空间离散单元(像素)构成的; 2) 像素间统计独立假设, 即各个像素物光之间相互统计独立; 3) 二值物体假设, 即物体灰度仅有 0 和 1 两个取值。在该假设条件下, 参考信号和物体均可表示为空间离散变量 I_i 和 T_i , 其中, $i = 1, 2, 3, \dots, N$, 对于二值物体 $T_i = 0$ 或 1, 单像素信号 $I_b = \sum_{i=1}^N I_i T_i$ 。显然, $T_i = 0$ 的部分对单像素信号没有贡献, 因此, 只需考虑 $T_i = 1$ 的部分对单像素信号的贡献, 得到单像素信号的概率密度分布函数为

$$P_b^{(k)}(I_b) = \frac{I_b^{k-1}}{(k-1)! I_0^k} \exp\left[-\frac{I_b}{I_0}\right], \quad (7)$$

式中, k 为物体(图像)灰度值 $T_i = 1$ 的像素数目。可以发现,(7)式中单像素信号的统计分布不再满足负指数分布,而是平均值为 kI_0 、方差为 kI_0^2 的伽马分布。

若单像素信号是 k 个参考信号之和,对于灰度值为 1 的某个像素,其参考信号必定包含在单像素信号内。即在单像素信号内部,可将参考信号分为指定研究像素的参考信号和其他参考信号。这两类参考信号相互统计独立,因此,单像素信号和指定参考信号之间的联合概率密度分布函数为

$$P(I_b, I_i) = \frac{(I_b - I_i)^{k-2}}{(k-2)! I_0^k} \exp\left[-\frac{I_b}{I_0}\right] \quad (8)$$

可以发现,单像素信号和参考信号之间存在物理关联,彼此不再统计独立。如果参考信号恰好对应于物体灰度为零($T_i = 0$)处,则单像素信号和参考信号之间完全统计独立,概率密度函数 $P'(I_b, I_i) = P_b^{(k)}(I_b) p(I_i)$ 。单像素信号的概率密度分布函数和单像素-参考信号联合概率密度分布函数也验证了单像素信号和参考信号的统计关联。

4.2 单像素信号与参考信号的高阶关联函数

在经典 CGI 中,单像素信号与参考信号的高阶关联函数可通过高斯矩定理计算^[23],当二者之间的联合概率密度分布函数确定后,通过概率平均计算的高阶关联函数可表示为

$$\langle I_b I_i \rangle_1 = \int_0^\infty dI_b \int_0^{I_b} dI_i I_b I_i \times P(I_b, I_i) = (k+1)I_0^2, \quad (9)$$

$$\langle I_b I_i \rangle_0 = \int_0^\infty dI_b \int_0^{I_b} dI_i I_b I_i \times P'(I_b, I_i) = kI_0^2, \quad (10)$$

式中, $\langle I_b I_i \rangle_1$ 和 $\langle I_b I_i \rangle_0$ 分别为参考信号位置 $T_i = 1$ 和 0 时的关联函数。可以发现,高阶关联函数的计算结果与经典 CGI 一致,但(9)式中的是像面关联值,而(10)式中的是成像背景。

4.3 单光子正负条件对应鬼成像的单像素成像

为了描述单像素信号的阈值划分,引入两个逻辑符号

$$\sigma_p(I_b) = \frac{1 + \text{sgn}(I_b - \beta I_0)}{2}, \sigma_n(I_b) = 1 - \sigma_p(I_b), \quad (11)$$

式中,阈值参数 $\beta > 0$,符号函数

$$\text{sgn}(s) = \begin{cases} 1, & s > 0 \\ 0, & s = 0 \\ -1, & s < 0 \end{cases}, \quad (12)$$

式中,参数 σ_p 和 σ_n 为描述单像素信号划分及相应参考信号对应关系的参数。在 PNCCGI 实验中,正像是通过高于阈值单像素信号对应的参考信号平均值获得的。因此,在概率理论中,正像的概率平均可表示为

$$\langle \sigma_p I_i \rangle_1 = \int_0^\infty dI_b \int_0^{I_b} dI_i \sigma_p I_i \times P(I_b, I_i) = \frac{I_0}{k!} \Gamma(k+1, \beta), \quad (13)$$

其中,不完全伽马函数可表示为

$$\Gamma(k, \beta) = \int_\beta^\infty u^{k-1} \exp(-u) du. \quad (14)$$

同理可知,正像的背景为

$$\langle \sigma_p I_i \rangle_0 = \int_0^\infty dI_b \int_0^\infty dI_i \sigma_p I_i \times P'(I_b, I_i) = \frac{I_0}{(k-1)!} \Gamma(k, \beta), \quad (15)$$

正像的可见度为

$$V_p = \frac{\Gamma(k+1, \beta) - k \Gamma(k, \beta)}{\Gamma(k+1, \beta) + k \Gamma(k, \beta)}. \quad (16)$$

按照概率理论,负像的概率平均为

$$\langle \sigma_n(I_b) I_i \rangle = I_0 - \langle \sigma_p(I_b) I_i \rangle, \quad (17)$$

负像的可见度为

$$V_n = \frac{\Gamma(k+1, \beta) - k \Gamma(k, \beta)}{2k! - \Gamma(k+1, \beta) - k \Gamma(k, \beta)}. \quad (18)$$

三个可见度函数如图 6 所示,可以发现,经典 CGI 的可见度 V 不超过 1/3,正像可见度 V_p 随参数 β 的增大而减小,负像可见度 V_n 的变化与正像相反。此外,正像和负像的可见度不会受到 1/3 极限的约束,最高值趋近于 1。

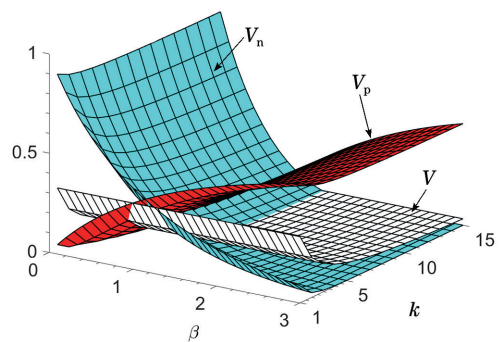


图 6 三种可见度^[55]

Fig. 6 Three visibility functions^[55]

单光子 PNCCGI 的实验装置如图 7 所示,其中,投影仪发出模拟负指数分布的一系列光束散斑图,这些按时间排列的散斑图构成参考信号序列 $I_r = \{I_i\}$ 。光束照明物体后会被强烈衰减,光学衰减器由两个石英偏振片 (P_1, P_2) 和一个中性密度

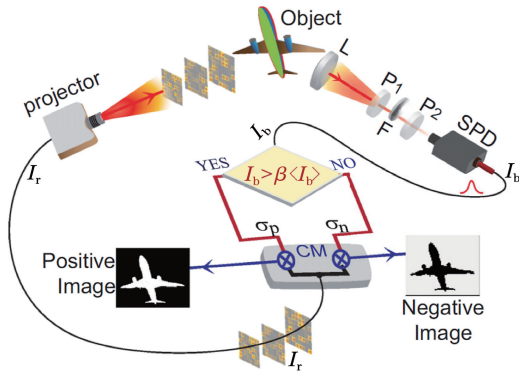


图 7 单光子 PNCCGI 实验装置示意图^[55]

Fig. 7 Diagram of the experimental setup of single-photon PNCCGI^[55]

滤波片 F 组成, L 为收集透镜。衰减后的单像素信号由单光子计数器 (SPD) 探测, 同时将单像素信号送入逻辑器件中, 按照设定阈值对单像素信号进行分类。超过阈值时, 逻辑分类系统输出逻辑信号 σ_p ; 低于阈值时, 系统输出逻辑信号 σ_n , 然后根据逻辑信号和参考信号的关联函数恢复正像和负像。

理论上, 物光受到强烈衰减后, 单个像素物光的统计规律仍然满足负指数分布, 只是其平均值和方差减小了。因此, 对于单像素信号, 理论计算中的强度随机变量只需要乘上一个衰减因子 γ ^[55]。实验中, 单光子探测器的曝光时间约为 400 ms, 图 8 为典型的单光子 PNCCGI 实验结果, 每张图像均通过约 1600 帧参考信号得到。在单次曝光时间内, 正负像 (1~4 列) 对应的单像素信号平均光子数约为 1600, 2000, 2400 和 2800。可以发现, 该方案能在物光信号极度衰减的情形下工作, 这表明单像素成像的鲁棒性较好。

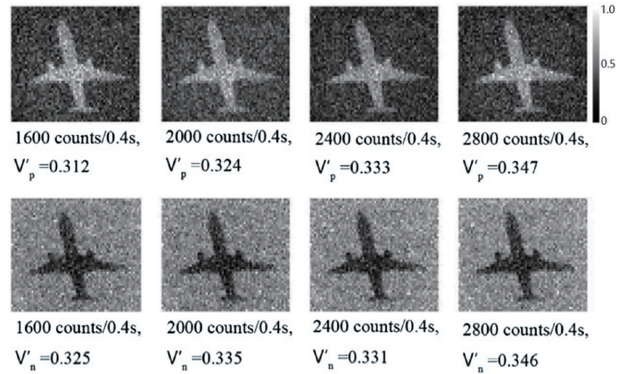


图 8 单光子 PNCCGI 的实验结果^[55]

Fig. 8 Experimental results in single-photon PNCCGI^[55]

4.4 分数阶矩单像素成像

在 CGI 的单像素成像方案中, 概率论方法将高阶关联函数的计算从光场演化关联推广至关联矩的计算^[56], 从而将高阶关联函数的幂次改为任意数 (不再限制为正整数), 单像素信号和参考信号的任意阶关联矩可表示为

$$\langle I_b^\mu I_i^\nu \rangle = \int_0^\infty dI_b \int_0^{I_b} dI_i I_b^\mu I_i^\nu \times P(I_b, I_i), \quad (19)$$

式中, μ 和 ν 分别为单像素信号和参考信号的幂次。

离散变量分数阶关联矩的成像结果如图 9 所示, 其中, 参考信号的阶数 $\nu = 2.7183$, 在图 9(a)~图 9(j) 中, 单像素信号阶数 $\mu = -16.5, -12.5, -4.5, -1.5, -0.5, 0.5, 1.5, 4.5, 12.5, 16.5$ 。可以发现, 当关联阶数 μ 取负值时, 得到负像; 当关联阶数 μ 取正值时, 得到正像。理论分析和实验结果表明, 关联阶数的绝对值越大, 图像的可见度就越高; 且一般情况下, 关联阶数 μ 的绝对值相同时, 负像的图像质量优于正像。

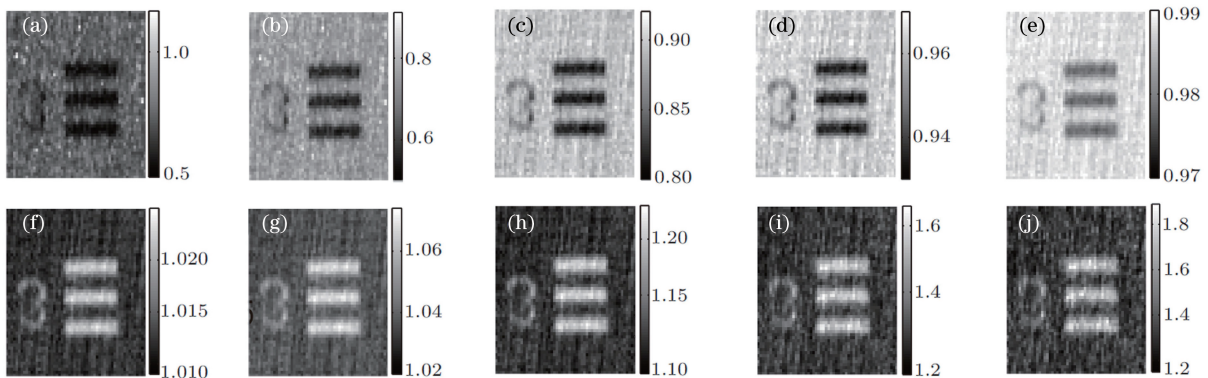


图 9 离散变量分数阶关联矩的成像结果。(a) $\mu = -16.5$; (b) $\mu = -12.5$; (c) $\mu = -4.5$; (d) $\mu = -1.5$; (e) $\mu = -0.5$; (f) $\mu = 0.5$; (g) $\mu = 1.5$; (h) $\mu = 4.5$; (i) $\mu = 12.5$; (j) $\mu = 16.5$ ^[56]

Fig. 9 Imaging results of discrete variable fractional correlation moments. (a) $\mu = -16.5$; (b) $\mu = -12.5$; (c) $\mu = -4.5$; (d) $\mu = -1.5$; (e) $\mu = -0.5$; (f) $\mu = 0.5$; (g) $\mu = 1.5$; (h) $\mu = 4.5$; (i) $\mu = 12.5$; (j) $\mu = 16.5$ ^[56]

5 离散变量光源照明的单像素成像

在基于 CS 的单像素成像实验中,随机光源大多采用数字化离散变量光源,但在基于 CGI 的单像素成像实验中,既有经典数字化离散光源,又有量子光源。Khakimov 等^[60]进行的原子鬼成像实验采用的粒子源是处于玻色-爱因斯坦凝聚态的超冷亚稳态氦原子。Yu 等^[61]和 Pelliccia 等^[62]分别在中国上海同步辐射中心和欧洲同步辐射中心实现了硬 X 射线鬼成像。之后, Schori 等^[63]和 Zhang 等^[64]分别用低辐射度的台式 X 光源实现了鬼成像,为 X 射线低损伤成像提供了思路。Li 等^[65]用 3.2 MeV 超亮电子束实现了电子鬼成像,Kingston 等^[66]和 He 等^[67]利用受空间调制的热中子源实现了中子鬼成像。这些物理光源在单像素成像中的应用不仅拓展了单像素成像的应用范围,还进一步强化了单像素成像的量子本质。但无论是人工制造的数字化离散光源,还是量子化物理粒子源,其强度取整数后均可以作为离散随机变量。因此,采用离散随机变量的概率统计理论,分析了这类单像素成像中单像素信号的概率分布以及单像素信号-参考信号间的联合概率统计分布。

5.1 单像素信号-参考信号间的联合概率分布

光源任意处的发光强度统计即参考信号的概率密度分布函数满足离散变量统计分布 $p(I_i)$,在单像素成像中,假设物体取值为 $T_i=1$ 的元素总数为 k , k 个统计独立光源分量的概率密度分布函数可表示为

$$P_{\text{total}}(I_1, I_2, \dots, I_k) = p(I_1)p(I_2)\dots p(I_k). \quad (20)$$

由于单像素信号 $I_b = I_1 + I_2 + \dots + I_k$,其概率密度分布函数是所有单一变量概率密度分布函数的连续卷积,可表示为

$$P_b(I_b) = \underbrace{p(I_b) * \dots * p(I_b)}_{k-1 \text{ convolutions}}, \quad (21)$$

式中, $*$ 为离散变量卷积, $p(I_b) * p(I_b) = \sum_{I'_b=0}^{I_b} p(I_b - I'_b)p(I'_b)$,连续 $k-1$ 次卷积的 k 个 $p(I_b)$ 函数形式完全相同。根据傅里叶变换的卷积定理可知,单像素信号的概率密度分布函数为

$$P_b(I_b) = \mathcal{F}^{-1}_{\omega \rightarrow I_b} [\tilde{p}^k(\omega)], \quad (22)$$

式中, \mathcal{F}^{-1} 为逆傅里叶变换,参考信号概率密度分布函数的傅里叶变换 $\tilde{p}(\omega) = \sum_{I_i=0}^{I_{\text{max}}} p(I_i) \exp(j \frac{2\pi\omega I_i}{I_{\text{max}}})$,

I_{max} 为参考信号的最大整数取值。需要说明的是,(22)式只是一个形式表达式,采用拉普拉斯变换的卷积定理也是一样的^[55-56,59],只需区别函数的定义域。根据(22)式和参考信号的统计独立性质,得到单像素信号-参考信号的联合概率密度分布函数为

$$P^{(2)}(I_b, I_i) = P(I_i) \mathcal{F}^{-1}_{\omega \rightarrow (I_b - I_i)} [\tilde{p}^{k-1}(\omega)]. \quad (23)$$

可以发现,联合概率密度分布函数可以反映单像素信号 I_b 和参考信号 I_i 的内在统计关联。

5.2 三种离散随机概率分布与单像素成像

从统计理论来看,伯努利分布是二项式分布的特殊形式。二项式分布的参考信号 $I_i = 0, 1, 2, \dots, m$ 的概率密度分布函数为

$$p(I_i) = C_m^{I_i} p^{I_i} (1-p)^{m-I_i}, \quad (24)$$

式中, p 为 $I_i=1$ 的概率,也是参考信号平均值。单像素信号的概率密度分布函数为

$$P_b(I_b) = C_{mk}^{I_b} p^{I_b} (1-p)^{mk-I_b}, \quad (25)$$

式中,单像素信号 $I_b = 0, 1, 2, \dots, mk$ 。单像素信号-参考信号之间的联合概率密度分布函数为

$$P^{(2)}(I_b, I_i) = C_{m(k-T_i)}^{I_b - T_i I_i} C_k^{I_i} p^{I_b + (1-T_i)I_i} \times (1-p)^{mk - I_b + (m-I_i)(1-T_i)}, \quad (26)$$

单像素信号和参考信号间的高阶关联函数为

$$\langle I_b I_i \rangle = \sum_{I_b=0}^{km} \sum_{I_i=0}^{\min(I_b, m)} I_b I_i \times P^{(2)}(I_b, I_i) = m(mk - T_i)p^2 + mpT_i. \quad (27)$$

当 $T_i=1$ 时,高阶关联函数给出的是像面,当 $T_i=0$ 时给出的是背景,则高阶关联像的可见度为

$$V_m = \frac{1}{1 + 2 \frac{mkp}{1-p}}. \quad (28)$$

$m=1$ 时,可得到伯努利分布的结果。伯努利分布关联成像的可见度随概率 p 的变化情况如图 10(a)所示。二项式分布($m=5$)关联成像的可见度随 p 的变化曲线如图 10(b)所示,其可见度随 p 的减小而增大并逐渐趋近于 1;且像素数目越多,增长速度越慢。图 10(c)为泊松分布可见度随参数 λ 的变化曲线,可以发现,可见度随 λ 的减小而增大并逐渐趋近于 1;且像素数目越多,增长速度越慢。

当参考信号满足泊松分布时,参考信号 $I_i = 0, 1, 2, \dots, \infty$ 的概率密度分布函数为

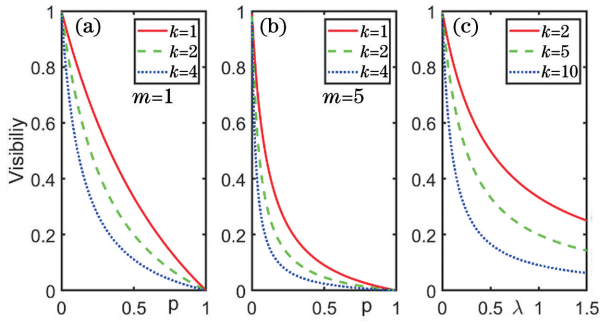


图 10 不同分布的可见度。(a)伯努利分布;(b)二项式分布;(c)泊松分布^[59]

Fig. 10 Visibilities of different distributions. (a) Bernoulli distribution; (b) binomial distribution; (c) Poisson distribution^[59]

$$p(I_i) = \frac{\lambda^{I_i}}{I_i!} \exp(-\lambda), \quad (29)$$

式中, λ 为参考信号的平均值。 k 个参考信号和的单像素信号概率密度分布函数为

$$P_b(I_b) = \frac{(k\lambda)^{I_b}}{I_b!} \exp(-k\lambda), \quad (30)$$

单像素信号-参考信号之间的联合概率密度分布函数为

$$P^{(2)}(I_b, I_i) = \frac{\lambda^{I_i} [(k-1)\lambda]^{I_b - T_i I_i}}{I_i (I_b - I_i)!} \times \exp[-(k+1-T_i)\lambda], \quad (31)$$

单像素信号和参考信号之间的高阶关联函数为

$$\langle I_b I_i \rangle = \sum_{I_b=0}^{mk} \sum_{I_i=0}^{\min(I_b, m)} I_b I_i \times P^{(2)}(I_b, I_i) = k\lambda^2 + \lambda T_i. \quad (32)$$

当 $T_i=1$ 时, 可得到高阶关联函数给出的像面值; 当 $T_i=0$ 时, 可得到像的背景。高阶关联像的可见度为

$$V = \frac{1}{1 + 2k\lambda}. \quad (33)$$

图 11 为离散随机变量作为参考信号的 CGI 数值模拟结果, 物体为字母“WLRC”。其中, 伯努利分布 ($k=1$)、二项式分布 ($k=5$) 和泊松分布 ($\lambda_0=0.0037$) 的曲线均为二维图像中心线的分布情况, 伯努利分布和二项式分布中的概率参数 $p_0=0.0037$ 。可以发现, 图像分布和图像质量与理论分析结果一致。

在离散变量作为参考信号的单像素成像中, 参考信号和单像素信号之间的联合概率密度分布函数能更好地体现二者的内在关联, 从而构成单像素成像的物理基础。同时, 基于离散变量的 CGI 图像可

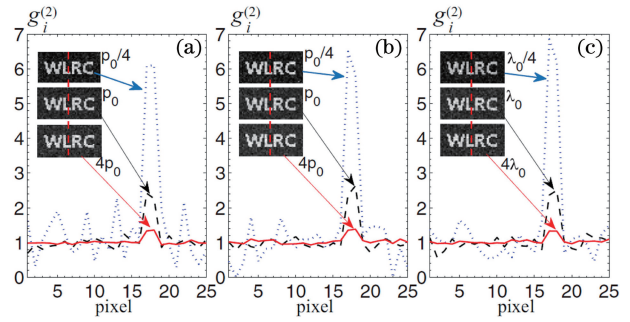


图 11 图像恢复的数值拟合结果。(a)伯努利分布;(b)二项式分布;(c)泊松分布^[59]

Fig. 11 Numerical fitting results of image restoration. (a) Bernoulli distribution; (b) binomial distribution; (c) Poisson distribution^[59]

见度并不受 $1/3$ 的制约; 且在具体实验中, 离散变量参考信号的可控性好, 更容易进行测量和计算, 受到了单像素成像研究者的青睐。

6 结 论

热光鬼成像方案是近年来单像素成像的研究重点, Abouraddy 等^[68]认为鬼成像和鬼干涉是量子纠缠系统特有的量子行为, 随后 Bennink 等^[21-22]利用随机反射的 He-Ne 激光源获得关联成像, 并在经典光源下得到关联干涉效应^[22]。Scarcelli 等^[69]认为热光关联并非双光子效应, 不能同时产生鬼成像和鬼干涉两种效应, 但该质疑在后续实验和理论分析中被否定^[10]。目前, 关于关联成像量子物理本质问题的争议仍在持续^[70-72], 并继续推动着该技术在理论研究和实验技术上的发展^[73-76]。

单像素成像具有成像结构简单、优化程序多、成像质量好等优点, 得到了人们的广泛关注, 研究内容也逐渐从实验室走向实际应用。因此, 从单像素成像的概率统计基础出发, 讨论分析了几种成像方案, 集中探讨了两大类单像素成像的基本原理, 深入分析了连续随机变量和离散随机变量下单像素信号的随机统计规律以及参考信号和单像素信号之间的联合概率密度分布函数, 并给出了单像素信号和参考信号之间的内在物理关联。虽然单像素成像技术在多个领域中得到了快速发展, 如三维成像^[77]和超材料成像^[78-79]。但目前单像素成像仍然有一些短板需要克服, 如成像速度、成像系统的成本和图像质量。

参 考 文 献

[1] Takhar D, Laska J N, Wakin M B, et al. A new

- compressive imaging camera architecture using optical-domain compression [J]. *Proceedings of SPIE*, 2006, 6065: 606509.
- [2] Duarte M F, Davenport M A, Takhar D, et al. Single-pixel imaging via compressive sampling [J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2008, 25(2): 83-91.
- [3] Shapiro J H. Computational ghost imaging [J]. *Physical Review A*, 2008, 78(6): 061802.
- [4] Bromberg Y, Katz O, Silberberg Y. Ghost imaging with a single detector[J]. *Physical Review A*, 2009, 79(5): 053840.
- [5] Candès E J, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(2): 489-509.
- [6] Donoho D L. Compressed sensing [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(4): 1289-1306.
- [7] Cheng J, Han S S. Incoherent coincidence imaging and its applicability in X-ray diffraction[J]. *Physical Review Letters*, 2004, 92(9): 093903.
- [8] Gatti A, Brambilla E, Bache M, et al. Ghost imaging with thermal light: comparing entanglement and classical correlation[J]. *Physical Review Letters*, 2004, 93(9): 093602.
- [9] Valencia A, Scarcelli G, D'Angelo M, et al. Two-photon imaging with thermal light [J]. *Physical Review Letters*, 2005, 94(6): 063601.
- [10] Ferri F, Magatti D, Gatti A, et al. High-resolution ghost image and ghost diffraction experiments with thermal light[J]. *Physical Review Letters*, 2005, 94(18): 183602.
- [11] Zhang D, Zhai Y H, Wu L A, et al. Correlated two-photon imaging with true thermal light [J]. *Optics Letters*, 2005, 30(18): 2354-2356.
- [12] Cao D Z, Xiong J, Wang K G. Geometrical optics in correlated imaging systems[J]. *Physical Review A*, 2005, 71: 013801.
- [13] Candès E J, Wakin M B. An introduction to compressive sampling [J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2008, 25(2): 21-30.
- [14] Chan W L, Charan K, Takhar D, et al. A single-pixel terahertz imaging system based on compressed sensing[J]. *Applied Physics Letters*, 2008, 93(12): 121105.
- [15] Chan W L, Moravec M L, Baraniuk R G, et al. Terahertz imaging with compressed sensing and phase retrieval[J]. *Optics Letters*, 2008, 33(9): 974-976.
- [16] Shrekenhamer D, Watts C M, Padilla W J. Terahertz single pixel imaging with an optically controlled dynamic spatial light modulator[J]. *Optics Express*, 2013, 21(10): 12507-12518.
- [17] Radwell N, Mitchell K J, Gibson G M, et al. Single-pixel infrared and visible microscope [J]. *Optica*, 2014, 1(5): 285-289.
- [18] Klyshko D N. *Photon and nonlinear optics*[M]. New York: Gordon and Breach Science, 1988.
- [19] Pittman T B, Shih Y H, Strekalov D V, et al. Optical imaging by means of two-photon quantum entanglement[J]. *Physical Review A*, 1995, 52(5): R3429-R3432.
- [20] Strekalov D V, Sergienko A V, Klyshko D N, et al. Observation of two-photon "ghost" interference and diffraction[J]. *Physical Review Letters*, 1995, 74(18): 3600-3603.
- [21] Bennink R S, Bentley S J, Boyd R W. "Two-photon" coincidence imaging with a classical source [J]. *Physical Review Letters*, 2002, 89(11): 113601.
- [22] Bennink R S, Bentley S J, Boyd R W, et al. Quantum and classical coincidence imaging [J]. *Physical Review Letters*, 2004, 92(6): 069901.
- [23] Wang K G, Cao D Z. Subwavelength coincidence interference with classical thermal light[J]. *Physical Review A*, 2004, 70(4): 041801.
- [24] Xiong J, Cao D Z, Huang F, et al. Experimental observation of classical subwavelength interference with a pseudothermal light source [J]. *Physical Review Letters*, 2005, 94(17): 173601.
- [25] Cai Y J, Zhu S Y. Ghost interference with partially coherent radiation [J]. *Optics Letters*, 2004, 29(23): 2716-2718.
- [26] Katz O, Bromberg Y, Silberberg Y. Compressive ghost imaging[J]. *Applied Physics Letters*, 2009, 95(13): 131110.
- [27] Luo K H, Chen X H, Liu Q, et al. Nonlocal Talbot self-imaging with incoherent light [J]. *Physical Review A*, 2010, 82(3): 033803.
- [28] Li H, Xiong J, Zeng G H. Lensless ghost imaging for moving objects[J]. *Optical Engineering*, 2011, 50(12): 127005.
- [29] Gong W L, Han S S. Correlated imaging in scattering media[J]. *Optics Letters*, 2011, 36(3): 394-396.
- [30] Dixon P B, Howland G A, Chan K W C, et al. Quantum ghost imaging through turbulence [J]. *Physical Review A*, 2011, 83(5): 051803.
- [31] Meyers R E, Deacon K S, Shih Y. Turbulence-free ghost imaging[J]. *Applied Physics Letters*, 2011, 98(11): 111115.
- [32] Hardy N D, Shapiro J H. Reflective ghost imaging

- through turbulence[J]. *Physical Review A*, 2011, 84(6): 063824.
- [33] Liu X F, Yao X R, Chen X H, et al. Thermal light optical coherence tomography for transmissive objects[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2012, 29(9): 1922-1926.
- [34] Tian N, Guo Q, Wang A, et al. Fluorescence ghost imaging with pseudothermal light [J]. *Optics Letters*, 2011, 36(16): 3302-3304.
- [35] Mizutani Y, Shibuya K, Iwata T, et al. Fluorescence microscope by using computational ghost imaging [J]. *MATEC Web of Conferences*, 2015, 32: 05001.
- [36] Studer V, Bobin J, Chahid M, et al. Compressive fluorescence microscopy for biological and hyperspectral imaging [J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 2012, 109(26): E1679-E1687.
- [37] Liu X L, Shi J H, Wu X Y, et al. Fast first-photon ghost imaging[J]. *Scientific Reports*, 2018, 8(1): 5012.
- [38] Liu X L, Shi J H, Sun L, et al. Photon-limited single-pixel imaging [J]. *Optics Express*, 2020, 28(6): 8132-8144.
- [39] Xu Z H, Chen W, Penuelas J, et al. 1000 fps computational ghost imaging using LED-based structured illumination[J]. *Optics Express*, 2018, 26(3): 2427-2434.
- [40] Zhou C, Wang G C, Huang H Y, et al. Edge detection based on joint iteration ghost imaging [J]. *Optics Express*, 2019, 27(19): 27295-27307.
- [41] Sun S, Liu W T, Gu J H, et al. Ghost imaging normalized by second-order coherence [J]. *Optics Letters*, 2019, 44(24): 5993-5996.
- [42] Sun S, Gu J H, Lin H Z, et al. Gradual ghost imaging of moving objects by tracking based on cross correlation[J]. *Optics Letters*, 2019, 44(22): 5594-5597.
- [43] Pan L, Deng C J, Bo Z W, et al. Experimental investigation of chirped amplitude modulation heterodyne ghost imaging[J]. *Optics Express*, 2020, 28(14): 20808-20816.
- [44] Fu C K, Zheng H B, Wang G, et al. Three-dimensional imaging via time-correlated single-photon counting[J]. *Applied Sciences*, 2020, 10(6): 1930.
- [45] Ye J T, Huang X, Li Z P, et al. Compressed sensing for active non-line-of-sight imaging [J]. *Optics Express*, 2021, 29(2): 1749-1763.
- [46] Luo K H, Huang B Q, Zheng W M, et al. Nonlocal imaging by conditional averaging of random reference measurements[J]. *Chinese Physics Letters*, 2012, 29(7): 074216.
- [47] Meyers R E, Deacon K S, Shih Y. Positive-negative turbulence-free ghost imaging [J]. *Applied Physics Letters*, 2012, 100(13): 131114.
- [48] Li G L, Yang Z H, Yan R T, et al. Iterative normalized correspondence ghost imaging[J]. *Optik*, 2018, 161: 20-26.
- [49] Wang Y L, Zhou Y N, Wang S X, et al. Enhancement of spatial resolution of ghost imaging via localizing and thresholding [J]. *Chinese Physics B*, 2019, 28(4): 044202.
- [50] Leng J, Yu W K, Wang S F. Formation mechanism of correspondence imaging with thermal light [J]. *Physical Review A*, 2020, 101(3): 033835.
- [51] Wen J M. Forming positive-negative images using conditioned partial measurements from reference arm in ghost imaging[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2012, 29(9): 1906-1911.
- [52] Zhang Z, Ma X, Zhong J. Single-pixel imaging by means of Fourier spectrum acquisition [J]. *Nature Communications*, 2015, 6: 6225-6230.
- [53] Wang L, Zhao S M. Fast reconstructed and high-quality ghost imaging with fast Walsh-Hadamard transform[J]. *Photonics Research*, 2016, 4(6): 240-244.
- [54] Wu L A, Luo K H, et al. Two-photon imaging with entangled and thermal light [J]. *AIP Conference Proceedings*, 2011, 1384(1): 223.
- [55] Yang H, Wu S, Wang H B, et al. Probability theory in conditional-averaging ghost imaging with thermal light[J]. *Physical Review A*, 2018, 98(5): 053853.
- [56] Cao D Z, Li Q C, Zhuang X C, et al. Ghost images reconstructed from fractional-order moments with thermal light[J]. *Chinese Physics B*, 2018, 27(12): 123401.
- [57] Dou L Y, Xu D Q, Cao D Z, et al. Demonstration of correlated imaging enhancement with divergence enlargement algorithms[J]. *Optics Communications*, 2019, 430: 68-72.
- [58] Dou L Y, Cao D Z, Gao L, et al. Dark-field ghost imaging[J]. *Optics Express*, 2020, 28(25): 37167-37176.
- [59] Wang C, Lan R J, Ren C, et al. Computational ghost imaging with discrete stochastic sources [J]. *Physical Review A*, 2020, 101(3): 033819.
- [60] Khakimov R I, Henson B M, Shin D K, et al. Ghost imaging with atoms[J]. *Nature*, 2016, 540(7631): 100-103.
- [61] Yu H, Lu R H, Han S S, et al. Fourier-transform ghost imaging with hard X-rays[J]. *Physical Review Letters*, 2016, 117(11): 113901.

- [62] Pelliccia D, Rack A, Scheel M, et al. Erratum: experimental X-ray ghost imaging [J]. *Physical Review Letters*, 2016, 117(21): 219902.
- [63] Schori A, Shwartz S. X-ray ghost imaging with a laboratory source [J]. *Optics Express*, 2017, 25(13): 14822.
- [64] Zhang A X, He Y H, Wu L G, et al. Tabletop X-ray ghost imaging with ultra-low radiation [J]. *Optica*, 2018, 5(4): 374-377.
- [65] Li S, Cropp F, Kabra K, et al. Electron ghost imaging [J]. *Physical Review Letters*, 2018, 121(11): 114801.
- [66] Kingston A M, Myers G R, Pelliccia D, et al. Neutron ghost imaging [J]. *Physical Review A*, 2020, 101(5): 053844.
- [67] He Y H, Huang Y Y, Zeng Z R, et al. Single-pixel imaging with neutrons [J]. *Science Bulletin*, 2021, 66(2): 133-138.
- [68] Abouraddy A F, Saleh B E A, Sergienko A V, et al. Role of entanglement in two-photon imaging [J]. *Physical Review Letters*, 2001, 87(12): 123602.
- [69] Scarcelli G, Berardi V, Shih Y. Can two-photon correlation of chaotic light be considered as correlation of intensity fluctuations? [J]. *Physical Review Letters*, 2006, 96(6): 063602.
- [70] Shapiro J H, Boyd R W. The physics of ghost imaging [J]. *Quantum Information Processing*, 2012, 11(4): 949-993.
- [71] Shih Y. The physics of ghost imaging: nonlocal interference or local intensity fluctuation correlation? [J]. *Quantum Information Processing*, 2012, 11(4): 995-1001.
- [72] Shapiro J H, Boyd R W. Response to "the physics of ghost imaging: nonlocal interference or local intensity fluctuation correlation?" [J]. *Quantum Information Processing*, 2012, 11(4): 1003-1011.
- [73] Wei Z, Lu R H, Yu H, et al. Research on intensity-correlated interferometry with ultra-weak light based on coincidence counting [J]. *Acta Optica Sinica*, 2020, 40(1): 0111013.
- 韦震, 陆荣华, 喻虹, 等. 基于符合计数的极弱光强度关联干涉测量研究 [J]. *光学学报*, 2020, 40(1): 0111013.
- [74] Sun M J, Zhang J M. Single-pixel imaging and its application in three-dimensional reconstruction [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2019, 48(6): 0603003.
- 孙鸣捷, 张佳敏. 单像素成像及其在三维重建中的应用 [J]. *红外与激光工程*, 2019, 48(6): 0603003.
- [75] Shao X P, Liu F, Li W, et al. Latest progress in computational imaging technology and application [J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2020, 57(2): 020001.
- 邵晓鹏, 刘飞, 李伟, 等. 计算成像技术及应用最新进展 [J]. *激光与光电子学进展*, 2020, 57(2): 020001.
- [76] Wu Z W, Qiu X D, Chen L X. Current status and prospect for correlated imaging technique [J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2020, 57(6): 060001.
- 吴自文, 邱晓东, 陈理想. 关联成像技术研究现状及展望 [J]. *激光与光电子学进展*, 2020, 57(6): 060001.
- [77] Sun B, Edgar M P, Bowman R, et al. 3D computational imaging with single-pixel detectors [J]. *Science*, 2013, 340(6134): 844-847.
- [78] Watts C M, Shrekenhamer D, Montoya J, et al. Terahertz compressive imaging with metamaterial spatial light modulators [J]. *Nature Photonics*, 2014, 8(8): 605-609.
- [79] Diebold A V, Imani M F, Sleasman T, et al. Phaseless coherent and incoherent microwave ghost imaging with dynamic metasurface apertures [J]. *Optica*, 2018, 5(12): 1529-1541.