

# 基于量子测量优化的非相干点光源分辨

薛舒东\*, 李雅男, 忻俊, 陆晓铭\*\*

杭州电子科技大学理学院, 浙江 杭州 310018

**摘要** 对于一个非相干成像系统, 可以将两个非相干点光源的空间分辨能力当作分辨率的标准。除了直接成像外, 还可以对像平面上的光场进行其他探测, 然后从测量结果中对光源的信息进行统计推断。统计推断的误差极限是由测量结果中的随机性决定的, 不同测量方案产生的随机性程度也不同。通过考虑像平面的光场的量子态, 使用量子检测和估计理论, 可以获得两个关于非相干点光源分辨率的量子极限和最优化测量方案。最近的研究发现, 横向空间模式分解复用等方法可以很大程度地改进亚瑞利区域内的两个非相干点光源的分辨率, 超越直接成像方法下的经典分辨率极限。本综述介绍了基于量子检测和估计理论的非相干超分辨成像的研究和进展。

**关键词** 成像系统; 超分辨; 空间分辨; 量子探测器; 光子统计

中图分类号 O436

文献标志码 A

doi: 10.3788/LOP202158.1011015

## Incoherent Point Source Resolution Based on Quantum Measurement Optimization

Xue Shudong\*, Li Yanan, Xin Jun, Lu Xiao-Ming\*\*

School of Sciences, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou, Zhejiang 310018, China

**Abstract** For incoherent imaging systems, we can regard the spatial resolution of two incoherent point sources as the standard of resolution. In addition to direct imaging, we can perform measurements on the optical field on the image plane and statistically infer the source information from measurement results. The error limit of statistical inference is determined by the randomness of measurement results. Moreover, the randomness of different measurement schemes is different. By considering the quantum state of the light field in the image plane and using the quantum detection and estimation theory, the quantum limit of the resolution of the two incoherent point light sources and optimal measurement scheme can be obtained. According to recent studies, the resolution of two incoherent point sources in the sub-Rayleigh region can be significantly improved using the method of transverse spatial mode decomposition and multiplexing, which is beyond the classical resolution limit of direct imaging method. In this review, we will introduce the research and development of incoherent super-resolution imaging based on quantum detection and estimation theory.

**Key words** imaging systems; superresolution; spatial resolution; quantum detector; photon statistics

**OCIS codes** 110.2990; 100.6640; 330.6130; 270.5570; 270.5290

### 1 引言

衍射会对成像系统的空间分辨率产生影响。使用分辨率来评价成像系统的成像性能。通常使用对

两个理想点光源的区分能力来表征分辨率<sup>[1-2]</sup>, 其中最著名的就是瑞利判据<sup>[3]</sup>。根据瑞利判据, 当两个非相干点光源像斑中心的距离小于其衍射图案(艾里斑)第一零点的半径时, 则认为它们是不可分辨

收稿日期: 2021-02-01; 修回日期: 2021-03-16; 录用日期: 2021-03-22

基金项目: 国家自然科学基金(11805048, 61871162, 11935012, 61905054)、浙江省自然科学基金(LQ19A040008)

\* E-mail: sdxue@hdu.edu.cn; \*\* E-mail: lxm@hdu.edu.cn

的。瑞利判据的思想是：两个像斑的重叠会增加对它们进行视觉分辨的难度。因此在亚瑞利区域（瑞利判据认为非相干点光源不在能被分辨的距离之内），借助其他手段来实现更好的分辨率具有重要的科学意义和应用价值。

然而，瑞利判据本身存在着诸多局限。首先，其基于视觉感知的可分辨标准带有一定的主观性。正如《费曼物理学讲义》中提到的那样，如果能对确切的光强分布进行足够细致的测量，那么即使在瑞利极限距离内的点光源，照样能被很好地分辨<sup>[4]</sup>。其次，对于分辨率来说，非常重要的测量噪声也未被考虑在瑞利判据之中<sup>[5]</sup>。因此，为了更好地研究能提高成像分辨率的技术，需要考虑更为客观的分辨率标准。

1955 年，di Francia<sup>[6]</sup>从采样理论的角度出发，讨论了图像中包含的信息自由度。他在这一工作中指出，除非被成像的物体拥有一定的先验信息，否则成像系统精确区分所有含两个点光源情况是不可能的。Jaynes<sup>[7]</sup>意识到成像问题是一个广义逆向问题。他认为 di Francia 虽然尝试使用了信息论来分析成像问题，却很遗憾地没有发现（贝叶斯）概率理论更适合用来分析成像问题。Jaynes 所提（贝叶斯）概率理论指的是统计推断理论<sup>[8]</sup>。1964 年，Harris<sup>[9-10]</sup>将统计推断中的假设检验应用到成像分辨率的问题上，使用以下两种假设情况下统计决策的平均误差来作为非相干点光源分辨能力的表征：一个点源的假设和两个间距很小的非相干点源的假设。另外，统计推断中的参数估计也是一种常用的表征分辨率的方法。在参数估计的框架内，分辨率可以用对两个点源间距的估计准确程度来度量<sup>[11-16]</sup>。

基于统计推断的分辨率标准，能够更客观地讨论分辨率的极限问题和优化方案。随着量子科技的发展，研究尝试将量子态和测量技术应用到成像方面。利用光的量子特性，提高了成像的性能，促进了量子成像领域的发展<sup>[17-20]</sup>。理论上，在像平面光场量子态上进行量子测量是提高成像分辨率的一种重要途径。Helstrom<sup>[21-22]</sup>就曾经考虑过基于量子测量优化下非相干光源两点分辨率极限的问题，并进行了一系列的开端工作，但是 Helstrom 的这些工作逐渐被忽视和遗忘了。直到 2016 年，Tsang 等<sup>[23]</sup>发现在亚瑞利区域，区分两个非相干点光源时，直接成像的性能与最优化测量的性能差距非常大，表明最优化测量方案可以实现超分辨，提出的最优测量在后续的一些实验中得到了原理验证。

本文将介绍基于优化测量的非相干点光源分辨的原理和实验方案，及该领域取得的最新进展、展望。

## 2 非相干点光源优化测量分辨的理论研究

### 2.1 量子检测和估计理论

从优化测量的角度来研究非相干点光源分辨问题，可用理论工具是量子检测和估计理论<sup>[21]</sup>。经典的检测和估计理论考虑的是对统计信号处理方法的最优化<sup>[24]</sup>，而量子检测和估计理论是在经典理论最优处理方法的基础上，考虑对量子测量的最优化。如果信号是离散的，则可以使用假设检验的框架，以错误判断的概率作为性能评估的标准；如果信号是连续的，则可以用参数估计的框架，以估计值与真实值之间的均方误差作为性能评估的标准。量子检测和估计理论提供了测量无关的错误概率或者误差的下界，为量子测量的最优化提供指导。

量子检测和估计的过程如图 1 所示。系统的状态用密度算符  $\rho_\theta$  来描述，其中下标表示量子态依赖于信号参数  $\theta$ 。量子测量在数学上可以用正定算符测度（POVM）来描述，它是一组满足条件  $\{\sum_q E_q = I\}$  的正定算符集  $\{E_q\}$ ，其中  $q$  是测量结果， $I$  是恒等算符。如果测量结果是连续取值的，则条件中的求和变成相应的积分。根据量子力学的概率解释，测量结果是一个随机变量，其概率质量函数为  $p(q) = \text{Tr}(E_q \rho_\theta)$ 。图 1 中的  $\hat{\theta}$  代表对测量结果进行数据处理后做出的决策。量子测量本身的随机属性和物理过程中的其他噪声使最后的决策  $\hat{\theta}(q_1, q_2, \dots, q_M)$  也是一个随机变量。而判断决策好坏的依据是其能更好地接近真实信号  $\theta$ 。根据真实信号的取值是离散的还是连续的（分别对应假设检验和参数估计），使用不同的性能评估标准。经典检测和估计理论关注的是如何优化数据处理算法，而量子检测和估计理论是在经典最优算法的基础上，研究如何优化量子测量。

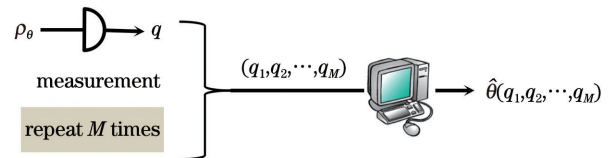


图 1 量子检测和估计

Fig. 1 Quantum detection and estimation

### 2.2 早期工作

作为量子估计和检测理论的前驱者，Helstrom

于 1976 年在该领域的开创之作 *Quantum Detection and Estimation Theory* 一书<sup>[21]</sup>第七章和第八章的最后小节中,分别用量子检测理论和量子估计理论探讨了非相干点光源的分辨问题。

在量子检测理论中,考虑的是将以下两种假设情况下统计决策的平均误差作为对非相干点光源的分辨能力的表征:即一个点光源的假设( $H_1$ )、两个间距很小的非相干点光源的假设( $H_2$ ),如图 2 所示。统计决策的性能可由平均误差概率来描述:

$$P_e = p_1 \Pr(H_2 | H_1) + p_2 \Pr(H_1 | H_2), \quad (1)$$

式中: $p_1$  和  $p_2$  分别为假设  $H_1$  和  $H_2$  的先验概率; $\Pr(H_i | H_k)$  为将真实情况  $H_k$  判断为  $H_i$  的概率。为了将研究重心集中在对非相干光源的空间分辨能力上,可以假设点光源的频率特征一样、双光源情况下两个点光源强度相等且等于单光源情况下光源强度的 1/2。1973 年,Helstrom<sup>[22]</sup> 计算了平均误差概率的量子极限,但是并没有提出实际的量子优化测量方案,也没有表明最优测量方法能比现有成像方法改进多少性能。

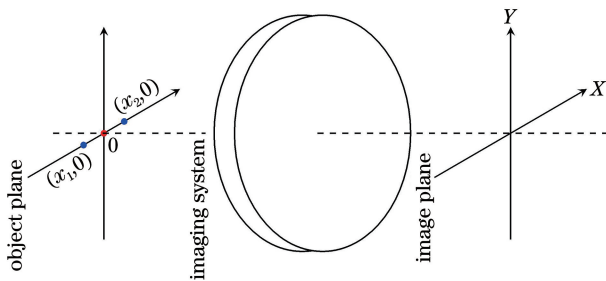


图 2 非相干点光源分辨能力的假设检验和参数估计描述  
Fig. 2 Hypothesis testing and parameter estimation descriptions for incoherent point light source resolution

在量子估计理论中,大多数情况下,测量的直接最优化非常复杂。因此,往往需要借助不依赖于测量的误差下界来指导测量的优化过程。这方面最有力的理论工具是 Helstrom 得到的 Cramer-Rao 误差下界的量子版本。作为性能评估标准的估计子的均方误差表达式为

$$R = E [(\hat{\theta} - \theta)^2], \quad (2)$$

式中: $E[\cdot]$  为统计期望值。经典和量子的 Cramer-Rao 误差下界可以表示为

$$E[(\hat{\theta} - \theta)^2] \geq C^{-1} \geq Q^{-1}, \quad (3)$$

式中: $C$  和  $Q$  分别为经典 Fisher 信息和量子 Fisher 信息。经典 Cramer-Rao 误差下界对于所有无偏估计子都满足,在大样本数的情况下最大似然估计子渐进达到该下界。经典 Fisher 信息是测量结果的

概率分布定义的,因此它依赖于所选取的测量。而量子 Fisher 信息是描述量子态的密度算符定义的,与所选取的测量无关。Helstrom<sup>[21]</sup> 考虑了对非相干点光源光场强度和频率的估计,在有背景噪声的模型中计算了对单个点光源位置的估计精度。但是对于成像分辨率来说,更为重要的是对两个点光源间距的估计精度,而 Helstrom 并没有完成在这一问题上关于精度的量子极限的计算。

### 2.3 两个点光源间距估计的量子极限

2006 年,Ram 等<sup>[16]</sup> 从经典参数估计理论出发,用 Fisher 信息定义了非相干点光源的成像分辨率,并且将其应用到单分子显微镜上。该项工作的主要思想是将成像分辨率看成是两个非相干点光源的间距估计,将对间距的估计误差用来度量成像分辨率。他们的工作还揭示了用估计误差来度量的成像分辨率在直接成像下的确受制于“瑞利魔咒”——在亚瑞利区域,估计误差随间距的减小而急剧增加。

由于像平面上的光场是一个量子态,对它进行量子测量并不仅仅局限于直接成像。对像平面光场上采用的量子测量进行最优化,可以借助量子参数估计理论来解决。

利用量子参数估计理论,2016 年 Tsang 等<sup>[23]</sup> 计算得到了关于两个非相干点源间距测量误差的基本量子极限。出乎意料的是,量子 Cramer-Rao 误差下界不依赖于两个非相干点光源的间距。这说明分辨率的量子基本极限并没有受到“瑞利魔咒”的制约,而受到制约的仅仅是在像平面上测量光强分布的手段。两个非相干点光源的间距越小,传统的直接成像方案的可改进空间就越大。在这个工作中,Tsang 等使用了空间模式分解复用(SPADE)手段来构造最优化测量方案,并得到实验上的原理验证。而其他一些最优和近优量子测量方案也在后续理论工作中被不断提出和发展。由于该方法适用于非相干源成像分辨,可以采用线性光学实现,对天文成像、生物显微成像等潜在应用有着非常重要的意义。

Tsang 等的研究考虑了远场光学成像系统对两个非相干点源的分辨能力。为了将研究重心聚焦在空间分辨能力上,假设光源为准单色光,有一个特定的偏振,且两个光源强度相等。为了简单起见,考虑无放大的一维成像系统。假设光源的强度很弱,在给定的观察时间间隔内探测到一个以上光子的可能性很小,因此在像平面上光场量子态的密度算符可近似表示为  $\rho \approx (1 - \epsilon) |T_{\text{vac}}\rangle \langle T_{\text{vac}}| + \epsilon \rho_1$ , 其中  $\epsilon \ll 1$ ,  $|T_{\text{vac}}\rangle$  表示真空态, $\rho_1$  表示光场中单光子部分的

密度算符。令  $|\psi_j\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_j(x) |x\rangle$  表示从第  $j$  个点光源辐射出来的光子在像平面上描述横向空间自由度的量子态,其中  $|x\rangle$  为像平面上位置算符的本征态,  $\psi_j(x)$  为相应的波函数,代表像平面上坐标为  $x$  处的点光源对物平面上坐标为  $X$  处的点光源的幅度响应。对于两个非相干光源,  $\rho_1$  可以表示为

$$\rho_1 = \frac{1}{2} (|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + |\psi_2\rangle\langle\psi_2|). \quad (4)$$

对于非相干光成像分辨率问题而言,感兴趣的待估参数为间距,即  $\theta = X_2 - X_1$ ,因此需要计算  $\rho_1$  中关于间距的量子 Fisher 信息。假设成像系统具有空间平移不变性,那么每个波函数可以由(归一化)幅度点扩展函数  $\psi(x)$  来描述,即  $\psi_j(x) = \psi(x - X_j)$ 。假设点扩展函数具有空间无关的相位,因此可以表示为实函数。于是, Tsang 等计算得到  $\rho_1$  中关于间距的量子 Fisher 信息为

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \right]^2. \quad (5)$$

对于高斯型点扩展函数,有

$$\psi(x) = (2\pi\sigma^2)^{-1/4} \exp\left(-\frac{x^2}{4\sigma^2}\right), \quad (6)$$

式中:量子 Fisher 信息  $Q = 1/(4\sigma^2)$ ;  $\sigma$  为成像系统的特征尺度,和系统的有效数值孔径相关。

在关于间距的量子 Fisher 信息的表达式中,最重要的性质是它不依赖于间距本身的真实值。这意味着如果这一量子极限是可以达到的,那么在亚瑞利区域,非相干成像的可改进空间是十分巨大的。

### 2.4 两个点光源间距估计的优化测量

如果关于间距估计的量子 Cramer-Rao 误差下界是可以达到的,那么就可以找到一个最优测量,在这个测量下的经典 Fisher 信息等于量子 Fisher 信息。根据量子力学,理论上可以使用相应 Hilbert 空间中的任意正交基进行测量。在这个问题中,相应的 Hilbert 空间是光场的横向模式空间<sup>[25]</sup>。设  $\{|\varphi_q\rangle\}$  为选择的正交模基矢,那么根据量子力学,在模式  $|\varphi_q\rangle$  上探测到光子的概率为

$$p(q) \equiv \langle\varphi_q | \rho_1 | \varphi_q\rangle. \quad (7)$$

根据这一概率,则可以计算出相应的关于间距的 Fisher 信息。而直接成像可以解释成在像素模式<sup>[25]</sup>上的探测。当像素尺寸趋向于零时,对应的模式为  $|x\rangle$ ,因此概率分布  $p(x) = \langle x | \rho_1 | x\rangle$  中关于间距的 Fisher 信息就代表着直接成像的最高精度,任何有限尺寸像素下的直接成像,其 Fisher 信息都

不会大于该值。Ram 等<sup>[16]</sup>已给出了直接成像的 Fisher 信息。其最重要的特征就是进入亚瑞利区域后,直接成像的 Fisher 信息将会随间距减小而减小,并在间距接近零时趋向于零。

对于高斯型的点扩展函数, Tsang 等<sup>[23]</sup>证明了在像平面上测量的 Hermite-Gauss 横向空间模式上的光子占据数是估计间距的最优化测量,这一类探测方案被称为 SPADE。如图 3 所示,它需要将特定的光场横向空间模式耦合到不同的通道中并进行光子计数。不依赖于间距的量子 Fisher 信息、SPADE 测量能达到的量子 Fisher 信息、直接成像的 Fisher 信息在亚瑞利区域随间距减小趋于零这三个结论综合起来,表明在亚瑞利区域,优化量子测量能提高非相干成像分辨率。

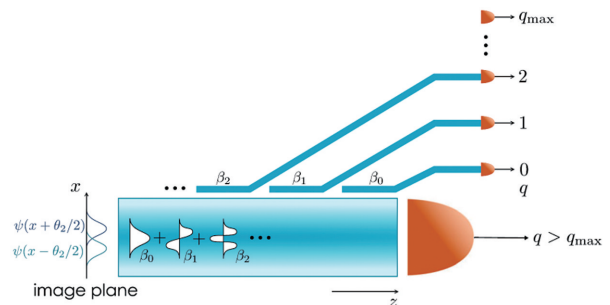


图 3 SPADE 方案<sup>[23]</sup>

Fig. 3 SPADE scheme<sup>[23]</sup>

Tsang 等<sup>[23]</sup>还认为如果只对最低阶的 Hermite-Gauss 模式和其他正交模式进行区分,那么所构成的双端口测量(使用两个光子计数器)具有在亚瑞利区域的近优性能。Paúr 等<sup>[26]</sup>构造了基于“基本模式”和“导数模式”的二元测量,其分辨率在亚瑞利区域超越了直接成像的分辨率。这些在亚瑞利区域下的二元测量可以按照如下的数学结构来理解。首先,将坐标原点取在中点位置。当间距很小时,在  $\theta = 0$  处进行 Taylor 展开,可得

$$\psi\left(x \pm \frac{\theta}{2}\right) \approx \psi(x) \pm \frac{\theta}{2} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x}. \quad (8)$$

$$\text{令 } |\psi\rangle = \int dx \psi(x) |x\rangle \text{ 和 } |\psi'\rangle = \int dx \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} |x\rangle,$$

注意  $|\psi'\rangle$  没有归一化。将  $|\psi\rangle$  和  $|\psi'\rangle$  的归一化版本分别称为基本模式和导数模式<sup>[27]</sup>。在间距很小情况下,单光子的横向空间自由度的密度算符可近似表示为

$$\rho_1 \approx \frac{1}{1 + \frac{\theta^2}{4} \langle\psi' | \psi'\rangle} \left( |\psi\rangle\langle\psi| + \frac{\theta^2}{4} |\psi'\rangle\langle\psi'| \right). \quad (9)$$

对于实数值的点扩展函数,基本模式和导数模式是正交的。因此,(9)式中的密度算符在基本模式和导数模式构成的基矢下可以表示为对角矩阵。可见,基本模式和导数模式是这种情况下的最优化测量基矢。这一结论只要求点扩展函数是实数值的,而对点扩展函数的具体形式没有要求。

在 2017 年,Rehacek 等<sup>[28]</sup>指出对于实对称的点扩展函数而言,任何由确定宇称(奇宇称和偶宇称)模式构成的完备集都是分辨两个非相干点光源的最优化测量模式。这种测量的最优性是普适的,与点扩展函数的具体形式无关。而在实际情况中,测量空间模式的整个完备基是不现实的,因而需要在少数几个模式上实现超越成像的优越性。而这种近优化测量可以根据具体的点扩展函数来选择。

### 3 空间模式分解复用实现方案及实验研究

#### 3.1 SLIVER 方案

2016 年,Nair 等<sup>[29]</sup>提出了一种基于图像反转干涉仪的超定位(SLIVER)方案。SLIVER 方案如图 4 所示,在干涉仪的一个臂上进行一个图像反转

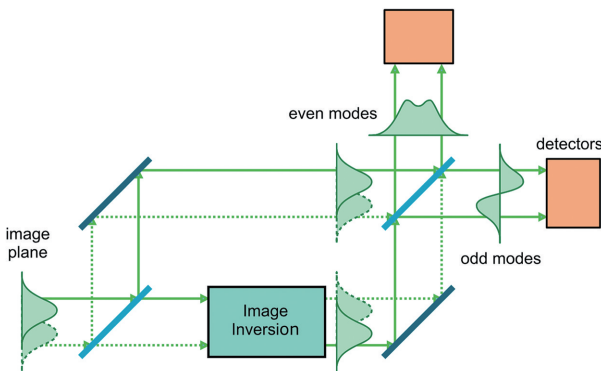


图 4 SLIVER 方案示意图<sup>[29]</sup>

Fig. 4 SLIVER scheme<sup>[29]</sup>

的操作,然后在干涉仪的两个输出端口进行光子计数。从空间模式分解复用的角度来看,SLIVER 方案将空间模式分成了对称和反对称两个子空间。SLIVER 方案对具有圆对称的点扩展函数都适用,相比直接成像方案,在亚瑞利区域能更准确地估计双光源的间距。2016 年,Tang 等<sup>[30]</sup>对 SLIVER 方案进行了相关实验。在该实验中,两个非相干点光源是用偏振分束器(PBS)的两个输出来模拟。Nair 等<sup>[31]</sup>还提出在图像反转干涉仪两个端口使用探测器阵列来替代没有空间分辨能力的桶探测器的方案,称为 Pix-SLIVER 方案,该方案在大间距的情况下可以显著改善 SLIVER 方案的分辨率。

#### 3.2 基于数字全息术的方案

2016 年,Paúr 等<sup>[26]</sup>提出一种利用全息术进行空间模式分解复用的方案,并在实验上对该方案进行了验证。实验装置如图 5 所示。在该实验中,两个非相干点光源由数字微镜设备(DMD)来模拟,不同空间模式的分解由空间光调制器(SLM)来实现。通过 SLM,在像平面放置一个待测空间模式和参考光束干涉而成的全息图。当两个非相干点光源照在全息图上时,沿参考光传播方向上的强度正比于像平面光场在待测空间模式上分解的强度。该实验选择的测量模式为基本模式和一阶导数模式。该实验研究了高斯型和 sinc 型两种类型的点扩展函数。对于高斯型,使用了特征宽度  $\sigma = 0.05 \text{ mm}$  的点扩展函数。当选取最小间距  $(0.2\sigma)$  时,实验的间距估计均方误差是量子极限值的 2.35 倍,而相同情况下直接成像的间距估计均方误差是量子极限值的 51.2 倍。对于 sinc 型点扩展函数,使用了特征宽度  $w = 0.15 \text{ mm}$  的点扩展函数。在选取最小间距情况下,间距估计的均方误差是量子极限值的 2.23 倍,而直接成像下间距估计的均方误差是量子极限值的 10.1 倍。

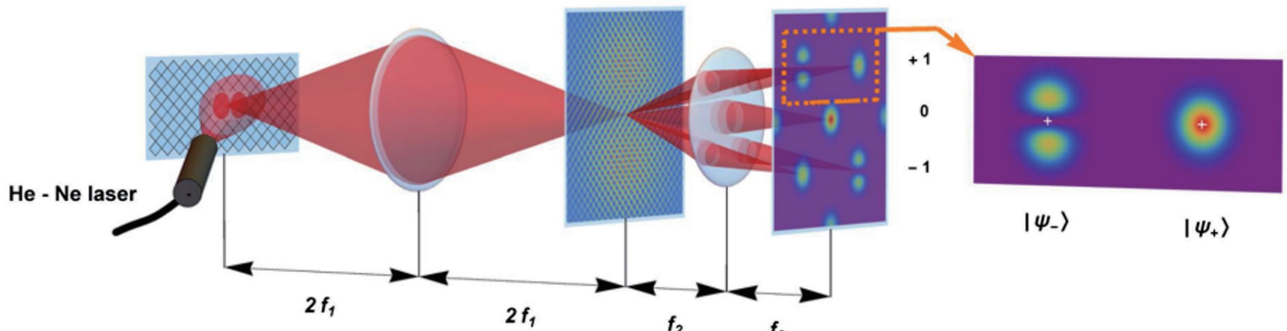


图 5 基于数字全息术的两个点源分离方案装置<sup>[26]</sup>

Fig. 5 Setup for two point source separation schemes based on digital holography<sup>[26]</sup>

### 3.3 SPLICE 方案

2017 年, Tham 等<sup>[32]</sup> 提出并实现了沿边缘相干反转的超分辨定位 (SPLICE) 方案。实验装置如图 6 所示。该实验中的两个非相干点光源是用单光子源经过 50/50 分束器来模拟的。其中两路光的光程差远大于光的相干长度, 以确保在像平面上的两路光线是非相干的。两个高斯型像斑的特征长度  $\sigma$  约为 0.434 mm 和 0.42 mm。SPLICE 方案的关键装置由相位板和 TEM<sub>00</sub> 单模光纤组成。相位板将  $\pi$  相移引入到图像平面的一半区域。因此, 只有那些经过相位板后变作 TEM<sub>00</sub> 空间模式的光场才能被耦合到单模光纤中并被检测到。这一空间模式是奇宇称的。尽管它与导数模式不一样, 他们仍然在实验中得到约 5 倍于量子极限值的间距估计均方误差, 并且相比直接成像方案有显著的性能优势。

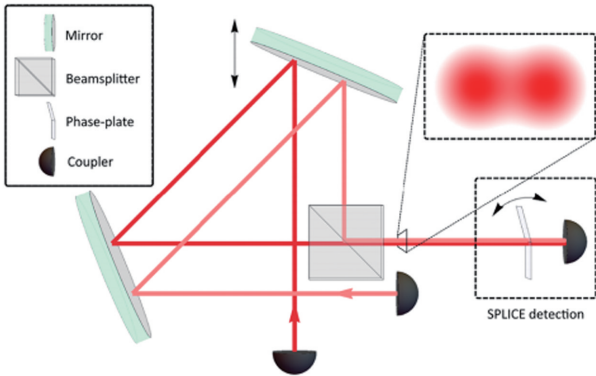


图 6 SPLICE 装置<sup>[32]</sup>

Fig. 6 Setup of SPLICE<sup>[32]</sup>

### 3.4 基于外差探测的方案

2016 年, Yang 等<sup>[33]</sup> 在 TEM<sub>01</sub> 模式下使用外差检测和本地振荡器来检测双缝结构中两个狭缝的分离。实验装置如图 7 所示。通过腔的温度控制来产生本地振荡器上的 TEM<sub>01</sub> 模式, 然后通过外差探测

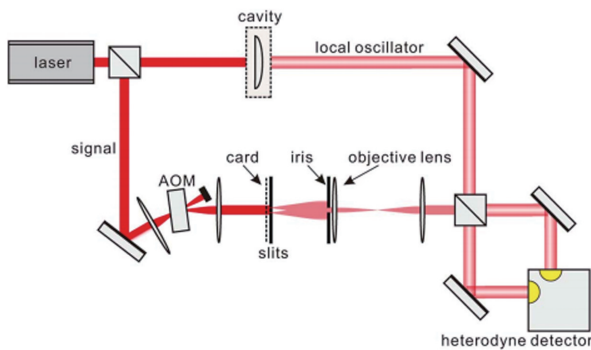


图 7 外差检测方案实验装置图<sup>[33]</sup>

Fig. 7 Experimental device diagram of heterodyne detection scheme<sup>[33]</sup>

可以得到像场投影到 TEM<sub>01</sub> 模式的幅度信息。该实验在 0.28 个瑞利极限的间距情况下达到了 0.019 个标准差的估计误差。2017 年, Yang 等<sup>[34]</sup> 通过计算 Fisher 信息, 对于两个达到一定强度的非相干热光源来说, 该测量方案具有比直接成像方案更好的分辨率。但是对于弱光源来说, 在亚瑞利区域, 该测量方案的估计误差仍然不能接近其量子极限。

### 3.5 基于 MPLC 的方案

2020 年, Boucher 等<sup>[35]</sup> 通过多平面光转换 (MPLC) 技术来实现 Hermite-Gauss 空间模式的分解复用, MPLC 方案如图 8 所示。该实验利用两个达夫棱镜生成沿光轴对称分布的两束光。光源发出的激光相干长度为 15  $\mu\text{m}$ , 而装置臂长在 30 cm 量级。在像平面上, 通过无法看到两束光的干涉来确认非相干性, 然后将这两束光注入到 MPLC 进行模式分解。该实验使用了 TEM<sub>00</sub>、TEM<sub>01</sub>、TEM<sub>02</sub>、TEM<sub>10</sub>、TEM<sub>11</sub>、TEM<sub>12</sub>、TEM<sub>20</sub>、TEM<sub>21</sub>、TEM<sub>22</sub> 这 9 个横向模式的分解, 完成了两个非相干点光源间距和方向的同时估计, 其间距估计的误差在亚瑞利区域明显优于直接成像方案。在 MPLC 方案中, 影响分辨率的因素是不同模式间的串扰。Gessner 等<sup>[36]</sup> 详细分析了模式串扰下超分辨成像的量子极限。

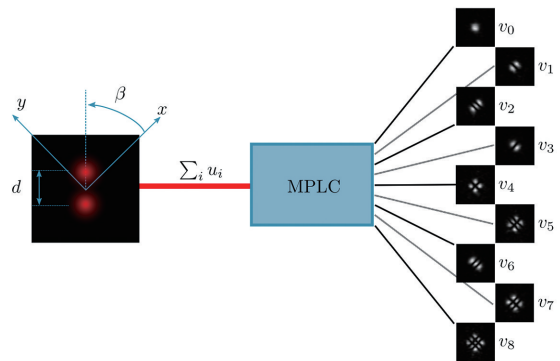


图 8 MPLC 方案的示意图<sup>[35]</sup>

Fig. 8 Schematic of the MPLC scheme<sup>[35]</sup>

### 3.6 SPADE 方案的比较

上述各方案以不同的方法实现了像场在特定空间模式上分解强度的测量。这些方案理论上都可以在亚瑞利区域实现比直接成像方案更好的双点源分辨率。因为目前的实验以原理验证为主, 所以尚不能从实验展示的分辨精度来推断出对应方案的优劣。另外, 包含更多空间模式的测量能提取像场中更多的信息, 用以分辨非相干点光源。上述方案中除了 MPLC 外, 关于如何包含更多空间模式的测量

还尚待研究。最后, SPLICE 方案和 SLIVER 方案的实验装置相对其他方案来说较为简单, 在实验中可能较易实现。

## 4 非相干成像的其他相关问题研究

### 4.1 其他评估标准

2018 年, 本课题组和新加坡、美国合作者一起, 在基于假设检验的成像分辨率标准下, 研究了优化量子测量对成像分辨率的影响<sup>[37]</sup>。该工作在一定程度上弥补了 Helstrom 在 1973 年的开创性研究<sup>[22]</sup>的遗憾。Helstrom 计算得到的基于假设检验错误概率的量子极限是针对全部量子测量优化的, 这包括那些在全体样本上的集体测量。这类集体测量虽然在理论上是允许的, 但是实际上集体测量的实现难度远远高于在每份样本上进行的独立测量。因此, Helstrom 没有给出实际的测量方案, 也没有论证其论文中的量子极限是否可以被独立测量。另外, Helstrom<sup>[22]</sup>也没有给出量子极限和直接成像的对比。而在 2018 年的论文<sup>[37]</sup>中, 通过使用描述错判概率在大样本下渐进衰减的 Chernoff 指数, 论证了只探测最低两阶 Hermite-Gauss 模式的 SPADE 方案及 SLIVER 方案, 和直接成像方案对比, 它们都具有明显的优越性。

### 4.2 热光源和其他类型的光源

2016 年, Tsang 等<sup>[23]</sup>通过弱光源的假设来计算密度算符中的量子 Fisher 信息。同年, Nair 等<sup>[31]</sup>计算了任意强度的两个热光源间距估计的量子 Cramer-Rao 误差下界, 并且得出通过空间模式分解复用可以达到这一量子极限的结论。Lupo 等<sup>[38]</sup>计算得到了一般情况下两个光源间距估计的量子 Cramer-Rao 误差下界。

### 4.3 双光源位置中点的估计问题

上述空间模式分解复用方案以两个点源的连线的中点当作需要分解的空间模式的坐标原点。而在实际情况中, 这一中点位置也是未知参数。Tsang 等<sup>[23]</sup>在 2016 年指出可以使用一部分光子, 通过直接成像来估计中点位置, 然后根据中点位置的估计值来对估计间距的 SPADE 装置进行对齐。由于直接成像可以精确地定位质心数值模拟显示这种先估计中心位置再估计间距的两步组合方案在亚瑞利区域仍比直接成像方案有优势。Grace 等<sup>[39]</sup>在 2020 年更为细致地优化了这种两步组合的方案。

### 4.4 双光源不同强度的影响

两个非相干点光源的强度在实际场景中也可能

是未知的。Řehaček 等<sup>[40-41]</sup>研究了同时估计中点、间距和相对强度时估计误差的量子极限和其优化方案。2017 年, Řehaček 等<sup>[40]</sup>通过计算量子 Fisher 信息矩阵, 发现当两个非相干点光源的强度不相等时, 在间距非常小的情况下, 瑞利魔咒会重现, 估计误差会变大, 但是优化测量相比直接成像仍然有很大的性能改进。2018 年, Řehaček 等<sup>[41]</sup>以基本模式和导数模式为基础构造了优化测量模式, 进一步确认了在区分两个非相干点光源问题上量子测量优越性的存在。2019 年, Bonsma-Fisher 等<sup>[42]</sup>针对两个非相干点光源强度不同的情况, 在 SPLICE 前加上了一个根据相对强度比来调整 SPLICE 装置的步骤, 相比直接成像, 通过数值模拟展现了在亚瑞利区域内优化测量的优越性。

### 4.5 轴向距离的分辨

2016 年, Ang 等<sup>[43]</sup>将两个非相干弱光源分辨的量子极限及其最优测量从一维成像推广到二维。而在实际场景中, 关于点光源分辨的另一个重要问题是轴向距离的分辨, 即三维成像问题。轴向距离和横向距离的分辨有许多不同的性质, 但是可以利用相同的量子参数估计工具, 通过计算量子 Cramer-Rao 误差下界来揭示误差的量子极限, 再通过具体测量的构造来尽可能达到或者接近量子极限。相关的工作可参见文献<sup>[44-50]</sup>。

### 4.6 多个点光源及扩展光源的估计问题

双点源的分辨率经常被作为成像系统的性能评估标准, 在参数估计理论的框架下, 能方便探讨多个点光源的估计误差, 并以此作为成像系统对多个点光源的分辨率。2019 年, Bisketzi 等<sup>[51]</sup>通过数值计算得到在相互间距任意小的情况下, 量子 Fisher 信息矩阵的非零本征值个数不超过 2, 这意味着, 当相互间距趋于零时, 能被有效估计出的独立参数不超过 2 个。Lupo 等<sup>[52-53]</sup>也对各种情况下的多点源位置估计进行了分析。

2019 年, Dutton 等<sup>[54]</sup>在量子参数估计的框架内研究了线光源长度的估计量子极限及其优化测量的问题。为了研究更多的实际成像场景, Tsang 等<sup>[55-57]</sup>将点光源分辨的问题推广到二维扩展源, 在这个问题上, 需要估计的参数是发光物体的各阶矩。对此, 横向空间模式分解复用的优越性仍然存在。

## 5 展望与总结

随着光子散粒噪声在现代应用中的主导作用越来越大, 需要从量子测量的角度去进行研究和优化。

量子估计和检测理论可以在一个统一的框架中解决这些测量优化问题,并揭示量子力学决定的基本极限。Tsang 等<sup>[23]</sup>通过将量子估计理论应用到两个非相干点光源分辨的问题中,揭示优化量子测量在这个问题中比直接成像更具有量子优越性。这个工作之后,许多研究者都开始关注基于优化测量的非相干成像问题。

这一领域的主要进展可以分成两条路线。一方面,科研人员开始利用各种类型的装置来实现优于直接成像的估计精度。越为简单的实验装置,被应用在实际中的希望也越大。另一方面,在理论上科研人员从两个点光源的简单模型开始,逐渐把这个理论推广到处理任何衍射极限下的物体的非相干成像问题上,结果表明空间模式分解复用的测量方案在这些更为复杂的场景下仍然具有独特的优势。

这些新型的优化测量方案在成像问题上具有很好的应用前景。作为一种远场技术,SPADE 非常适合于生物成像领域,在天文学和遥感领域应用也非常广泛。SPADE 方案只需要低损耗光学元件,并且对特征尺寸没有严格要求,因此制造更加简单。在超分辨荧光显微成像应用中,SPADE 是一种无源远场测量,通过从光中提取更多信息或减轻对源控制的需求,可以是超分辨技术的一种补充或替代。在天文学领域中,显然光源无法控制,由于 SPADE 采用传统的线性光学元件,可以说是天文成像的优越方案。在实际应用方面,需要在正确的波长上有效地实现 SPADE。在大气湍流和其他技术噪声存在的情况下,SPADE 的性能也需要评估。另外,如何将优化量子测量和关联成像<sup>[58]</sup>、计算成像<sup>[59]</sup>、点扫描移频超分辨显微成像<sup>[60]</sup>等技术结合起来,也是有待研究的十分有意义的问题。

### 参 考 文 献

- [1] den Dekker A J, van den Bos A. Resolution: a survey[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 1997, 14(3): 547.
- [2] de Villiers G, Pike E R. The limits of resolution [M]. Boca Raton: CRC Press, 2016.
- [3] Lord Rayleigh F R S. Investigations in optics, with special reference to the spectroscope [J]. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 1879, 8(49): 261-274.
- [4] Feynman R, Leighton R, Sands M. The Feynman lectures on physics: volume I [M]. New Jersey: Addison-Wesley, 1963.
- [5] Ronchi V. Resolving power of calculated and detected images [J]. *Journal of the Optical Society of America*, 1961, 51(4): 458-460.
- [6] di Francia T G. Resolving power and information[J]. *Journal of the Optical Society of America*, 1955, 45(7): 497-501.
- [7] Jaynes E T. Probability theory: the logic of science [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
- [8] Casella G, Berger R L. Statistical inference [M]. 2nd ed. California: Duxbury Press, 2002.
- [9] Harris J L. Resolving power and decision theory[J]. *Journal of the Optical Society of America*, 1964, 54(5): 606-611.
- [10] Harris J L. Diffraction and resolving power [J]. *Journal of the Optical Society of America*, 1964, 54(7): 931-936.
- [11] Farrell E J. Information content of photoelectric star images [J]. *Journal of the Optical Society of America*, 1966, 56(5): 578-587.
- [12] Falconi O. Limits to which double lines, double stars, and disks can be resolved and measured [J]. *Journal of the Optical Society of America*, 1967, 57(8): 987-993.
- [13] Tsai M J, Dunn K P. Performance limitations on parameter estimation of closely spaced optical targets using shot-noise detector model [EB/OL]. [2021-01-28]. [https://www.researchgate.net/publication/235055716\\_Performance\\_Limitations\\_on\\_Parameter\\_Estimation\\_of\\_Closely\\_Spaced\\_Optical\\_Targets\\_Using\\_Shot-Noise\\_Detector\\_Model](https://www.researchgate.net/publication/235055716_Performance_Limitations_on_Parameter_Estimation_of_Closely_Spaced_Optical_Targets_Using_Shot-Noise_Detector_Model).
- [14] Bettens E, van Dyck D, den Dekker A J, et al. Model-based two-object resolution from observations having counting statistics [J]. *Ultramicroscopy*, 1999, 77(1/2): 37-48.
- [15] van Aert S, den Dekker A J, van Dyck D, et al. High-resolution electron microscopy and electron tomography: resolution versus precision [J]. *Journal of Structural Biology*, 2002, 138(1/2): 21-33.
- [16] Ram S, Ward E S, Ober R J. Beyond Rayleigh's criterion: a resolution measure with application to single-molecule microscopy [J]. *National Academy of Sciences*, 2006, 103(12): 4457-4462.
- [17] Kolobov M I. Quantum imaging [M]. New York: Springer, 2007.
- [18] Moreau P A, Toninelli E, Gregory T, et al. Imaging with quantum states of light [J]. *Nature Reviews Physics*, 2019, 1(6): 367-380.
- [19] Genovese M. Real applications of quantum imaging [J]. *Journal of Optics*, 2016, 18(7): 073002.
- [20] Han S S, Yu H, Shen X, et al. A review of ghost



- imaging via sparsity constraints [J]. *Applied Sciences*, 2018, 8(8): 1379.
- [21] Helstrom C W. *Quantum detection and estimation theory*[M]. New York: Academic Press, 1976.
- [22] Helstrom C W. Resolution of point sources of light as analyzed by quantum detection theory[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1973, 19(4): 389-398.
- [23] Tsang M, Nair R, Lu X M. Quantum theory of superresolution for two incoherent optical point sources [J]. *Physical Review X*, 2016, 6(3): 031033.
- [24] Kay S M. *Fundamentals of statistical signal process: estimation theory and detection theory*[M]. Luo P F, Zhang W M, Liu Z, et al, Transl. Beijing: Electronic Industry Press, 2014.  
Kay S M. *统计信号处理基础——估计与检测理论 (卷 I、卷 II 合集)*[M]. 罗鹏飞, 张文明, 刘忠, 等, 译. 北京: 电子工业出版社, 2014.
- [25] Fabre C, Treps N. Modes and states in quantum optics[J]. *Reviews of Modern Physics*, 2020, 92(3): 035005.
- [26] Paúr M, Stoklasa B, Hradil Z, et al. Achieving the ultimate optical resolution[J]. *Optica*, 2016, 3(10): 1144-1147.
- [27] Tsang M. Resolving starlight: a quantum perspective [J]. *Contemporary Physics*, 2019, 60(4): 279-298.
- [28] Rehacek J, Paúr M, Stoklasa B, et al. Optimal measurements for resolution beyond the Rayleigh limit[J]. *Optics Letters*, 2017, 42(2): 231-234.
- [29] Nair R, Tsang M. Interferometric superlocalization of two incoherent optical point sources [J]. *Optics Express*, 2016, 24(4): 3684-3701.
- [30] Tang Z S, Durak K, Ling A. Fault-tolerant and finite-error localization for point emitters within the diffraction limit[J]. *Optics Express*, 2016, 24(19): 22004-22012.
- [31] Nair R, Tsang M. Far-field superresolution of thermal electromagnetic sources at the quantum limit [J]. *Physical Review Letters*, 2016, 117(19): 190801.
- [32] Tham W K, Ferretti H, Steinberg A M. Beating Rayleigh's curse by imaging using phase information [J]. *Physical Review Letters*, 2017, 118(7): 070801.
- [33] Yang F, Tashchilina A, Moiseev E S, et al. Far-field linear optical superresolution via heterodyne detection in a higher-order local oscillator mode[J]. *Optica*, 2016, 3(10): 1148-1152.
- [34] Yang F, Nair R, Tsang M, et al. Fisher information for far-field linear optical superresolution via homodyne or heterodyne detection in a higher-order local oscillator mode[J]. *Physical Review A*, 2017, 96(6): 063829.
- [35] Boucher P, Fabre C, Labroille G, et al. Spatial optical mode demultiplexing as a practical tool for optimal transverse distance estimation [J]. *Optica*, 2020, 7(11): 1621-1626.
- [36] Gessner M, Fabre C, Treps N. Superresolution limits from measurement crosstalk [J]. *Physical Review Letters*, 2020, 125(10): 100501.
- [37] Lu X M, Krovi H, Nair R, et al. Quantum-optimal detection of one-versus-two incoherent optical sources with arbitrary separation [J]. *Npj Quantum Information*, 2018, 4: 64.
- [38] Lupo C, Pirandola S. Ultimate precision bound of quantum and subwavelength imaging [J]. *Physical Review Letters*, 2016, 117(19): 190802.
- [39] Grace M R, Dutton Z, Ashok A, et al. Approaching quantum-limited imaging resolution without prior knowledge of the object location[J]. *Journal of the Optical Society of America A, Optics, Image Science, and Vision*, 2020, 37(8): 1288-1299.
- [40] Řehaček J, Hradil Z, Stoklasa B, et al. Multiparameter quantum metrology of incoherent point sources: towards realistic superresolution [J]. *Physical Review A*, 2017, 96(6): 062107.
- [41] Řehaček J, Hradil Z, Koutný D, et al. Optimal measurements for quantum spatial superresolution [J]. *Physical Review A*, 2018, 98: 012103.
- [42] Bonsma-Fisher K A G, Tham W K, Ferretti H, et al. Realistic sub-Rayleigh imaging with phase-sensitive measurements[J]. *New Journal of Physics*, 2019, 21(9): 093010.
- [43] Ang S Z, Nair R, Tsang M. Quantum limit for two-dimensional resolution of two incoherent optical point sources [C] // *CLEO: Applications and Technology 2016*, June 5-10, 2016, San Jose, California. Washington, D.C.: OSA, 2016: JTU5A.21.
- [44] Marar A, Kner P. Fundamental precision bounds for three-dimensional optical localization microscopy using self-interference digital holography [J]. *Biomedical Optics Express*, 2021, 12(1): 20-40.
- [45] Zhou Y Y, Yang J, Hassett J D, et al. Quantum-limited estimation of the axial separation of two incoherent point sources [J]. *Optica*, 2019, 6(5): 534-541.
- [46] Yu Z X, Prasad S. Quantum limited superresolution of an incoherent source pair in three dimensions [J]. *Physical Review Letters*, 2018, 121(18): 180504.
- [47] Prasad S, Yu Z X. Quantum-limited superlocalization and superresolution of a source pair in three

- dimensions[J]. *Physical Review A*, 2019, 99(2): 022116.
- [48] Prasad S. Quantum limited super-resolution of an unequal-brightness source pair in three dimensions [J]. *Physica Scripta*, 2020, 95(5): 054004.
- [49] Napoli C, Piano S, Leach R, et al. Towards superresolution surface metrology: quantum estimation of angular and axial separations [J]. *Physical Review Letters*, 2019, 122(14): 140505.
- [50] Wang B, Xu L, Zhang L. Quantum-limited localisation and resolution in three dimensions [EB/OL]. (2020-12-09)[2021-01-25]. <https://arxiv.org/abs/2012.05089>.
- [51] Bisketzi E, Branford D, Datta A. Quantum limits of localisation microscopy[J]. *New Journal of Physics*, 2019, 21(12): 123032.
- [52] Lupo C, Huang Z X, Kok P. Quantum limits to incoherent imaging are achieved by linear interferometry[J]. *Physical Review Letters*, 2020, 124(8): 080503.
- [53] Peng L, Lu X M. Generalization of Rayleigh's curse on parameter estimation with incoherent sources[EB/OL]. (2020-11-25)[2021-01-25]. <https://arxiv.org/abs/2011.07897>.
- [54] Dutton Z, Kerviche R, Ashok A, et al. Attaining the quantum limit of superresolution in imaging an object's length via predetection spatial-mode sorting [J]. *Physical Review A*, 2019, 99(3): 033847.
- [55] Tsang M. Subdiffraction incoherent optical imaging via spatial-mode demultiplexing[J]. *New Journal of Physics*, 2017, 19(2): 023054.
- [56] Tsang M. Quantum limit to subdiffraction incoherent optical imaging [J]. *Physical Review A*, 2019, 99: 012305.
- [57] Zhou S S, Jiang L. Modern description of Rayleigh's criterion[J]. *Physical Review A*, 2019, 99: 013808.
- [58] Wu Z W, Qiu X D, Chen L X. Current status and prospect for correlated imaging technique [J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2020, 57(6): 060001.  
吴自文, 邱晓东, 陈理想. 关联成像技术研究现状及展望[J]. *激光与光电子学进展*, 2020, 57(6): 060001.
- [59] Shao X P, Liu F, Li W, et al. Latest progress in computational imaging technology and application [J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2020, 57(2): 020001.  
邵晓鹏, 刘飞, 李伟, 等. 计算成像技术及应用最新进展 [J]. *激光与光电子学进展*, 2020, 57(2): 020001.
- [60] Chen Y C, Li C K, Hao X, et al. Progress of point scanning super-resolution microscopy based on frequency shifting [J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2020, 57(18): 180001.  
陈宇宸, 李传康, 郝翔, 等. 点扫描移频超分辨显微成像进展 [J]. *激光与光电子学进展*, 2020, 57(18): 180001.