

基于弱值的量子精密测量与量子层析研究进展

胥亮, 张利剑*

固体微结构国家实验室, 智能光传感与调控技术教育部重点实验室, 人工微结构科学与技术协同创新中心,
南京大学现代工程与应用科学学院, 江苏 南京 210093

摘要 为了描述对前、后选择的量子系统进行弱测量的测量结果, Aharonov、Albert 和 Vaidman 在 1988 年提出了弱值的概念。可观测量的弱值在取值上可以突破可观测量的最大本征值, 甚至可以取复数, 为弱值在量子力学基本原理和发展新型量子技术的研究中提供了丰富的物理内涵。本文主要回顾了弱值在量子精密测量和量子层析中应用的进展情况。弱值在量子精密测量中的应用被称为弱值放大, 弱值放大可以实现对微小物理量的放大测量, 因而在精密测量领域获得了广泛关注。由于信号的放大伴随着后选择成功概率的降低, 因此弱值放大技术的测量精度是否优于传统的测量方式一直是一个有争论的话题。本文先回顾了弱值放大和传统测量方式在测量精度方面的比较, 阐述了弱值放大方案在特定条件下的精度优势; 之后回顾了经过改进的弱值放大技术的最新进展。弱值在量子层析中的应用被称为直接量子层析, “直接”指的是该层析方案能够通过测量复数的弱值实现对量子态波函数概率幅的直接测量。本文还回顾了直接量子层析技术被推广并被应用到各种形式的量子态、量子过程、量子测量表征的理论和实验方案, 分析了直接量子层析技术的准确度、精度, 并回顾了提高直接层析技术效率的最新进展。最后, 本文总结了基于弱值的这两项技术的发展状况, 并提出了未来可能的发展方向。

关键词 量子光学; 弱测量; 弱值; 量子精密测量; Fisher 信息; 量子层析

中图分类号 O413.1

文献标志码 A

doi: 10.3788/LOP202158.1011004

Progress in Weak-Value-Based Quantum Metrology and Tomography

Xu Liang, Zhang Lijian*

National Laboratory of Solid State Microstructures, Key Laboratory of Intelligent Optical Sensing and Manipulation, Collaborative Innovation Center of Advanced Microstructures, and College of Engineering and Applied Sciences, Nanjing University, Nanjing, Jiangsu 210093, China

Abstract To describe the results of a weak measurement of post- and preselected quantum systems, Aharonov, Albert, and Vaidman proposed the concept of weak-value in 1988. Weak-values can lie far outside the eigenvalue spectrum of the observable and even be complex, which provides rich physical insight in the investigation of quantum foundations and development of quantum technologies. This paper mainly reviews the progress of weak-value applied to quantum metrology and tomography. The former, known as weak-value amplification (WVA), can amplify ultrasmall physical effects, thus attracting extensive interest in precision metrology. Because the amplified signals are received from the successful post-selection with low probabilities, whether the WVA outperforms the conventional measurement schemes in terms of precision remains unclear. Here, we review the comparison in precision between the WVA and the conventional measurement and clarify the potential advantages of WVA under certain circumstances. Subsequently, we review the recent progress in the modified WVA. The application of weak-value in quantum tomography is known as direct quantum tomography, in which “direct” refers to the ability to directly measure the probability amplitude of the wave function based on the measurable complex weak-value. We

收稿日期: 2021-04-08; 修回日期: 2021-04-20; 录用日期: 2021-04-23

基金项目: 国家重点研发计划(2017YFA0303703, 2018YFA0306202)、国家自然科学基金(91836303, 61975077, 61490711, 11690032)、中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(020214380068)

* E-mail: lijian.zhang@nju.edu.cn

review the generalization of the direct tomography method to characterize various quantum states, processes, and measurements. The accuracy, precision, and feasibility of the direct tomography protocol are analyzed. We also review the advances in promoting the operational efficiency of direct tomography. Finally, we draw conclusions regarding these two techniques based on weak-value and propose possible future research directions.

Key words quantum optics; weak measurement; weak-value; quantum metrology; Fisher information; quantum tomography

OCIS codes 270.5585; 280.4788; 120.0280

1 引言

量子态 $|\Psi\rangle$ 是量子力学中的最基本概念,它在最大程度上给出了该量子系统与外界发生相互作用的信息。由于量子测量会造成量子态坍缩,仅用 $|\Psi\rangle$ 来描述量子系统的状态不具有时间对称性。为了移除该不对称性,Aharonov、Bergmann、Lebowitz (ABL)提出了用双态矢量形式(two-state vector formalism) $\langle\Phi|\Psi\rangle$ 来描述量子系统的状态,其中正向演化的量子态 $|\Psi\rangle$ 由量子系统在 t 时刻之前的前选择来决定,而反向演化的量子态 $\langle\Phi|$ 则由量子系统在 t 时刻后的后选择来完成^[1-2]。在此描述下,利用 ABL 规则得到的可观测量的平均值不满足乘积规则^[3],为探索反直觉的量子现象提供了新视角^[4-6]。为了降低 t 时刻的观测对量子系统的影响,需要利用弱测量的方法,在几乎不干扰量子态的情况下对量子系统进行测量,从而使得测量结果同时受双态矢量前、后选择态的影响,测量仪器态对可观测量的测量结果可以用弱值来描述^[7]。与传统的冯·诺依曼测量不同,弱值的取值可以远远超过可观测量的本征值谱,甚至取复数。弱值的奇特性质以及构造弱值测量系统丰富的可调节自由度,为利用弱值研究量子力学基本原理、开发新型量子技术奠定了基础^[8-13]。

对于不同的前、后选择的量子系统及其可观测量,弱值可以被赋予不同的物理意义^[14]。在利用弱值探究量子力学基本理论(如 Hardy 悖论^[15-17]、三盒悖论^[18]、Leggett-Garg 不等式^[19-20]、量子互文性^[21]、量子轨迹理论^[22]、互补性原理^[23]等)时,弱值的实部可以被理解为条件平均值^[24],而弱值的虚部对应弱测量过程对量子系统的干扰^[25]。在该解释下,弱值可以用于研究和测量一些实际的物理量,比如远距离通信光纤的偏振模色散和偏振关联损耗^[26]、用于直接测量光子超光速的群速度(快光)和慢光效应^[27-28]、几何相位^[29-30]、光子双缝干涉由近场到远场的平均动量流,进而描绘出光子的波姆轨迹^[31]等。

本文聚焦于回顾两种基于弱值性质发展起来的量子技术:1)“弱值放大技术”,该技术反映的是弱值在量子精密测量中的应用,它通过构造取值远超本征值谱的弱值来实现对微小物理量的放大观测;2)“直接量子层析”技术,该技术反映的是弱值在量子层析中的应用,它将弱值作为广义的测量结果,与表征量子系统的参数(如波函数概率幅、密度矩阵的矩阵元等)建立对应关系,既给出了量子态的一种可操作的定义方式,又提供了一种直接、简洁、无需重构算法的量子系统表征手段。本文系统地回顾这两种量子技术的提出、应用、性能与发展。本文的具体安排如下:第二章介绍弱值放大的基本原理与推广,并列举弱值放大技术在测量微小物理量方面的应用。第三章介绍评价量子精密测量技术的重要指标——量子 Fisher 信息与信噪比,并根据这两个指标系统地分析弱值放大技术的性能。在此基础上,本文回顾了利用量子资源提升弱值放大技术的重要工作,并且总结了在各种实际噪声存在的情况下,弱值放大技术可能存在的精度优势。该章最后回顾了几种经过改进的弱值放大技术。第四章介绍利用弱值进行直接量子层析的基本理论及其在表征多种量子态(混合态、高维量子态、纠缠态等)、量子过程、量子测量中的应用。第五章介绍评价量子层析性能(准确度、精度)的重要指标,如量子态的迹距离、平均保真度、方差等,并回顾了强测量在改善直接量子层析性能中的重要作用。该章最后回顾了经过改进的直接层析技术,进一步提升了直接层析技术的可行性与实用性。

2 弱值放大的基本原理与应用

2.1 弱值放大的基本原理

如图 1 所示,考虑一个本征态为 $| - 1 \rangle$ 和 $| + 1 \rangle$ 的二能级量子系统,将量子系统的初态前选择为 $|\psi_i\rangle$,选取量子系统的可观测量 $\mathbf{A} = | + 1 \rangle \langle + 1 | - | - 1 \rangle \langle - 1 |$ 。根据冯·诺依曼测量理论框架^[32],对量子系统进行测量时,需要将测量仪器态 $|\Phi\rangle$ 与量子系统通过相互作用的哈密顿量 $\mathbf{H} = g \delta(t - t_0) \mathbf{A} \mathbf{P}$

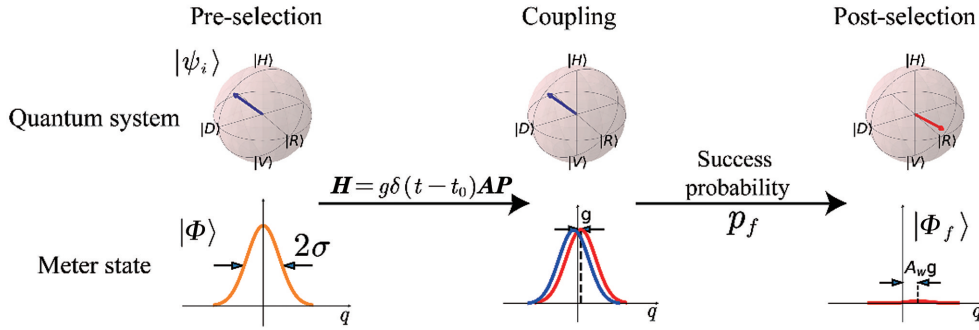


图 1 弱值放大的原理图

Fig. 1 Schematic for the weak-value amplification

耦合起来, 形成量子系统与测量仪器的联合态 $|\Psi_j\rangle = \exp(-i\int \mathbf{H} dt) |\psi_i\rangle |\Phi\rangle$, 其中: g 为耦合强度, $\delta(t-t_0)$ 表示该哈密顿量在 t_0 时刻的瞬时相互作用, \mathbf{P} 为测量仪器态的可观测量。本文以在 p 空间上平均值为 $\langle \mathbf{P} \rangle = 0$ 、方差为 $\langle \mathbf{P}^2 \rangle = 1/(4\sigma^2)$ 的高斯测量仪器态 $|\Phi\rangle = \int dq \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} \exp(-\frac{q^2}{4\sigma^2}) |q\rangle = \int dp (\frac{2\sigma^2}{\pi})^{1/4} \exp(-\sigma^2 p^2) |p\rangle$ 为例 ($|p\rangle$ 和 $|q\rangle$ 分别为可观测量 \mathbf{P} 和 \mathbf{Q} 的本征态, p 与 q 互为共轭变量), 则量子系统与测量仪器的联合态 $|\Psi_j\rangle = |-1\rangle\langle -1|\psi_i\rangle|\Phi(q+g)\rangle + | +1\rangle\langle +1|\psi_i\rangle|\Phi(q-g)\rangle$ 。当 $g \gg \sigma$ 时, 该测量过程被称为强测量, 此时, 通过观测测量仪器态可以清晰地读取量子态坍缩到的 \mathbf{A} 的本征态; 通过多次强测量, 可以得到测量仪器态的平均位移为 $g\langle \mathbf{A} \rangle$ 。当 $g \ll \sigma$ 时, 测量过程被称为弱测量, 由于几乎不能从弱测量结果中得到量子系统的信息, 且经过弱测量的量子系统几乎保持 $|\psi_i\rangle$ 不变, 因此暂不读取测量仪器态, 而是将联合态投影到量子系统态 $|\psi_f\rangle$ 进行后选择, 后选择成功的测量仪器态为 $|\Phi_f\rangle = \langle \psi_f | \Psi_j \rangle / \sqrt{p_f}$, 其中 p_f 为后选择成功的概率。在弱测量极限下, 耦合过程的么正算符可以近似为 $U = \exp(-i\int \mathbf{H} dt) \approx 1 - ig\mathbf{A}\mathbf{P}$, 此时后选择成功的测量仪器态近似为

$$|\Phi_f\rangle \approx \langle \psi_f | (1 - ig\mathbf{A}\mathbf{P}) | \psi_i \rangle | \Phi \rangle / \sqrt{p_f} = \langle \psi_f | \psi_i \rangle (1 - ig\langle \mathbf{A} \rangle_w \mathbf{P}) | \Phi \rangle / \sqrt{p_f}, \quad (1)$$

式中: $\langle \mathbf{A} \rangle_w = \langle \psi_f | \mathbf{A} | \psi_i \rangle / \langle \psi_f | \psi_i \rangle$ 定义为弱值。在满足 $\max_n g \frac{|\langle \psi_f | \mathbf{A}^n | \psi_i \rangle|^{1/n}}{|\langle \psi_f | \psi_i \rangle|} \ll \sigma$ 的条件下, $1 - ig\langle \mathbf{A} \rangle_w \mathbf{P} \approx \exp(-ig\langle \mathbf{A} \rangle_w \mathbf{P})$, 此时 $|\Phi_f\rangle \approx \langle \psi_f | \psi_i \rangle |\Phi(q - g\langle \mathbf{A} \rangle_w)\rangle / \sqrt{p_f}$, 其中 $p_f \approx |\langle \psi_f | \psi_i \rangle|^2$ 。假设弱值为纯实数, 上式表明后选择成功的测量仪器态在 q 空间的位移为 $g\langle \mathbf{A} \rangle_w$ 。当 $\langle \psi_f | \psi_i \rangle \rightarrow 0$ 时, $\langle \mathbf{A} \rangle_w$ 的取值可以远大于可观测量 \mathbf{A} 的本征值, 相较于无后选择的情况, 测量仪器态在 q 空间的平均位移被放大了 $\langle \mathbf{A} \rangle_w / \langle \psi_i | \mathbf{A} | \psi_i \rangle$ 倍。这种利用弱值放大效应来测量微小物理量 g 的技术被称为弱值

放大 (WVA)。公式 $\max_n g \frac{|\langle \psi_f | \mathbf{A}^n | \psi_i \rangle|^{1/n}}{|\langle \psi_f | \psi_i \rangle|} \ll \sigma$ 所示的近似被称为弱值放大近似。

2007 年, Jozsa^[33] 推导得到了弱值为复数的情况下, 其实部和虚部分别对应测量仪器态在不同表象下的位移 $\langle \mathbf{Q} \rangle_f = g \text{Re}(\langle \mathbf{A} \rangle_w)$ 和 $\langle \mathbf{P} \rangle_f = \frac{g}{2\sigma^2} \text{Im}(\langle \mathbf{A} \rangle_w)$, 其中 $\langle \cdot \rangle_f$ 代表可观测量在 $|\Phi_f\rangle$ 下的平均值且假定 $d\sigma/dt = 0$ 。对于更一般的测量仪器态的可观测量 \mathbf{M} , 其在 $|\Phi_f\rangle$ 下的位移由弱值的实部和虚部共同决定, 可以写为

$$\langle \mathbf{M} \rangle_f = ig \text{Re}(\langle \mathbf{A} \rangle_w) \langle [\mathbf{P}, \mathbf{M}] \rangle + g \text{Im}(\langle \mathbf{A} \rangle_w) (\langle \mathbf{P}, \mathbf{M} \rangle - 2\langle \mathbf{P} \rangle \langle \mathbf{M} \rangle), \quad (2)$$

式中: $\langle \cdot \rangle$ 代表算符在 $|\Phi\rangle$ 下的平均值; $[\mathbf{P}, \mathbf{M}] = \mathbf{P}\mathbf{M} - \mathbf{M}\mathbf{P}$; $\langle \mathbf{P}, \mathbf{M} \rangle = \mathbf{P}\mathbf{M} + \mathbf{M}\mathbf{P}$ 。Parks 和 Gray^[34] 推导了弱值为复数的情况下, 任意可观测量 \mathbf{M} 在测

量仪器态 $|\Phi_f\rangle$ 下的方差 $\Delta_{|\Phi_f\rangle}^2 \mathbf{M}$, 并认为当 $\mathbf{M} = \mathbf{P}$ 或 $\mathbf{M} = \mathbf{Q}$ 时, 该方差与弱值的虚部以及可观测量 \mathbf{P} 或 \mathbf{Q} 在测量仪器态 $|\Phi\rangle$ 下的三阶中心矩相关。由于

作为复数的弱值能够同时引起测量仪器态在 q 和 p 空间的位移,因此 Knee 和 Pan 用量子态的准概率分布(即 Wigner 函数)来描述 $|\Phi\rangle_f$ 在 q - p 空间的联合分布情况,以更直观地描述任意可观测量在 $|\Phi\rangle_f$ 下的位移与方差^[35-36]。实际上,测量仪器态的形式除了是常用的高斯分布态外,还可以是更为一般的量子态,甚至可以是混合态^[37-51]。

从上文的推导可以看出,弱值放大理论依赖于两个近似条件的成立。条件之一为弱测量近似 ($g \ll \sigma$),该近似条件为利用冯·诺依曼测量提取前、后选择量子系统的弱值提供了可能。条件之二为弱值放大近似,该近似决定了不能在测量仪器态 $|\Phi\rangle_f$ 下观测到固定耦合强度 g 无限放大的位移。当 $\langle \mathbf{A} \rangle_w$ 很大时,公式 $\max_n g \frac{|\langle \psi_f | \mathbf{A}^n | \psi_i \rangle|^{1/n}}{|\langle \psi_f | \psi_i \rangle|} \ll \sigma$ 中 $n > 1$ 的高阶项不能被忽略。Wu 等^[52]引入广义高阶弱值 $\langle \mathbf{A} \rangle_w^{m,l}$ 的概念,并将测量仪器态的位移展开至耦合强度的二次项,结果发现测量仪器态的位移随着 $|\langle \psi_f | \psi_i \rangle|$ 的减小存在一个极值。当满足 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$ 时,可以得到 $\langle \mathbf{Q} \rangle_f$ 和 $\langle \mathbf{P} \rangle_f$ 关于任意耦合强度 g 的精确表达^[53-61]。2020 年, Pan 等^[36]在实验工作中给出了测量仪器态在不同耦合强度下的位移随后选择量子态的变化趋势,展示了从强测量到弱测量再到弱值放大极限下,测量仪器态的位移由正比于可观测量 \mathbf{A} 在后选择态 $|\psi_f\rangle$ 下的平均值 $\langle \mathbf{A} \rangle_f$ 转变为正比于 $g \langle \mathbf{A} \rangle_w$ 的过程。

在利用弱值描述测量仪器态以及前、后选择的量子系统相互作用后的位移时,在 $\langle \psi_f | \psi_i \rangle = 0$ 的条件下, $\langle \mathbf{A} \rangle_w$ 的定义是缺失的,这种情况被称为正交弱测量。为了沿用弱值的概念描述正交弱测量时测量仪器态的位移, Wu 等^[52]提出了正交弱值 $\langle \mathbf{A} \rangle_{ow}$ 的概念,在正交弱测量情况下,测量仪器态的位移与正交弱值之间存在简洁的正比关系。Nakamura 等^[57]在满足 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$ 的条件下给出了 $\langle \mathbf{Q} \rangle_f$ 和 $\langle \mathbf{P} \rangle_f$ 关于任意耦合强度 g 的精确表达, Pang 等^[62]系统分析了正交弱测量和接近正交弱测量时,测量仪器态位移的具体表现。

2.2 弱值放大的应用

1991 年, Ritchie 等^[63]首先在光学系统中实现了对弱值的测量。在该实验中,研究者将光子的偏振自由度作为量子系统,将光子的横向空间分布作为测量仪器态,利用偏振片实现了对量子系统的前、后选择,将由双折射晶体引起的光束横向位移放大了近 20 倍。该实验所展示的在光学系统中测量弱

值的实验思路为利用弱值放大技术测量微小物理量提供了参考。2008 年, Hosten 等^[64]利用弱值放大实现了对光子自旋霍尔效应引起的光束横向位移放大 10000 倍的测量,其测量灵敏度在未隔离空气扰动和机械振动下可达 0.1 nm,揭开了弱值放大技术在测量微小物理量方面应用的序幕;2009—2010 年, Dixon 团队^[65-66]利用弱值放大技术对处于 Sagnac 干涉仪中的反射镜的微小偏转进行了测量,测量灵敏度可达 400 frad;2009 年, Qin 等^[67]将弱值放大技术用于研究平板空气-玻璃界面反射的自旋霍尔效应^[67];2010 年, Brunner 等^[68]结合光学探测器在时域和频域的分辨率,在理论上证明了弱值放大技术在测量纵向相位的分辨率极限上比传统的干涉方法高三个数量级;2010 年, Starling 等^[69]发现用弱值放大技术测量相位可以达到与平衡零差探测器相近的灵敏度,并用 2 mW 连续激光实现了光学频率灵敏度为 129 kHz/ $\sqrt{\text{Hz}}$ 的精密测量^[70];2011 年, Feizpour 等^[71]提出了对单光子非线性效应进行放大测量的理论方案, Zilberberg^[72]提出了对电荷传感进行放大测量的理论方案,还有学者提出了基于弱值放大的干涉光学自准直方案^[73]、基于光学杠杆增强的角度偏转传感方案^[74]和旋光性测量^[75]方案;2012 年, Zhou 等^[76]利用弱值放大技术研究了光在纳米金属薄膜上的自旋霍尔效应, Gorodetski 等^[77]同时利用弱值的实部和虚部分别在位置和动量空间上观测了等离激元的自旋霍尔效应, Stone 等^[78]将对温度变化的感知转化为对光束偏转的测量,利用弱值放大技术实现了灵敏度为 0.2 mK 的温度测量;2013 年, Viza 等^[79]利用宽脉冲对物体移动导致的多普勒效应进行了弱测量,通过对脉冲到达时间进行测量实现了对灵敏度为 400 fm/s 的物体运动速度的放大测量;2013 年, Jayaswal 等^[80]实现了对光在全反射时产生的 Goos-Hänchen 位移的放大测量;2011—2013 年, Xu 等^[81-82]利用白光光源对光脉冲延迟实现了阿秒级分辨率的测量;2014 年, Jayaswal 等^[83]实现了对 Imbert-Fedorov 效应的测量;同年, Magaña-Loaiza 等^[84]利用含有角动量的光学模式作为测量仪器态,首次实现了对径向旋转角度放大 100 倍的测量;2017 年, Hallaji 等^[85]在实验中实现了对单光子非线性效应的放大,使得观测到的单光子造成的非线性相位变为原来的 8 倍;2017—2018 年, 文双春团队利用弱值放大技术对光子在光学超表面上的自旋霍尔效应^[86]、石墨烯上的古斯汉欣位移^[87]、外尔半

金属在动量空间中的外尔点的分离^[88]进行了观测。2021 年,Steinmetz 等^[89]在光学芯片上实现了对光学频率的弱值放大测量,在 2 mW 的光功率下,测量精度可以达到 $19 \text{ Hz}/\sqrt{\text{Hz}}$ 。

3 弱值放大技术的性能与发展

随着弱值放大效应在微小物理量测量方面的广泛应用,人们对弱值放大技术能否提供超越传统测量方案的测量精度展开了激烈讨论。3.1 节介绍量子精密测量理论以及评价量子精密测量方案的两个重要指标——量子 Fisher 信息和信噪比;3.2 节回顾量子精密测量理论应用于分析弱值放大的测量精度;3.3 节回顾量子资源应用于弱值放大以提升测

量精度的若干方案;3.4 节回顾弱值放大技术在抵抗测量装置动力学噪声以及在非理想探测情况下展现出的测量精度优势;3.5 节回顾若干经过改进的弱值放大方案,这些方案进一步提升了弱值放大方案的参数估计精度以及抵抗噪声的能力。

3.1 量子精密测量理论

在量子精密测量理论中,对单个参数 g 进行估计的一般流程如图 2 所示:首先制备一个量子态 ρ ,并将其作为指针,将其在含有参数 g 的过程 U_g 中进行么正演化,演化结果为含有待测参数 g 的量子态 $\rho_g = U_g \rho U_g^\dagger$;接着对 ρ_g 进行正值算子测量 (POVM) Π_x 得到概率分布 $P(x|g)$;最后利用适当的估计方法 $\Omega(x)$ 实现对参数 g 的估计。

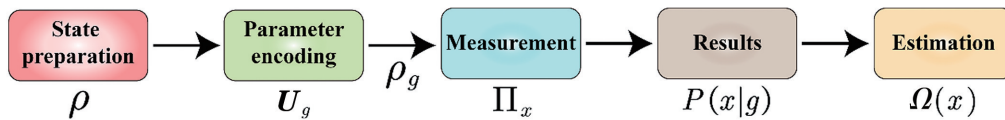


图 2 量子精密测量的一般过程

Fig. 2 General procedure of quantum metrology

对参数 g 估计的精度是指多次测量结果相互接近的程度,通常用方差 $\delta^2 g$ (或标准差) 来量化。对于一个特定的概率分布 $P(x|g)$,不同的估计方法得到的 g 的估计值的方差存在一个下限,即 Cramér-Rao 界限: $\delta^2 g \geq 1/(\nu F_g)$, 其中 ν 为测量次数, F_g 为概率分布 $P(x|g)$ 关于参数 g 的 Fisher 信息。Fisher 信息量化了概率分布中蕴含的关于参数估计精度的信息量,描述了概率分布 $P(x|g)$ 对参数 g 改变的敏感程度。Fisher 信息 F_g 对量子态的混合具有凸性,对多次独立的测量具有可加性。Cramér-Rao 界限是一个渐进界限,在无偏估计中,使用有效的估计方法(如贝叶斯估计和最大似然估计)对足够多次的测量结果进行估计能够渐进达到该精度极限。

上面的讨论均固定量子态 ρ_g 和测量算符 Π_x , 只针对估计方法 $\Omega(x)$ 进行优化;然而采用不同的测量算符对量子态 ρ_g 进行测量时,会得到不同的概率分布,需要进一步对测量方式进行优化,使得得到的概率分布关于参数 g 的 Fisher 信息最大,该最大的 Fisher 信息被称为量子 Fisher 信息 $Q_g = \max_{\{\Pi_x\}} F_g$ 。量子 Fisher 信息 Q_g 量化了量子态 ρ_g 对于参数 g 改变的敏感程度^[90-91]。

为了探索量子精密测量的精度极限,需要对入射指针态 ρ 以及演化过程 U_g 进行优化,以最大化 ρ_g 的量子 Fisher 信息。 m 个经典关联的指针态

$\rho^c = \rho^{(1)} \otimes \rho^{(2)} \otimes \dots \otimes \rho^{(m)}$ 的最大量子 Fisher 信息 $Q_g = m Q_g^{(j)}$, 其中 $Q_g^{(j)}$ 为量子态 $\rho_g^{(j)}$ 的量子 Fisher 信息。根据 Cramér-Rao 界限,可以得到 ρ_g^c 对参数 g 估计的精度极限满足 $\delta g \propto 1/\sqrt{m}$, 该极限称为标准量子极限 (SQL)。在光学精密测量中,平均光子数为 N 的光学相干态在线性光学干涉仪中的相位估计精度极限为 $\delta \varphi \propto 1/\sqrt{N}$, 该极限与标准量子极限的表现相同,被称为散粒噪声极限 (SNL)^[92]。 m 个指针态的最大纠缠态 ρ^e 对参数 g 估计的精度极限满足 $\delta g \propto 1/m$, 该极限称为海森堡极限 (HL), 在使用相同指针态数目的情况下,海森堡极限的精度相较标准量子极限提升了 \sqrt{m} 倍^[93-96]。

除了测量精度以外,信噪比 (SNR) 也是衡量测量系统性能的一个重要指标。在上文所描述的量子精密测量方案中,信噪比定义为

$$\text{SNR} = \frac{\sqrt{\nu} \bar{g}}{\sqrt{\text{Var}(g)}}, \quad (3)$$

式中: $\bar{g} = \int g P(g|x) dx$ 和 $\text{Var}(g) = \int (g - \bar{g})^2 \cdot P(g|x) dx$ 分别为待估参数 g 的平均值和方差,其中条件概率 $P(g|x) = P(x|g)P(g)/P(x)$ 。从 (3) 式中可以看出,信噪比评价的是量子态 ρ_g 经过量子测量 Π_x 得到概率分布 $P(x|g)$ 后,利用对所有测量结果求平均值的估计方法得到的参数估计值与其涨落之间的比值。因此,当用相同的测量算符 Π_x

对量子态 ρ_g 进行测量,并且采用求测量结果平均值的估计方法能够饱和 Cramér-Rao 界限时,利用经典的 Fisher 信息和信噪比这两个指标评价一个测量方案的测量精度是等价的。进一步地,如果该测量算符 Π_x 是满足经典 Fisher 信息等于量子 Fisher 信息的最优测量时,信噪比与量子 Fisher 信息在评价一个量子精密测量方案的测量精度上是等价的。

3.2 弱值放大方案的精度分析

在弱值放大方案中,测量系统的初始态为量子系统和测量仪器的联合态 $|\Psi\rangle = |\psi_i\rangle \otimes |\Phi\rangle$,演化过程遵循相互作用的哈密顿量 $H = g\delta(t-t_0)AP$,得到相互耦合的联合态为 $|\Psi_j\rangle$,耦合强度 g 为待估参数。当 $A = | +1\rangle\langle +1| - | -1\rangle\langle -1|$ 时,测量仪器态为 1) 式所示的高斯态,则 $Q_j = 1/\sigma^2$ 。在传统的测量方案中,测量仪器态 $|\Phi\rangle$ 经过哈密顿量 $H = g\delta(t-t_0)P$ 的演化,得到 $|\Phi_c\rangle, |\Phi_r\rangle$ 关于参数 g 的量子 Fisher 信息为 $Q_c = 4\langle P^2 \rangle = 1/\sigma^2 = Q_j$ ^[97]。弱值放大的后续过程包括对量子系统的后选择以及对测量仪器态进行量子测量,研究证明,在测量阶段的量子资源(如使用非经典态进行后选择等)并不会提高对参数估计的精度极限^[93-94];因此,联合态 $|\Psi_j\rangle$ 包含的量子 Fisher 信息 Q_j 决定了弱值放大方案中量子 Fisher 信息的上限,即在上述典型的弱值放大技术理论模型下,弱值放大方案的测量精度始终不优于传统的测量方案^[41,98-99],然而后选择过程可以将几乎全部的关于参数的测量精度信息集中于后选择成功的少量样本中,使其有可能在特定的环境下发挥测量精度的优势^[100-102]。

Zhang 等^[103]对经历后选择过程的经典或量子 Fisher 信息在子系统各个组分上的分布进行了详细分析。对联合态 $|\Psi_g\rangle$ 进行后选择时,将量子系统投影到后选择态 $|\phi_f\rangle$ 上,联合态的量子 Fisher 信息 Q_j 被分为三部分:概率为 p_f 的后选择成功时测量仪器态 $|\Phi_f\rangle$ 所包含的量子 Fisher 信息 Q_f , 概率为 $p_r = 1 - p_f$ 的后选择失败时测量仪器态 $|\Phi_r\rangle$ 所包含的量子 Fisher 信息 Q_r , 后选择成功或失败的概率分布 $\{p_f, p_r\}$ 中所包含的关于参数的经典 Fisher 信息 F_p 。即

$$Q_j = p_f Q_f + (1 - p_f) Q_r + F_p. \quad (4)$$

人们通常只关注后选择成功的测量仪器态 $|\Phi_f\rangle$ 所包含的量子 Fisher 信息 $p_f Q_f$, 以及后选择成功的概率 p_f 所包含的经典 Fisher 信息 F_p , 因此通常定义弱值放大过程的量子 Fisher 信息为 $Q_{wva} = p_f Q_f + F_p$ 。

接下来,在满足公式 $\max_g \frac{|\langle \psi_f | A^n | \psi_i \rangle|^{1/n}}{|\langle \psi_f | \psi_i \rangle|} \ll \sigma$

σ 所示的弱值放大近似条件下,比较 Q_{wva} 与 Q_j 。此时,后选择成功的概率 p_f 为参数 g 的常函数,因此 $F_p = 0$ 。在平衡的测量仪器态条件下($\langle P \rangle = 0$)可以得到 $p_f Q_f = 4|\langle \psi_i | A | \psi_f \rangle|^2 \langle P^2 \rangle$ 和 $Q_j = 4\langle P^2 \rangle$ ^[104-105]。因此,当量子系统的前后选择态满足 $|\psi_f\rangle = A|\psi_i\rangle / \langle A^2 \rangle^{1/2}$ 时, $p_f Q_f = Q_{wva} = Q_j = Q_c$, 即后选择成功的测量仪器态可以承载联合态中所有关于参数 g 的量子 Fisher 信息,并且最优化的弱值放大方案对参数估计的精度极限与传统测量方案的精度极限相同。当 $|\langle \psi_f | \psi_i \rangle|$ 逐渐趋近于 0 时,弱值放大近似条件 $\max_g \frac{|\langle \psi_f | A^n | \psi_i \rangle|^{1/n}}{|\langle \psi_f | \psi_i \rangle|} \ll \sigma$ 不满足,此时仍然选择 $|\psi_f\rangle = A|\psi_i\rangle / \langle A^2 \rangle^{1/2}$, $p_f Q_f$ 会逐渐减小, F_p 会逐渐增大,保持 $p_f Q_f \sim O(g^2)$, 因此弱值放大的量子 Fisher 信息 Q_{wva} 仍与 Q_j 十分接近^[106]。

若要提取量子态中参数的信息,就需要对量子态进行最优的量子测量,将关于参数的所有信息由量子态转化到经典的概率分布中,使得到的概率分布关于参数 g 的经典 Fisher 信息 F_f 等于 Q_f 。有两种特殊情况是弱值为纯实数或纯虚数,在当前耦合方式下,它们对应的最优测量分别为 q 或 p 空间的投影测量。由于这两种投影测量在实验操作中容易实现,因此基于纯实数或纯虚数的弱值放大方案得到了广泛应用。以下将基于纯实数或纯虚数的弱值放大分别简称为“实弱值放大”或“虚弱值放大”。

在虚弱值放大方案中,对耦合系数 g 的测量可以从传统测量方式在 q 空间的测量转化到该方式在 p 空间的测量。在最优化精度的虚弱值放大方案中, $|\psi_i\rangle$ 与 $|\psi_f\rangle$ 的选择均与耦合强度相关。2017 年, Li 等^[107]模拟了利用自适应方法寻找最优测量精度的虚弱值放大方案的过程。在最优的 $|\psi_i\rangle$ 和 $|\psi_f\rangle$ 下,对测量仪器态进行测量得到的概率分布的经典 Fisher 信息满足 $p_f F_f^{(p)} = p_f Q_f = 4\langle P^2 \rangle$ 。值得注意的是,该结论对测量仪器为混合态的情况仍然成立,可以通过对测量仪器态加入经典噪声增大 $\langle P^2 \rangle$ 来获得更高的测量精度。这一重要结论说明虚弱值放大方案在利用白光测量光学相位、利用压缩态提高测量信噪比、利用混合相干态实现海森堡斜率的测量精度以及抵抗动力学噪声等方面发挥了重要作用。

在最大化 $p_f Q_f$ 的条件 $|\psi_f\rangle = A|\psi_i\rangle / \langle A^2 \rangle^{1/2}$

下,弱值 $A_w = \langle \mathbf{A}^2 \rangle / \langle \mathbf{A} \rangle$ 始终为实数,并且 $p_f = |\langle \mathbf{A} \rangle|^2$ 。因此,在实弱值放大中可以灵活地选取 $|\psi_i\rangle$ 和 $|\psi_f\rangle$,使后选择成功概率 p_f 在满足弱值放大近似的一定范围内变化,而始终保持经典 Fisher 信息 $p_f F_f^{(q)} = p_f Q_f = Q_j$ 。该性质为实弱值放大方案在灵活选择探测光子数(以应对光电探测器的噪声与饱和)方面提供了最优的解决方案^[108]。

3.3 量子增强的弱值放大方案

在量子精密测量中,使用纠缠态、压缩态等量子资源可以将参数的测量精度极限由散粒噪声极限提升到海森堡极限。上文所介绍的弱值放大过程仅使用了单粒子的叠加态,鉴于此,研究人员开始探讨是否有可能利用量子资源提升弱值放大的测量精度。下面主要介绍三类工作,分别从弱值放大技术中的量子系统态、测量仪器态以及量子系统与测量仪器之间的耦合方式着手,利用量子资源提升弱值放大的测量精度。

2014 年,Pang 等^[109]从量子系统的前、后选择态出发,在理论上证明了利用 n 个纠缠的量子比特作为量子系统前选择态 $|\Psi_i\rangle$,在保持弱值相同的情况下可以将后选择成功概率提高 n 倍(与 n 个独立的量子比特相比),在保持后选择成功概率不变的情况下可以将弱值提升为原来的 \sqrt{n} 倍;这两种提升效果均可以使弱值放大的测量精度提升至海森堡极限。Chen 等^[110]与 Stárek 等^[111]分别在光子系统的实验中验证了该理论。2015 年,Pang 等^[112]在理论上分析了利用纠缠的量子系统态可以实现对探测器读出噪声的抑制。

2015 年,Pang 等^[113]从测量仪器态出发,利用压缩相干态作为测量仪器态,分别基于平均测量结果所对应的信噪比以及最大似然估计所对应的 Fisher 信息这两个指标,比较了弱值放大方案和传统测量方案。在信噪比的相关分析中发现,在相互作用的哈密顿量 $\mathbf{H} = g\mathbf{A}\mathbf{Q}\delta(t-t_0)$ 以及虚弱值放大的情形下,弱值放大与传统测量方式的信噪比分别满足 $\text{SNR}_{\text{wva}} \propto \text{Var}(\mathbf{Q})$ 和 $\text{SNR}_{\text{cm}} \propto 1/\text{Var}(\mathbf{M})$,由于压缩相干态下测量仪器态的共轭可观测量 \mathbf{Q} 和 \mathbf{M} 不满足最小不确定性关系, $\text{Var}(\mathbf{Q})\text{Var}(\mathbf{M})$ 大于满足最小不确定性关系的相干态,因此利用压缩相干态的弱值放大与传统测量方式的信噪比之比 $\text{SNR}_{\text{wva}}/\text{SNR}_{\text{cm}}$ 相较于相干态的测量仪器会有所提高。在利用量子 Fisher 信息 Q 对弱值放大与传统测量方式的信噪比进行分析后发现,最优化选择下弱值放大方案下的量子 Fisher 信息 $Q_{\text{wva}} =$

$4\langle \mathbf{A}^2 \rangle_i \text{Var}(\mathbf{Q})$,最直接(量子系统初始态为 \mathbf{A} 的本征态, $|\langle \mathbf{A} \rangle_i| = 1$)的传统测量方式下的量子 Fisher 信息 $Q_{\text{cm}} = 4\text{Var}(\mathbf{Q})$,其中 $\langle \cdot \rangle_i$ 为可观测量在前选择态下的平均值,可以看出 $Q_{\text{wva}} \leq Q_{\text{cm}}$ 。

2015 年,Zhang 等^[103]在理论上提出了将量子比特系统和相干态测量仪器在相空间进行耦合的方案,耦合哈密顿量为 $\mathbf{H} = -g\delta(t-t_0)\mathbf{A}\mathbf{n}_m$,其中 \mathbf{n}_m 为光子数算符。分析后发现,在这种耦合方式下,联合态关于参数 g 的量子 Fisher 信息 Q_j 可以达到海森堡极限的尺度($Q_j \sim O(n^2)$,以下称为“海森堡尺度”),并且量子系统的投影测量可以达到该海森堡尺度的精度极限,即后选择成功或失败的概率分布所包含的经典 Fisher 信息 $F_p \propto n^2$ ^[103-114]。在实验上,Chen 等^[115]利用非线性光纤中的交叉相位调制效应实现了相空间耦合的哈密顿量,耦合强度 g 为待测的三阶非线性系数。Chen 等采用两种测量仪器态及对应的测量方式实现了对参数 g 的测量。第一种测量仪器态为相干态^[115],采用 Zhang 等^[103]提出的理论框架对经过耦合的量子系统单光子末态进行投影测量,实现对参数 g 的估计(其精度达到海森堡尺度的原因目前还是一个开放的问题)。第二种测量仪器态为相干态的混合^[116]。其采取的测量方式如下:对经过后选择的测量仪器末态的光子统计分布进行测量,然后利用前文所述的虚弱值放大技术结合经典混合技术,将平均光子数为 N 的光学态沿相空间径向的光子数涨落由相干态 $\delta n = \sqrt{N}$ 增加到 $\delta n = N$,对参数 g 实现了海森堡尺度的估计精度,该估计精度的提升主要来自相干态经典混合的贡献。

3.4 弱值放大在特定噪声存在下的优势

噪声是阻碍精密测量方案实现量子极限测量精度的重要因素,为了避免噪声对测量精度的影响,通常需要设计精良的实验器件以及控制严格的实验环境来隔绝噪声,这为实用的精密测量技术增加了一定成本。为了提高测量技术的实用性,发展具有噪声容忍度的测量方案具有重要意义。鉴于弱值放大方案在未隔绝噪声的前提下测量微小物理量所取得的成功,人们开始具体研究弱值放大方案在有噪声存在的实验条件下,相比传统测量方案是否具有测量精度的优势^[117]。2013 年,Knee 等^[118]在理论上证明了弱值放大方案在量子系统的退相干噪声下测量量子系统的相位参数时,相较于传统测量方式不具备测量精度的优势。2016 年,Pang 等^[119]在理论

上得出对耦合强度进行测量时,大的弱值会对测量过程中由量子系统退相干导致的系统误差具有抑制作用的结论。本节主要回顾在光学精密测量中,弱值放大方案与传统测量方式在两类噪声存在下的性能比较。其中,第一类噪声是由空气抖动、光学器件偏转或位移等导致的动力学噪声,第二类噪声是光电探测器在响应过程中的电噪声以及饱和造成的非线性响应。

在将高斯光束的空间模式作为测量仪器态的弱值放大方案中,对光束偏转或位移的测量可以分别由实弱值放大或虚弱值放大来完成,同时,初始测量仪器态可能存在的噪声也分为横向的位移噪声与偏转噪声。本文首先讨论噪声与待测参数在同一空间的情况下,当测量仪器态噪声为高斯白噪声时,利用实弱值放大并不会带来测量精度或信噪比提升的优势。2011年,Feizpour等^[71]分析了该测量仪器态噪声为关联噪声的情况,由于大多数情况下关联噪声的具体参数是未知的,因此只能通过求平均的方法对参数进行估计。当噪声的关联时间比信号的采集时间长时,对信号的平均几乎不能改善关联噪声带来的误差,因此传统测量失去了其探测样本多的优势,而弱值放大对信号的放大作用可以提升信噪比。2014年,Ferrie等^[120]与Jordan等^[121]的工作共同表明:若已知关联噪声的具体参数,当利用最大似然估计实现对参数的估计时,弱值放大中的放大效应并不会带来测量精度的提升。而利用虚弱值放大方案可以实现在傅里叶空间中对参数的测量,此时,与待测参数处于同一空间的噪声对测量精度的影响仅来源于光学传播衍射效应的修正项,该修正项在弱值放大极限下可以忽略^[121,122-124]。

当噪声存在于测量信号的傅里叶空间时,Kedem等^[124]发现虚弱值放大可以利用噪声带来的测量仪器态的额外展宽来提升测量的信噪比。该原理与上文提到的Pang等利用压缩态在相空间特定方向的展宽来提高信噪比以及利用白光光源实现对光脉冲时间延迟测量的原理相同。Knee等^[125]进一步考虑了测量仪器态在位置和动量空间相对于各空间的展宽具有同等强度的噪声,得出结论:仅利用弱值放大中的放大效应进行测量不会表现出比传统测量方案更高的信噪比。

2014年,Jordan等^[121]还比较了探测器位置出现横向移动的高斯白噪声时,弱值放大方案与传统测量方式的测量精度。传统的测量方式需要使用长焦距透镜来实现光束偏转在傅里叶空间的测量,当

焦距足够大时,传统测量方式对探测器的位移噪声具有鲁棒性,但是光路长度的增加也会导致测量仪器态存在额外的受空气扰动影响的风险;而虚弱值放大技术使用了增大光束宽度的措施,在提高测量精度的同时,也增加了对该噪声的鲁棒性,并且对光路长度没有要求,因此更具优势^[126]。

光电探测器是光学精密测量中不可或缺的组成部分。为了在短时间测量过程中获得尽可能高的测量精度,人们希望将强度尽可能大的光入射到测量装置中,因此就造成了探测阶段可能存在探测器饱和的问题。2017年,Harris等^[127]在理论上系统探讨了利用弱值放大技术规避探测器饱和,从而提升测量精度的可能性。

Xu等^[108]在2020年的工作中比较了最优化精度的实弱值放大和虚弱值放大情况下,测量仪器态所承载的最大的量子Fisher信息随后选择成功概率的变化,结果发现:对于实弱值放大方案,越大的后选择成功概率意味着越大的量子Fisher信息,并且在很宽的后选择成功概率范围内,后选择成功的测量仪器态总能承载几乎所有的量子Fisher信息。基于对光电探测器噪声的准确标定,该工作通过实验比较了实弱值放大与传统测量方式的测量精度,演示了传统测量方式下探测器存在饱和时,弱值放大方案能够有效规避饱和,进而提供更高的测量精度。进一步,弱值放大方案可以根据探测器噪声与饱和阈值的具体情况调整后选择成功的概率,在特定入射光子数情况下实现最优的测量精度,进而在远大于传统测量探测器动态范围的情况下实现接近散粒噪声极限的测量精度。

3.5 改进的弱值放大方案

随着人们对弱值放大方案测量精度以及对特定噪声条件下弱值放大方案测量精度优势的研究,一系列受弱值放大方案启发或在弱值放大基础上进行改进的精密测量方案被陆续提出。本节主要回顾四种改进的弱值放大方案,并阐明这些方案相比标准的弱值放大方案在测量精度与信噪比方面的优势。

第一种改进方案被称为“能量回收的弱值放大”(power-recycling weak-value amplification)方案。Dressel等^[128]与Lyons等^[129]分别在理论上研究了脉冲光与连续光在弱值放大中的能量回收方案,其基本思想是利用普克尔斯盒(脉冲光)或部分反射镜(连续光),将后选择失败的光子回收利用后继续入射测量装置,等效于在回收反射镜与干涉仪的出射端口形成光学腔,在保持弱值不变的前提下,大幅提

高通过后选择的光子数,进而提高信噪比和测量精度。2016年,Wang等^[130]在实验中演示了能量回收的弱值放大方案,该方法得到的对光束微小偏转的测量信噪比超过了传统测量方式或标准弱值放大方案下的散粒噪声极限。

第二种改进方案被称为“接近平衡的弱值放大”(almost balanced weak-value amplification)方案,该方案将 $|\psi_i\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ 作为前选择态,将两个与 $|\psi_i\rangle$ 内积几乎相等的态 $|\psi_q\rangle = (|0\rangle + iqe^{i\epsilon}|1\rangle)/\sqrt{2}$ ($q = -1, +1$)作为后选择态,通过测量后选择成功的测量仪器态得到概率分布 $f_{q=-1}$ 和 $f_{q=+1}$,待测参数可以从两组概率分布中估计得到。2013年,Strübi等^[131]在消除系统误差以及对相位噪声的鲁棒性等方面验证了该方案优于标准弱值放大方案。2016年,Fang等^[132]在实验中演示了该方案的优越性,并发现该方案对由波长依赖的光学器件造成的误差也有一定的容忍度。Martínez-Rincón等^[133]利用该方案测量了波片转速,通过计算 $I_+ = f_{q=+1} + f_{q=-1}$ 和 $I_- = f_{q=+1} - f_{q=-1}$,得到了与虚弱值放大类似的对参数的放大效果(放大系数为弱值的一半),然而该放大效果对应的信号强度(反比于放大系数)大于弱值放大对应的信号强度(反比于放大系数的平方)。由于 I_+ 为初始的测量仪器态,因此在利用该方案测量参数时,不需要提前标定测量仪器态的参数,从而避免了测量的系统误差。2017年,Liu等^[134]利用该方案对反射镜偏转速度进行测量,演示了接近平衡的弱值放大方案对不完美的光学干涉更不敏感,能够在弱值放大方案由于不完美的干涉效应失效时,能够提供的放大倍数为弱值放大最大放大倍数的24倍。

第三种方案称为“倒弱值放大”(inverse weak-value amplification)方案。该方案工作在弱测量近似成立,且前后选择态十分接近正交导致弱值放大近似不成立的条件下。该方案通过引入微小的耦合参数 g ,实现对量子系统前选择态中的相位 ϕ 进行放大测量。由于弱值 $|\langle A \rangle_w| \propto 1/\phi$,后选择成功的测量仪器态的平均位移 $\langle x \rangle \propto \phi/g \propto 1/|\langle A \rangle_w|$,因此该方案称为倒弱值放大方案。2010年,Starling等^[69]利用该方案实现了对相位的放大测量,在仅探测15%入射光子的前提下,测量灵敏度就与平衡零差探测器接近。2017年,Martínez-Rincón等^[135]利用该方案在低频情况下实现了对反射镜偏转的精密测量。2018年,Lyons等^[136]在理论上证明了倒弱

值放大与标准弱值放大技术在噪声抑制方面有相似的鲁棒性。

第四种方案称为“偏斜弱值放大”(bias weak-value amplification)方案。该方案利用预设的耦合参数 β 将前选择的量子态 $|\psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ 与平均值为 p_0 的测量仪器态耦合起来,并将量子系统后选择到量子态 $|\psi_f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\epsilon}|0\rangle + e^{-i\epsilon}|1\rangle)$ 。当满足 $p_0\beta + \epsilon = m\pi$ 时,后选择成功的测量仪器态的位移由标准的弱值放大方案中成正比于测量仪器态在 p 空间的方差 $(\Delta p)^2$ 变为成正比于 p_0^2 ,当 $p_0 \gg \Delta p$ 时,该方案能够在更低的后选择成功概率下实现比标准弱值放大更大的参数放大倍数,因而能够有效避免探测器饱和,通过探测更少的光子来提高测量精度^[137]。偏斜弱值放大方案在通过测量光谱位移实现光学纵向相位改变的精密测量中具有重要应用^[138-140]。

4 直接层析的基本原理与应用

量子层析是表征量子系统(包括量子态、量子过程和量子测量)的重要手段,本文以量子态层析为例来简述量子层析理论的基本过程。考虑一个 d 维的未知量子态(用密度矩阵 ρ 来表示),为了得到密度矩阵中 $d^2 - 1$ 个独立的未知参数,至少需要用 $d+1$ 组 d 输出的投影测量构成层析完备的测量集 $\{\mathbf{E}_j^{(k)}\}$ 对未知量子态的多个拷贝进行测量。根据波恩规则,第 k 组投影测量得到测量结果 j 的概率为 $P_j^{(k)} = \text{Tr}[\rho \mathbf{E}_j^{(k)}]$ 。由于统计误差的存在,通常用最优化方法重构得到最接近测量结果概率分布的量子态 ρ ^[141-142]。在传统量子态层析过程中,完备的量子测量集与态重构算法是必不可少的。随着量子态维度的增加,完备测量集的规模以及重构算法的复杂度也会随之增加。量子态层析方法是对量子态全部信息的整体重构,在某些情况下,比如对量子纠缠^[143]、量子相干性^[144]进行探测以及对量子态进行验证^[145]时,只需要量子态的部分信息,因此利用传统的量子态层析技术表征量子态就会造成效率低下和资源浪费。本章将介绍基于弱值的量子层析方法——直接量子层析,该方法通过设计量子系统的可观测量和后选择态,建立未知量子态波函数的概率幅或密度矩阵矩阵元与弱值的关系,通过测量对应的弱值(无需重构算法)即可直接得到量子态的对应信息。

4.1 纯态波函数的直接层析

当测量波函数 $|\psi\rangle$ 在 $|x\rangle$ 表象下的概率幅 $\psi(x)$ 时,如果利用投影算符 $\pi_x = |x\rangle\langle x|$ 对 $|\psi\rangle$ 进行强测量, $|\psi\rangle$ 将坍缩到投影算符 π_x 的本征态上,得到概率分布 $P(x) = |\psi(x)|^2$,因此会丢失 $\psi(x)$ 的相位信息。2011 年, Lundeen 等^[146] 首先提出了利用弱测量和弱值直接测量量子态波函数的方案,该方案首先用一个光子偏振态 $|\Phi\rangle$ 作为测量仪器态与光子的空间波函数 $|\psi\rangle$ 在相互作用哈密顿量 $H = \alpha\pi_x \otimes \sigma_y$ 下进行耦合,其中 $\sigma_y = -i|0\rangle\langle 1| + i|1\rangle\langle 0|$ 。当 $\alpha \ll 1$ 时,该耦合过程可以实现对投影算符 π_x 的弱测量。随后再将量子系统投影到动量空间 $|p\rangle$ 作后选择,可以得到弱值

$$\langle \pi_x \rangle_w = \frac{\langle p | x \rangle \langle x | \psi \rangle}{\langle p | \psi \rangle}. \quad (5)$$

当只考虑一个特定动量本征态 $|p=0\rangle$ 的后选择时,结合 $\langle p | x \rangle = \exp(ipx)$, (5) 式可以化简为 $\langle \pi_x \rangle_w = k\psi(x)$, 其中 $k = 1/\phi(0)$ 。 $\phi(p)$ 为 $|\psi\rangle$ 在 p 表象下的波函数,即投影测量算符 π_x 的弱值正比于光子在 x 空间的波函数。通过测量后选择成功的测量仪器态 $|\Phi_p\rangle$, 可以提取弱值的实部和虚部,为

$$\langle \pi_x \rangle_w = \frac{1}{\sin \alpha} (\langle \Phi_p | \sigma_x | \Phi_p \rangle - i \langle \Phi_p | \sigma_y | \Phi_p \rangle). \quad (6)$$

将对 π_x 的弱测量在 x 空间进行扫描,并在每个位置 x 测量出 $\langle \pi_x \rangle_w$, 再利用归一化条件,即可得到完整的波函数 $\psi(x) = \langle \pi_x \rangle_w / \int dx |\langle \pi_x \rangle_w|^2$ 。

这种对波函数直接测量的方法给出了波函数在实验操作角度上的定义,简化了传统量子态层析中需要的信息完备的量子测量,避免了传统量子态层析中所需的重构算法,为层析复杂的高维量子态打开了新的大门。2012 年, Fischbach 等^[147] 将该方法推广到对光场相空间波函数的直接测量中;这种直接测量波函数的方法也适用于分立的量子态空间,例如光子偏振、光子轨道角动量等。2013 年, Salvail 等^[148] 将直接测量波函数的方法应用到对光子偏振态的层析中;2014 年, Malik 等^[149] 利用该方法实现了对 27 维光子轨道角动量叠加态波函数的直接测量。

4.2 一般量子态的直接层析

上节所述的直接层析的方法仅适用于对纯态波函数的直接测量,而一个量子系统有可能与外部环境发生相互作用而导致经典的不确定性,变成一个

混合态,这种更为一般的量子系统通常用密度矩阵 ρ 或狄拉克分布 S_ρ 来描述^[150-151]。2012 年, Lundeen 等^[152] 在直接测量纯态波函数的基础上提出了两种对一般的量子态密度矩阵进行直接测量的方法。

第一种方法是对量子态狄拉克分布进行直接测量。量子态 ρ 在相互正交基矢 $\{|a\rangle\}$ 下的密度矩阵的矩阵元为 $\rho_{a_1 a_2} = \langle a_1 | \rho | a_2 \rangle$, 而量子态的狄拉克分布需要另一组相互无偏基 $\{|b\rangle\}$ 满足 $\langle a | b \rangle = \sum_{a=0}^{N-1} \exp(i2\pi ab/N) / \sqrt{N}$, 因此 $\{|b\rangle\}$ 始终是 $\{|a\rangle\}$ 的一组傅里叶基, ρ 的狄拉克分布定义为 $S_\rho(a, b) = \langle a | \rho | b \rangle \langle b | a \rangle$ 。要实现 $S_\rho(a, b)$ 的直接测量,仍然需要对投影测量算符 $\pi_a = |a\rangle\langle a|$ 进行弱测量,之后再量子系统投影到 $|b\rangle$ 作后选择,得到弱值 $\langle \pi_a \rangle_w^b = \langle b | \pi_a \rho | b \rangle / \langle b | \rho | b \rangle = S_\rho(a, b) / p_b$, 其中 p_b 为在弱测量近似下后选择成功的概率。对投影测量算符 $\pi_a = |a\rangle\langle a|$ 和后选择态 $|b\rangle$ 分别在 $\{|a\rangle\}$ 和 $\{|b\rangle\}$ 中进行扫描,并记录后选择成功的概率 p_b 以及测量对应的弱值 $\langle \pi_a \rangle_w^b$, 即可得到 $S_\rho(a, b) = p_b \langle \pi_a \rangle_w^b$ 。2013 年, Salvail 等^[148] 将该理论方案应用于一般的光子偏振态的直接层析中;在实验中,他们将光子的横向空间分布波函数作为测量仪器态,利用薄的双折射晶体将光子偏振与光子的空间位置耦合起来,实现了对光子偏振态狄拉克分布的直接测量。2014 年, Bamber 等^[151] 利用光子偏振态作为测量仪器,将对纯态的光子横向分布波函数的测量扩展到混合态,实现了对光子横向自由度混合态的狄拉克分布的直接测量。

第二种方法是利用串行弱测量对量子态密度矩阵元素 $\rho_{a_1 a_2} = \langle a_1 | \rho | a_2 \rangle$ 进行直接测量,对量子态进行串行弱测量是研究不确定性关系^[153] 以及实现量子层析的重要手段^[154-158]。该直接层析方案引入多个投影算符乘积 $\Pi_{a_1 a_2} = \pi_{a_2} \pi_{b_0} \pi_{a_1}$ 进行弱测量,其中 $\pi_{b_0} = |b_0\rangle\langle b_0|$, $\langle a | b_0 \rangle = 1/\sqrt{d}$, 得到的测量结果称为弱平均值,即 $\langle \Pi_{a_1 a_2} \rangle_w = \langle a_1 | \rho | a_2 \rangle / d = \rho_{a_1 a_2} / d$ 。在实验操作中,对 π_{a_2} 的弱测量可以由强测量代替。文中给出了两种测量弱平均值 $\langle (EF)^w \rangle_w$ 的方案。在方案一中,量子系统依次与两个测量仪器耦合,其演化过程为 $U_T = \exp(i g_2 F P_2) \exp(i g_1 E P_1)$, 其中下标 1, 2 代表两个测量仪器态,弱平均值 $\langle (EF)^w \rangle_w$ 可以通过对两个后选择成功的测量仪器态进行联合测量得到,即

$\langle (EF)^w \rangle_\rho = (g_1 g_2)^{-1} (2\sigma)^2 \langle a_1 a_2 \rangle_f$, 其中 σ 代表高斯测量仪器态在 q 空间的标准差, $a = Q/2\sigma + iP\sigma$ 。2016 年, Thekkadath 等^[159]在实验中利用该方案实现了对光子任意偏振态的直接测量。在方案二中, 量子系统首先与第一个测量仪器态通过演化过程 $U_1 = \exp(-ig_D F D_1)$ 相互耦合, 其中 D_1 为测量仪器态的可观测量。量子系统与第二个测量仪器耦合的强度取决于第一个测量仪器的位移, 其演化过程为 $U_2 = \exp(-ig_2 E P_2 Q_1)$ 。在弱测量近似下, 弱平均值 $\langle (EF)^w \rangle_\rho$ 的实部和虚部分别对应可观测量 D_1 为 P_1 和 Q_1 时, 测量仪器态在 q 空间的位移。

2013 年, Wu^[160]提出了针对一般量子态密度矩阵的部分元素进行直接测量的方案。2019 年, Ren 等^[161]对直接测量密度矩阵的方案进行改进, 提出了仅用一个测量仪器态和一次量子系统与测量仪器耦合即可实现对量子态密度矩阵进行直接测量的方案。假设密度矩阵 ρ 在 $\{|s\rangle\}$ 基下的矩阵元为 $\rho_{s',-s}$, 当 $s' = s$ 时, $\rho_{s,-s}$ 代表矩阵反对角线上的元素。主对角线上的元素 $\rho_{s,s}$ 可以直接由投影测量获得, 非对角元素 $\rho_{s' \neq -s, -s}$ 的测量需要先对 $X'_{s',-s}$ 进行弱测量, 再将量子系统投影到 $|-s\rangle$ 上, 得到弱值与矩阵元的关系为 $\rho_{s' \neq -s, -s} = \langle -s | \rho | -s \rangle \langle X'_{s',-s} \rangle_w / s$ 。

4.3 多系统量子态的直接层析

上文回顾的应用都是对局域的量子态进行直接测量。在量子力学中, 多系统的量子态有可能出现非局域或纠缠等特性, 这些特性对量子信息领域的发展至关重要, 因此很有必要将该直接测量的层析方法推广应用到多系统态。

对非局域的量子态进行直接测量需要对隶属于各个子系统的可观测量 A_1, A_2, \dots, A_N 的联合弱值 $\langle \prod_{n=1}^N A_n \rangle_w$ 进行测量, Lundeen 和 Resch^[162]给出了测量联合弱值的方案, 即: 用 N 个测量仪器分别与 N 个量子系统进行耦合, 之后对量子系统进行后选择, 通过测量 N 个后选择成功的测量仪器态之间的关联来提取联合弱值。研究表明, 这种方法对联合弱值的测量精度较低, 需要大量的资源才能够实现较为准确的测量^[163]。Kedem 和 Vaidman^[164]对测量联合弱值的方法进行了改进, 提出了通过测量“模值”进而求解联合弱值的方法, 有效提高了测量联合弱值的效率和可行性。

当将量子比特作为测量仪器态时, 量子系统的可观测量 O 在前后选择态 $|\psi_i\rangle, |\psi_f\rangle$ 下的模值定义为 $O_m = \langle \psi_f | \exp(-igO) | \psi_i \rangle / \langle \psi_f | \psi_i \rangle$; 当 $O =$

$P_n = |n\rangle \langle n|$ 为投影测量算符时, 弱值 $(P_n)_w$ 与 $(P_n)_m$ 的关系可以表示为 $(P_n)_m = 1 + s(P_n)_w$, 其中 $s = \exp(-ig) - 1$ 。将 A, B 两个子系统的投影算符 P_j^A 和 P_l^B 相互对易后, 联合弱值可以写为

$$(P_j^A P_l^B)_w = s^{-2} [(P_j^A + P_l^B)_m - (P_j^A)_m - (P_l^B)_m + 1] \quad (7)$$

该联合弱值 $(P_j^A P_l^B)_w$ 正比于描述 A, B 系统的量子态 $|\Psi\rangle$ 在 $|j\rangle_A |l\rangle_B$ 基下的展开系数 $\Psi_{j,l}$, 可以被用来实现对非局域两光子态波函数的直接测量。2019 年, Pan 等^[165]首次在实验中演示了采用测量模值的方法对双光子纠缠态波函数进行直接测量。在实验中, 他们构造了双光子超纠缠源, 将双光子路径纠缠态作为测量仪器, 对双光子的偏振纠缠态进行直接测量。

2019 年, Ren 等^[161]将测量单个系统量子态密度矩阵的方法推广到多个系统密度矩阵矩阵元的直接测量中。假设一个由 N 个子系统组成的量子态 ρ , 每个子系统的维度为 d , ρ 所在态空间的维度为 $O(d) = \otimes_{n=1}^N d_n$, 则 ρ 可以展开为

$$\rho = \sum_{S, S'}^{O(d)} \rho_{S, S'} |s_1, \dots, s_N\rangle \langle s'_1, \dots, s'_N| \quad (8)$$

对矩阵元 $\rho_{S, S'}$ 的测量可以转化为测量 $\prod_{n=1}^N A_{n,1}$ 的弱值, 其中第 n 个子系统的后选择态为 $|s_n\rangle$, 则

$$\rho_{S, S'} = \frac{\rho_{S, S} \langle \prod_{n=1}^N A_{n,1} \rangle_w}{\prod_{s_n \neq s'_n} s_n} \quad (9)$$

在测量弱值时, 将 N 个测量仪器分别与 N 个子系统在么正过程 $U = \prod_{n=1}^N \exp[-ig_n t_n A_{n,1} F_n]$ 下进行耦合, 之后将量子系统后选择到 $|S\rangle = |s_1, \dots, s_N\rangle$ 上, 则弱值可以通过对后选择成功的 N 个测量仪器态的联合态进行测量得到, 即

$$\langle \prod_{n=1}^N A_{n,1} \rangle_w = \frac{1}{\prod_{n=1}^N g_n t_n} \langle \prod_{n=1}^N K_n \rangle_f \quad (10)$$

式中: $K_n = R_n + iF_n$, R_n 为 F_n 傅里叶变换的共轭算符。该测量方案对 N 系统量子态密度矩阵的直接层析只需要对每个子系统进行一次耦合和一次后选择即可, 为通过实验直接层析 N 系统量子态提供了较高的可行性, 且该方案易于扩展和集成, 为集成量子芯片实现直接量子态层析奠定了基础。

4.4 量子过程和量子测量的直接层析

量子态、量子过程、量子测量是量子信息处理的

三个必不可少的要素,发展更简洁快速的方法对三要素进行表征具有同等重要的意义。随着弱值在量子态直接层析中取得巨大成功,研究人员开始探索该直接层析方法在层析量子过程和量子测量中的应用。

2018年, Kim等^[166]首次提出并实现了利用两个不相容可观测量的串行弱值^[158]对量子过程进行直接层析。该实验分别将两个光子的偏振态作为量子系统和测量仪器,通过引入附属系统的方法,改进了以往串行弱值测量过程中对两个测量仪器态的关联测量,直接对最终的测量仪器态进行测量即可直接得到串行弱值。通过合理选择量子系统的前、后选择态以及可观测量,可以得到表征一个量子过程的 χ^S 矩阵的矩阵元正比于串行弱值,从而实现了量子过程的直接层析。

2020年, Xu等^[167]利用未知的量子测量对量子系统进行后选择,通过设计合理的量子系统的前选择态和可观测量,首次提出了对量子测量^[167-170]进行直接层析的方案。该方案从对量子测量的回溯性描述出发^[171-176],结合弱值对量子系统前、后选择的对称性,将对秩为1或更高秩的量子测量进行直接层析的过程类比于对纯态或混合态的直接层析。量子测量对应每个输出的测量算符的等效探测效率是区别量子态层析的重要因素。由于量子测量的各个测量结果对应的测量算符满足完备性条件 $(\sum_n \Pi_n = \mathbf{I})$,因此使用量子测量对量子系统进行后选择不会丢失任何资源。恰当地利用量子测量的完备性条件会进一步提高对量子测量算符直接层析的精度。

5 直接层析的性能与发展

基于弱值的直接量子层析最重要的是对弱值的测量过程,对弱值测量的准确度和精度直接决定了层析结果的可靠性。而最初的对弱值的测量依赖于弱值放大近似,耦合强度越小,使用该近似得到的弱值的准确性越高,但是对弱值测量的精度越低;增大耦合强度虽然会提高对弱值的测量精度,但却会降低对弱值测量的准确度。因此,为了同时提高弱值测量的准确度和精度,必须开发一种在强测量条件下测量弱值的方案。本章首先介绍量化量子态层析准确度和精度的常用指标,接着介绍在任意耦合强度下成立,无需近似的直接量子层析方案,最后介绍几种能够进一步提高量子态层析效率的经过改进的

直接量子态层析方案。

5.1 量子态层析的准确度与精度

通常情况下,量子态层析的准确度由测量得到的量子态 ρ_{exp} 与理论量子态 ρ_t 在态空间中的迹距离 $D(\rho_{\text{exp}}, \rho_t) = \text{Tr}(|\rho_{\text{exp}} - \rho_t|)/2$ 来量化。当量子态为纯态时,即 $\rho_{\text{exp}} = |\psi_{\text{exp}}\rangle\langle\psi_{\text{exp}}|$ 和 $\rho_t = |\psi_t\rangle\langle\psi_t|$ 时, $D(\rho_{\text{exp}}, \rho_t) = \sqrt{1 - |\langle\psi_{\text{exp}}|\psi_t\rangle|^2} = \sqrt{1 - F(\psi_{\text{exp}}, \psi_t)}$,其中 $F(\psi_{\text{exp}}, \psi_t) = |\langle\psi_{\text{exp}}|\psi_t\rangle|^2$ 定义为两个纯态的保真度。对于两个一般形式的量子态 ρ_{exp} 与 ρ_t ,保真度定义为 $F(\rho_{\text{exp}}, \rho_t) = \text{Tr}(\sqrt{\sqrt{\rho_t}\rho_{\text{exp}}\sqrt{\rho_t}})^2$ 。保真度与迹距离都是量化两个量子态相似程度的重要指标,可以用于评价量子态层析的准确度。

量子态层析的精度是指层析得到的量子态在真实量子态附近涨落的大小。传统的量子态层析基于对量子态的全局重构,用 N 次实验重构(第 k 次重构得到的量子态为 $\rho_{\text{exp}}^{(k)}$)的平均非保真度 $\text{in } F = 1 - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N F(\rho_{\text{exp}}^{(k)}, \rho_t)$ 来量化量子态层析的精度。而直接量子态层析的方法是对表征量子态的参数逐一进行测量,因此通常将量子态中所有参数的涨落进行加和来量化量子态层析的精度。对于纯态 $|\psi\rangle = \sum_x \psi_x |x\rangle$ 的直接层析,其精度可以定义为 $\delta\psi = \sqrt{\sum_x |\delta\psi_x|^2}$,由密度矩阵 ρ (狄拉克分布 Ω)表征的一般量子态的层析精度可以定义为 $\delta^2\rho = \sum_{i,f=1}^d \delta^2\rho_{i,f} (\delta^2\Omega = \sum_{i,f=1}^d \delta^2\Omega_{i,f})$,其中 $\delta^2x = \delta^2\text{Re}(x) + \delta^2\text{Im}(x)$ 。除此以外,还可以用表征量子态特征参数的涨落来量化量子态层析的精度,比如纯态的量子比特与 Bloch 球面上的点一一对应,可以由俯仰角 θ 与方位角 φ 来唯一确定,此时量子态的测量精度可以由 θ 和 φ 的涨落来描述,即 $\delta\psi_{\text{qb}} = \sqrt{\delta^2\theta + \sin^2\theta\delta^2\varphi}$ 。

5.2 基于强测量的直接量子层析

2014年, Maccone和 Rusconi^[177]利用蒙特卡罗模拟的方法比较了直接量子态层析与传统量子层析对量子态估计的准确度和精度。他们在模拟中发现,传统重构得到的量子态的准确度和精度都优于直接层析方案。在用弱测量方法对纯态或者混合态进行直接层析过程中,随着使用的量子态拷贝个数的增加,直接层析得到的量子态与真实量子态之间的迹距离由刚开始的减小逐渐收敛到一个固定值,该固定值是由弱值测量过程中的近似引入的系统

误差导致的。如果增大耦合强度,重构的量子态的信噪比会在一定范围内有所提升,然而系统误差也会变大,从而制约了直接量子态层析准确度和精度的进一步提高。因此,为了使直接量子态层析方案同时具有较高的准确度和精度,需要发展无需近似并且在强耦合情况下成立的直接量子态层析方案。

2015 年,Zou 等^[178]推导了强耦合情况下对离散量子系统进行直接量子态层析的方案,包括对纯态、混合态狄拉克分布以及混合态密度矩阵的直接层析方案,由于该方案不需要近似,因此消除了以往在弱测量近似下工作的直接量子态层析方案中的系统误差,量子态估计的统计误差随着使用的量子态拷贝个数的增加不断降低,并且不会收敛到一个固定值。2016 年,Vallone 和 Dequal^[179]系统地研究和比较了基于弱测量和强测量的直接量子态层析的准确度和精度,通过推导任意耦合强度下测量弱值的精确表达式,给出了基于弱测量的直接量子态层析成立的充分条件(该条件涵盖了对待测量子态和耦合强度的要求),并演示了即使在弱测量直接量子态层析近似成立的情况下,使用强测量进行直接量子态层析也普遍具有更高的准确度和精度。

基于弱值的直接层析理论的核心问题是对弱值的测量。在弱测量近似下,如(5)式所示,通常对测量仪器态进行测量就可以分别得到弱值的实部和虚部,而这种近似在强测量下会有很大误差。2016 年,Zhang 等^[180]开发了一种变形的可观测量 $q(g)$ 和 $p(g)$,它们是耦合强度 g 的函数,对它们进行测量能够精确地提取出弱值的实部和虚部。Zhu 等^[181]将变形的可观测量用于直接量子态层析,在理论上推导了任意耦合强度下的直接量子态层析,同时分析了直接层析量子态的精度与耦合强度的关系,得到了最优精度的耦合强度。2017 年,Denkmayr 等^[182]分别利用弱测量和强测量直接层析方案测量了中子路径态波函数,证实了基于强测量的直接层析方案在测量纯态的准确度和精度上的优越性。2018 年,Calderaro 等^[183]利用强测量实现了对单光子偏振态密度矩阵的直接测量,演示了基于强测量的直接层析方案在对一般量子态测量时相比弱测量在准确度和精度上的优势。2019 年,Zhu 等^[184]提出了混合的直接量子态层析方案,采用该方案对高维度纯态层析时,获得了比传统量子态层析方法更高的精度。2020 年,Zhang 等^[185]利用强测量实现了对二维光子空间波函数的直接测量。

5.3 新型的直接量子层析方案

直接量子层析虽然避免了传统量子层析方法中复杂的重构过程,但对 d 维纯态的直接层析需要扫描并测量 d 个可观测量的弱值,因此在对高维量子态(光子横向空间分布)进行直接层析时,需要耗费大量的时间。为了推进直接量子态层析理论的实用化,人们开始开发新型的直接量子层析方案,以缩短扫描过程所需的时间,甚至避免扫描过程。下面主要介绍四种新型的直接量子态层析方案,分别是基于压缩感知的直接态层析方案、免扫描直接量子态层析方案、基于指针控制的系统演化算符的直接量子态层析方案和基于区域重构算法的直接量子态层析方案。

2014 年,Howland 等^[186]与 Mirhosseini 等^[187]分别独立提出了基于压缩感知的直接层析光子横向空间波函数 $|\psi\rangle$ 的方案。该方案在测量光子空间波函数时,利用空间光调制器实现光子空间位置与偏振态的耦合,以实现位置投影算符 $\pi_j = |x_j\rangle\langle x_j|$ 的弱测量。不同于对量子系统展开基逐个扫描的直接层析方案,该方案在第 m 次测量时随机挑选位置投影算符组成新的算符 $Q_m = \sum_j Q_{m,j} \pi_j$,其中 $Q_{m,j}$ 取值 0 或 1。通过测量后选择成功的测量仪器态可以得到算符 Q_m 的弱值,记为 ϕ_m 。则 M 次测量组成的弱值向量 ϕ 、随机系数矩阵 Q (矩阵元为 $Q_{m,j}$)、空间波函数在位置本征态 $|x_j\rangle(j=1,2,\dots,N)$ 表象下的态矢量 ψ 满足 $\phi \propto Q\psi$ 。最后采用压缩感知中的最优化方法对 ψ 进行优化求解。Mirhosseini 等在其论文中展示了以下结果:当 $N=19200$ 时,仅使用态空间维度 $M/N=20\%$ 的测量次数,即可达到高准确度的图像识别;当 $N=192$ 时,仅使用 $M/N=25\%$ 的测量次数即可达到与原图像 90% 以上的保真度。Howland 等在其论文中演示了仅用 15% 的测量次数即可恢复一个 $256 \text{ pixel} \times 256 \text{ pixel}$ 的高质量图像。上述两个方案均使用单像素光探测器对纯态的光子波函数进行直接层析。2018 年,Knarr 等^[188]在上述方案的基础上使用阵列光电探测器结合压缩感知算法对一般的光子横向分布量子态的狄拉克分布进行了直接测量。

2015 年,Shi 等^[189]提出了免扫描的直接量子态层析方案,并以测量光子横向分布的波函数为例演示了该方案。该免扫描方案首先对光子在动量空间的投影算符 $\pi_p = |p_0\rangle\langle p_0|$ 进行弱测量,然后将量子系统投影到不同的空间位置 $|x\rangle$ 本征态上进行后选

择得到弱值,即

$$\langle \pi_p \rangle_x^w = \frac{\langle x | p_0 \rangle \langle p_0 | \psi \rangle}{\langle x | \psi \rangle} = \frac{\nu}{\psi(x)}, \quad (11)$$

式中: ν 为常数。因此波函数概率幅 $\psi(x) \propto 1/\langle \pi_p \rangle_x^w$ 。Shi 等在实验中演示了对 120 万维光子态进行表征的过程。不同 x 位置的弱值可以通过对实验装置的一次配置得到,避免了直接量子态层析中的扫描过程,极大地提高了对量子态的表征效率,为实时表征高维量子态提供了可行方法。

2019 年, Ogawa 等^[190]利用指针控制的系统演化算符 \mathbf{T} , 推导了对光子空间波函数进行直接层析的理论方案。该方案将偏振量子比特(本征态为 $|H\rangle, |V\rangle$)作为测量仪器态, 测量仪器的初始态为 $|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle)$, 演化算符 $\mathbf{T} = |p_0\rangle\langle p_0| \otimes |H\rangle\langle H| + 1 \otimes |V\rangle\langle V|$ 。利用阵列探测器以及偏振探测器对所有位置 x 的偏振态进行测量, 测量结果 $\nu\psi(x)$ 正比于该位置的波函数 $\psi(x)$ 。其中, 比例系数 ν 与 x 无关, 可以通过对波数的归一化得到。2021 年, Ogawa 等^[191]利用该方案在单光子级别下对超快光子的时间模式进行了直接层析, 层析的时间分辨率可以达到亚皮秒量级; Zhou 等^[192]利用该方案对 580×580 的光子横向空间分布量子态密度矩阵进行了直接测量, 为即时研究光场的空间互相关函数提供了可行方案。

2019 年, Yang 等^[193]在利用弱测量直接测量光子轨迹工作的基础上, 先利用薄的双折射晶体对光子在不同横向位置的动量进行弱测量, 之后对光子的不同位置进行后选择, 得到了动量弱值的形式, 即:

$$\langle k_r \rangle = \frac{\langle r | \mathbf{P}_r | \psi \rangle}{\langle r | \psi \rangle}. \quad (12)$$

之后再根据光子动量与相位的差分关系, 通过局域重构得到了光子在不同位置的相位信息。该方案同样避免了扫描过程以及后选择带来的光子损失, 对于高效的重构高维光子态, 尤其是含有高空间频率分量的光子态具有显著优势。

6 结束语

本文重点回顾了弱值在量子精密测量和量子层析方面的技术——弱值放大技术和直接层析技术, 并对这两项技术的基本原理、性能以及最新进展进行了回顾。

弱值放大技术通过对量子系统进行后选择并以

牺牲信号强度为代价实现信号的放大, 在不含有技术噪声的条件下, 弱值放大方案不会获得比传统测量方式更高的测量精度。然而在实际情况下, 弱值放大方案对某些技术噪声具有比传统测量方式更强的鲁棒性。新型的弱值放大方案进一步提高了后选择成功的信号强度, 增加了弱值放大方案的适用范围, 使弱值放大方案对更多种类的噪声具有鲁棒性。目前, 弱值放大在光学精密测量领域取得了巨大成功, 鉴于该方案在理论上的普适性, 相信其在其他系统的精密测量中同样是极具潜力的测量方案。

直接层析技术利用弱值能作为可观测的复数这一性质, 将对量子态的层析转化为对弱值的测量, 摆脱了传统量子层析技术中复杂的重构过程, 大幅度简化了高维度量子态层析的复杂度。直接层析技术自提出以来, 就在适用范围、测量准确度、精度以及层析效率上有了长足的发展与改进。直接层析技术允许对量子态的部分元素进行直接测量, 为研究量子系统的性质提供了捷径, 也为深入理解量子态的定义打开了一扇新大门。

参 考 文 献

- [1] Aharonov Y, Vaidman L. Properties of a quantum system during the time interval between two measurements [J]. *Physical Review A, Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 1990, 41(1): 11-20.
- [2] Aharonov Y, Bergmann P G, Lebowitz J L. Time symmetry in the quantum process of measurement [J]. *Physical Review*, 1964, 134(6B): B1410-B1416.
- [3] Xu X Y, Pan W W, Wang Q Q, et al. Measurements of nonlocal variables and demonstration of the failure of the product rule for a pre- and postselected pair of photons [J]. *Physical Review Letters*, 2019, 122(10): 100405.
- [4] Aharonov Y, Vaidman L. On the two-state vector reformulation of quantum mechanics [J]. *Physica Scripta*, 1998, T76(1): 85.
- [5] Aharonov Y, Vaidman L. The two-state vector formalism: an updated review [M] // Muga J G, Mayato R S, Egusquiza Í L. *Time in quantum mechanics. Lecture notes in physics*. Heidelberg: Springer, 2008, 734: 399-477.
- [6] Aharonov Y, Popescu S, Tollaksen J. A time-symmetric formulation of quantum mechanics [J]. *Physics Today*, 2010, 63(11): 27-32.
- [7] Aharonov Y, Albert D Z, Vaidman L. How the result of a measurement of a component of the spin of

- a spin- $1/2$ particle can turn out to be 100 [J]. *Physical Review Letters*, 1988, 60(14): 1351-1354.
- [8] Kofman A G, Ashhab S, Nori F. Nonperturbative theory of weak pre- and post-selected measurements [J]. *Physics Reports*, 2012, 520(2): 43-133.
- [9] Dressel J, Jordan A N. Weak-values are universal in von Neumann measurements [J]. *Physical Review Letters*, 2012, 109(23): 230402.
- [10] Tamir B, Cohen E. Introduction to weak measurements and weak-values [J]. *Quanta*, 2013, 2 (1): 7-17.
- [11] Dressel J, Malik M, Miatto F M, et al. Colloquium: understanding quantum weak-values: basics and applications [J]. *Reviews of Modern Physics*, 2014, 86(1): 307-316.
- [12] Knee G C, Combes J, Ferrie C, et al. Weak-value amplification: state of play [J]. *Quantum Measurements and Quantum Metrology*, 2016, 3(1): 32-37.
- [13] Steinberg A M. A light touch [J]. *Nature*, 2010, 463 (7283): 890-891.
- [14] Aharonov Y, Botero A. Quantum averages of weak-values [J]. *Physical Review A*, 2005, 72 (5): 052111.
- [15] Aharonov Y, Botero A, Popescu S, et al. Revisiting Hardy's paradox: counterfactual statements, real measurements, entanglement and weak-values [J]. *Physics Letters A*, 2002, 301(3/4): 130-138.
- [16] Resch K J, Steinberg A M. Extracting joint weak-values with local, single-particle measurements [J]. *Physical Review Letters*, 2004, 92(13): 130402.
- [17] Lundeen J S, Steinberg A M. Experimental joint weak measurement on a photon pair as a probe of Hardy's paradox [J]. *Physical Review Letters*, 2009, 102(2): 020404.
- [18] Resch K J, Lundeen J S, Steinberg A M. Experimental realization of the quantum box problem [J]. *Physics Letters A*, 2004, 324(2/3): 125-131.
- [19] Williams N S, Jordan A N. Weak-values and the Leggett-Garg inequality in solid-state qubits [J]. *Physical Review Letters*, 2008, 100(2): 026804.
- [20] Dressel J, Broadbent C J, Howell J C, et al. Experimental violation of two-party Leggett-Garg inequalities with semiweak measurements [J]. *Physical Review Letters*, 2011, 106(4): 040402.
- [21] Pusey M F. Anomalous weak-values are proofs of contextuality [J]. *Physical Review Letters*, 2014, 113(20): 200401.
- [22] Wiseman H M. Weak-values, quantum trajectories, and the cavity-QED experiment on wave-particle correlation [J]. *Physical Review A*, 2002, 65 (3): 032111.
- [23] Mir R, Lundeen J S, Mitchell M W, et al. A double-slit 'which-way' experiment on the complementarity-uncertainty debate [J]. *New Journal of Physics*, 2007, 9(8): 287.
- [24] Dressel J. Weak-values as interference phenomena [J]. *Physical Review A*, 2015, 91(3): 032116.
- [25] Dressel J, Jordan A N. Significance of the imaginary part of the weak-value [J]. *Physical Review A*, 2012, 85: 012107.
- [26] Brunner N, Acín A, Collins D, et al. Optical telecom networks as weak quantum measurements with postselection [J]. *Physical Review Letters*, 2003, 91 (18): 180402.
- [27] Brunner N, Scarani V, Wegmüller M, et al. Direct measurement of superluminal group velocity and signal velocity in an optical fiber [J]. *Physical Review Letters*, 2004, 93(20): 203902.
- [28] Solli D R, McCormick C F, Chiao R Y, et al. Fast light, slow light, and phase singularities: a connection to generalized weak-values [J]. *Physical Review Letters*, 2004, 92(4): 043601.
- [29] Camacho R M, Dixon P B, Glasser R T, et al. Realization of an all-optical zero to pi cross-phase modulation jump [J]. *Physical Review Letters*, 2009, 102(1): 013902.
- [30] Cho Y W, Kim Y, Choi Y H, et al. Emergence of the geometric phase from quantum measurement back-action [J]. *Nature Physics*, 2019, 15(7): 665-670.
- [31] Kocsis S, Braverman B, Ravets S, et al. Observing the average trajectories of single photons in a two-slit interferometer [J]. *Science*, 2011, 332(6034): 1170-1173.
- [32] von Neumann J. *Mathematical foundations of quantum mechanics: new edition* [M]. Princeton: Princeton University Press, 2018.
- [33] Jozsa R. Complex weak-values in quantum measurement [J]. *Physical Review A*, 2007, 76(4): 044103.
- [34] Parks A D, Gray J E. Variance control in weak-value measurement pointers [J]. *Physical Review A*, 2011, 84: 012116.
- [35] Knee G C, Briggs G A D. Seeing opportunity in every difficulty: protecting information with weak-value techniques [J]. *Quantum Studies: Mathematics and Foundations*, 2018, 5(3): 505-517.
- [36] Pan Y M, Zhang J, Cohen E, et al. Weak-to-strong transition of quantum measurement in a trapped-ion system [J]. *Nature Physics*, 2020, 16(12): 1206-1210.

- [37] Johansen L M. Weak measurements with arbitrary probe states[J]. *Physical Review Letters*, 2004, 93(12): 120402.
- [38] Pryde G J, O'Brien J L, White A G, et al. Measurement of quantum weak-values of photon polarization[J]. *Physical Review Letters*, 2005, 94(22): 220405.
- [39] Romito A, Gefen Y, Blanter Y M. Weak-values of electron spin in a double quantum dot[J]. *Physical Review Letters*, 2008, 100(5): 056801.
- [40] Shpitalnik V, Gefen Y, Romito A. Tomography of many-body weak-values: Mach-Zehnder interferometry[J]. *Physical Review Letters*, 2008, 101(22): 226802.
- [41] Cho Y W, Lim H T, Ra Y S, et al. Weak-value measurement with an incoherent measuring device [C]//CLEO/QELS: 2010 Laser Science to Photonic Applications, May 16-21, 2010, San Jose, CA, USA. New York: IEEE Press, 2010: 1-2.
- [42] Shikano Y, Hosoya A. Weak-values with decoherence[J]. *Journal of Physics A*, 2010, 43(2): 025304.
- [43] Iinuma M, Suzuki Y, Taguchi G, et al. Weak measurement of photon polarization by back-action-induced path interference[J]. *New Journal of Physics*, 2011, 13(3): 033041.
- [44] Dressel J, Jordan A N. Sufficient conditions for uniqueness of the weak-value[J]. *Journal of Physics A*, 2012, 45(1): 015304.
- [45] Puentes G, Hermosa N, Torres J P. Weak measurements with orbital-angular-momentum pointer states[J]. *Physical Review Letters*, 2012, 109(4): 040401.
- [46] Susa Y, Shikano Y, Hosoya A. Optimal probe wave function of weak-value amplification [J]. *Physical Review A*, 2012, 85(5): 052110.
- [47] Turek Y, Kobayashi H, Akutsu T, et al. Postselected von Neumann measurement with Hermite-Gaussian and Laguerre-Gaussian pointer states [J]. *New Journal of Physics*, 2015, 17(8): 083029.
- [48] Turek Y, Maimaiti W, Shikano Y, et al. Advantages of nonclassical pointer states in postselected weak measurements[J]. *Physical Review A*, 2015, 92(2): 022109.
- [49] Qin L P, Feng W, Li X Q. Simple understanding of quantum weak-values[J]. *Scientific Reports*, 2016, 6(1): 20286.
- [50] Flack R, Monachello V, Hiley B, et al. A method for measuring the weak-value of spin for metastable atoms[J]. *Entropy*, 2018, 20(8): 566.
- [51] Ogawa K, Kobayashi H, Tomita A. Operational formulation of weak-values without probe systems [J]. *Physical Review A*, 2020, 101(4): 042117.
- [52] Wu S J, Li Y. Weak measurements beyond the Aharonov-Albert-Vaidman formalism [J]. *Physical Review A*, 2011, 83(5): 052106.
- [53] Geszti T. Postselected weak measurement beyond the weak-value[J]. *Physical Review A*, 2010, 81(4): 044102.
- [54] Koike T, Tanaka S. Limits on amplification by Aharonov-Albert-Vaidman weak measurement [J]. *Physical Review A*, 2011, 84(6): 062106.
- [55] Zhu X M, Zhang Y X, Pang S S, et al. Quantum measurements with preselection and postselection[J]. *Physical Review A*, 2011, 84(5): 052111.
- [56] di Lorenzo A. Full counting statistics of weak-value measurement[J]. *Physical Review A*, 2012, 85(3): 032106.
- [57] Nakamura K, Nishizawa A, Fujimoto M K. Evaluation of weak measurements to all orders [J]. *Physical Review A*, 2012, 85: 012113.
- [58] Nishizawa A, Nakamura K, Fujimoto M K. Weak-value amplification in a shot-noise-limited interferometer[J]. *Physical Review A*, 2012, 85(6): 062108.
- [59] Chen S Z, Zhou X X, Mi C Q, et al. Modified weak measurements for the detection of the photonic spin Hall effect [J]. *Physical Review A*, 2015, 91(6): 062105.
- [60] Qiu J D, Ren C L, Li Z X, et al. Extended validity of weak measurement[J]. *Chinese Physics B*, 2020, 29(6): 064214.
- [61] Ren J H, Qin L P, Feng W, et al. Weak-value-amplification analysis beyond the Aharonov-Albert-Vaidman limit [J]. *Physical Review A*, 2020, 102(4): 042601.
- [62] Pang S S, Wu S J, Chen Z B. Weak measurement with orthogonal preselection and postselection [J]. *Physical Review A*, 2012, 86(2): 022112.
- [63] Ritchie N W M, Story J G, Hulet R G. Realization of a measurement of a "weak-value" [J]. *Physical Review Letters*, 1991, 66(9): 1107-1110.
- [64] Hosten O, Kwiat P. Observation of the spin Hall effect of light via weak measurements[J]. *Science*, 2008, 319(5864): 787-790.
- [65] Dixon P B, Starling D J, Jordan A N, et al. Ultrasensitive beam deflection measurement via interferometric weak-value amplification[J]. *Physical Review Letters*, 2009, 102(17): 173601.
- [66] Howell J C, Starling D J, Dixon P B, et al. Interferometric weak-value deflections: quantum and classical treatments [J]. *Physical Review A*, 2010,

- 81(3): 033813.
- [67] Qin Y, Li Y, He H, et al. Measurement of spin Hall effect of reflected light[J]. *Optics Letters*, 2009, 34(17): 2551-2553.
- [68] Brunner N, Simon C. Measuring small longitudinal phase shifts: weak measurements or standard interferometry?[J]. *Physical Review Letters*, 2010, 105: 010405.
- [69] Starling D J, Dixon P B, Williams N S, et al. Continuous phase amplification with a Sagnac interferometer[J]. *Physical Review A*, 2010, 82: 011802.
- [70] Starling D J, Dixon P B, Jordan A N, et al. Precision frequency measurements with interferometric weak-values[J]. *Physical Review A*, 2010, 82(6): 063822.
- [71] Feizpour A, Xing X X, Steinberg A M. Amplifying single-photon nonlinearity using weak measurements[J]. *Physical Review Letters*, 2011, 107(13): 133603.
- [72] Zilberberg O, Romito A, Gefen Y. Charge sensing amplification via weak-values measurement [J]. *Physical Review Letters*, 2011, 106(8): 080405.
- [73] Turner M D, Hagedorn C A, Schlaminger S, et al. Picoradian deflection measurement with an interferometric quasi-autocollimator using weak-value amplification[J]. *Optics Letters*, 2011, 36(8): 1479-1481.
- [74] Hogan J M, Hammer J, Chiow S W, et al. Precision angle sensor using an optical lever inside a Sagnac interferometer[J]. *Optics Letters*, 2011, 36(9): 1698-1700.
- [75] Pfeifer M, Fischer P. Weak-value amplified optical activity measurements[J]. *Optics Express*, 2011, 19(17): 16508-16517.
- [76] Zhou X X, Xiao Z C, Luo H L, et al. Experimental observation of the spin Hall effect of light on a nanometal film via weak measurements[J]. *Physical Review A*, 2012, 85(4): 043809.
- [77] Gorodetski Y, Bliokh K Y, Stein B, et al. Weak measurements of light chirality with a plasmonic slit [J]. *Physical Review Letters*, 2012, 109: 013901.
- [78] Egan P, Stone J A. Weak-value thermostat with 0.2 mK precision[J]. *Optics Letters*, 2012, 37(23): 4991-4993.
- [79] Viza G I, Martínez-Rincón J, Howland G A, et al. Weak-values technique for velocity measurements[J]. *Optics Letters*, 2013, 38(16): 2949-2952.
- [80] Jayaswal G, Mistura G, Merano M. Weak measurement of the Goos-Hänchen shift[J]. *Optics Letters*, 2013, 38(8): 1232-1234.
- [81] Li C F, Xu X Y, Tang J S, et al. Ultrasensitive phase estimation with white light [J]. *Physical Review A*, 2011, 83(4): 044102.
- [82] Xu X Y, Kedem Y, Sun K, et al. Phase estimation with weak measurement using a white light source [J]. *Physical Review Letters*, 2013, 111(3): 033604.
- [83] Jayaswal G, Mistura G, Merano M. Observation of the Imbert-Fedorov effect via weak-value amplification [J]. *Optics Letters*, 2014, 39(8): 2266-2269.
- [84] Magaña-Loaiza O S, Mirhosseini M, Rodenburg B, et al. Amplification of angular rotations using weak measurements [C]//*Frontiers in Optics 2014*, October 19-23, 2014, Tucson, Arizona United States. Washington, D.C.: OSA, 2014: FTh4A.4.
- [85] Hallaji M, Feizpour A, Dmochowski G, et al. Weak-value amplification of the nonlinear effect of a single photon[J]. *Nature Physics*, 2017, 13(6): 540-544.
- [86] Ling X H, Zhou X X, Huang K, et al. Recent advances in the spin Hall effect of light[J]. *Reports on Progress in Physics*, 2017, 80(6): 066401.
- [87] Chen S Z, Mi C Q, Cai L, et al. Observation of the Goos-Hänchen shift in graphene via weak measurements[J]. *Applied Physics Letters*, 2017, 110(3): 031105.
- [88] Chen S Z, Mi C Q, Wu W J, et al. Weak-value amplification for Weyl-point separation in momentum space[J]. *New Journal of Physics*, 2018, 20(10): 103050.
- [89] Steinmetz J, Lyons K, Song M, et al. Enhanced on-chip frequency measurement using weak-value amplification[EB/OL]. (2021-03-29)[2021-04-01]. <https://arxiv.org/abs/2103.15752>.
- [90] Braunstein S L, Caves C M. Statistical distance and the geometry of quantum states[J]. *Physical Review Letters*, 1994, 72(22): 3439-3443.
- [91] Giovannetti V, Lloyd S, Maccone L. Advances in quantum metrology [J]. *Nature Photonics*, 2011, 5(4): 222-229.
- [92] Braunstein S L. Quantum limits on precision measurements of phase[J]. *Physical Review Letters*, 1992, 69(25): 3598-3601.
- [93] Giovannetti V, Lloyd S, Maccone L. Quantum-enhanced measurements: beating the standard quantum limit[J]. *Science*, 2004, 306(5700): 1330-1336.
- [94] Giovannetti V, Lloyd S, Maccone L. Quantum metrology[J]. *Physical Review Letters*, 2006, 96: 010401.
- [95] Resch K J, Pagnell K L, Prevedel R, et al. Time-

- reversal and super-resolving phase measurements[J]. *Physical Review Letters*, 2007, 98(22): 223601.
- [96] Polino E, Valeri M, Spagnolo N, et al. Photonic quantum metrology [J]. *AVS Quantum Science*, 2020, 2(2): 024703.
- [97] Barnett S M, Fabre C, Maitre A. Ultimate quantum limits for resolution of beam displacements [J]. *The European Physical Journal D*, 2003, 22(3): 513-519.
- [98] Combes J, Ferrie C, Jiang Z, et al. Quantum limits on postselected, probabilistic quantum metrology[J]. *Physical Review A*, 2014, 89(5): 052117.
- [99] Lee J, Tsutsui I. Merit of amplification by weak measurement in view of measurement uncertainty[J]. *Quantum Studies: Mathematics and Foundations*, 2014, 1(1/2): 65-78.
- [100] Combes J, Ferrie C. Cost of postselection in decision theory [J]. *Physical Review A*, 2015, 92 (2): 022117.
- [101] Susa Y, Tanaka S. Statistical hypothesis testing by weak-value amplification: proposal and evaluation [J]. *Physical Review A*, 2015, 92: 012112.
- [102] Arvidsson-Shukur D R M, Younger Halpern N, Lepage H V, et al. Quantum advantage in postselected metrology[J]. *Nature Communications*, 2020, 11(1): 3775.
- [103] Zhang L J, Datta A, Walmsley I A. Precision metrology using weak measurements [J]. *Physical Review Letters*, 2015, 114(21): 210801.
- [104] Hofmann H F, Goggin M E, Almeida M P, et al. Estimation of a quantum interaction parameter using weak measurements: theory and experiment [J]. *Physical Review A*, 2012, 86(4): 040102.
- [105] Tanaka S, Yamamoto N. Information amplification via postselection: a parameter-estimation perspective [J]. *Physical Review A*, 2013, 88(4): 042116.
- [106] Alves G B, Escher B M, de Matos Filho R L, et al. Weak-value amplification as an optimal metrological protocol [J]. *Physical Review A*, 2015, 91 (6): 062107.
- [107] Li F, Huang J Z, Zeng G H. Adaptive weak-value amplification with adjustable postselection [J]. *Physical Review A*, 2017, 96(3): 032112.
- [108] Xu L, Liu Z X, Datta A, et al. Approaching quantum-limited metrology with imperfect detectors by using weak-value amplification [J]. *Physical Review Letters*, 2020, 125(8): 080501.
- [109] Pang S S, Dressel J, Brun T A. Entanglement-assisted weak-value amplification [J]. *Physical Review Letters*, 2014, 113(3): 030401.
- [110] Chen J S, Liu B H, Hu M J, et al. Realization of entanglement-assisted weak-value amplification in a photonic system [J]. *Physical Review A*, 2019, 99 (3): 032120.
- [111] Stárek R, Mičuda M, Hošák R, et al. Experimental entanglement-assisted weak measurement of phase shift [J]. *Optics Express*, 2020, 28 (23): 34639-34655.
- [112] Pang S S, Brun T A. Suppressing technical noise in weak measurements by entanglement [J]. *Physical Review A*, 2015, 92: 012120.
- [113] Pang S S, Brun T A. Improving the precision of weak measurements by postselection measurement [J]. *Physical Review Letters*, 2015, 115 (12): 120401.
- [114] Jordan A N, Tollaksen J, Troupe J E, et al. Heisenberg scaling with weak measurement: a quantum state discrimination point of view [J]. *Quantum Studies: Mathematics and Foundations*, 2015, 2(1): 5-15.
- [115] Chen G, Zhang L J, Zhang W H, et al. Achieving Heisenberg-scaling precision with projective measurement on single photons [J]. *Physical Review Letters*, 2018, 121(6): 060506.
- [116] Chen G, Aharon N, Sun Y N, et al. Heisenberg-scaling measurement of the single-photon Kerr non-linearity using mixed states [J]. *Nature Communications*, 2018, 9: 93.
- [117] Torres J P, Salazar-Serrano L J. Weak-value amplification: a view from quantum estimation theory that highlights what it is and what isn't [J]. *Scientific Reports*, 2016, 6: 19702.
- [118] Knee G C, Briggs G A D, Benjamin S C, et al. Quantum sensors based on weak-value amplification cannot overcome decoherence [J]. *Physical Review A*, 2013, 87: 012115.
- [119] Pang S S, Alonso J R G, Brun T A, et al. Protecting weak measurements against systematic errors [J]. *Physical Review A*, 2016, 94: 012329.
- [120] Ferrie C, Combes J. Weakvalue amplification is suboptimal for estimation and detection [J]. *Physical Review Letters*, 2014, 112(4): 040406.
- [121] Jordan A N, Martínez-Rincón J, Howell J C. Technical advantages for weak-value amplification: when less is more [J]. *Physical Review X*, 2014, 4: 011031.
- [122] Sinclair J, Hallaji M, Steinberg A M, et al. Weak-value amplification and optimal parameter estimation in the presence of correlated noise [J]. *Physical Review A*, 2017, 96(5): 052128.
- [123] Starling D J, Dixon P B, Jordan A N, et al. Optimizing the signal-to-noise ratio of a beam-deflection measurement with interferometric weak-

- values [J]. *Physical Review A*, 2009, 80 (4): 041803.
- [124] Kedem Y. Using technical noise to increase the signal-to-noise ratio of measurements via imaginary weak-values[J]. *Physical Review A*, 2012, 85(6): 060102.
- [125] Knee G C, Gauger E M. When amplification with weak-values fails to suppress technical noise [J]. *Physical Review X*, 2014, 4: 011032.
- [126] Viza G I, Martínez-Rincón J, Alves G B, et al. Experimentally quantifying the advantages of weak-values-based metrology[C]//CLEO: QELS_Fundamental Science 2015, May 10-15, 2015, San Jose, California United States. Washington, D. C.: OSA, 2015: FM1A.2.
- [127] Harris J, Boyd R W, Lundeen J S. Weak-value amplification can outperform conventional measurement in the presence of detector saturation [J]. *Physical Review Letters*, 2017, 118 (7): 070802.
- [128] Dressel J, Lyons K, Jordan A N, et al. Strengthening weak-value amplification with recycled photons[J]. *Physical Review A*, 2013, 88 (2): 023821.
- [129] Lyons K, Dressel J, Jordan A N, et al. Power-recycled weak-value-based metrology [J]. *Physical Review Letters*, 2015, 114(17): 170801.
- [130] Wang Y T, Tang J S, Hu G, et al. Experimental demonstration of higher precision weak-value-based metrology using power recycling[J]. *Physical Review Letters*, 2016, 117(23): 230801.
- [131] Strübi G, Bruder C. Measuring ultrasmall time delays of light by joint weak measurements [J]. *Physical Review Letters*, 2013, 110(8): 083605.
- [132] Fang C, Huang J Z, Yu Y, et al. Ultra-small time-delay estimation via a weak measurement technique with post-selection[J]. *Journal of Physics B*, 2016, 49(17): 175501.
- [133] Martínez-Rincón J, Liu W T, Viza G I, et al. Can anomalous amplification be attained without postselection?[J]. *Physical Review Letters*, 2016, 116(10): 100803.
- [134] Liu W T, Martínez-Rincón J, Viza G I, et al. Anomalous amplification of a homodyne signal via almost-balanced weak-values [J]. *Optics Letters*, 2017, 42(5): 903-906.
- [135] Martínez-Rincón J, Mullarkey C A, Viza G I, et al. Ultrasensitive inverse weak-value tilt meter [J]. *Optics Letters*, 2017, 42(13): 2479-2482.
- [136] Lyons K, Howell J C, Jordan A N. Noise suppression in inverse weak-value-based phase detection [J]. *Quantum Studies: Mathematics and Foundations*, 2018, 5(4): 579-588.
- [137] Yin P, Zhang W H, Xu L, et al. Improving the precision of optical metrology by detecting fewer photons [EB/OL]. (2021-03-23) [2021-04-01]. <https://arxiv.org/abs/2103.12373>.
- [138] Zhang Z H, Chen G, Xu X Y, et al. Ultrasensitive biased weak measurement for longitudinal phase estimation[J]. *Physical Review A*, 2016, 94(5): 053843.
- [139] Li D M, Guan T, He Y H, et al. A chiral sensor based on weak measurement for the determination of Proline enantiomers in diverse measuring circumstances [J]. *Biosensors and Bioelectronics*, 2018, 110: 103-109.
- [140] Li D M, Guan T, Liu F, et al. Optical rotation based chirality detection of enantiomers via weak measurement in frequency domain [J]. *Applied Physics Letters*, 2018, 112(21): 213701.
- [141] Thew R T, Nemoto K, White A G, et al. Qudit quantum-state tomography[J]. *Physical Review A*, 2002, 66: 012303.
- [142] James D F V, Kwiat P G, Munro W J, et al. Measurement of qubits [J]. *Physical Review A*, 2001, 64(5): 052312.
- [143] Horodecki R, Horodecki P, Horodecki M, et al. Quantum entanglement [J]. *Reviews of Modern Physics*, 2009, 81(2): 865-942.
- [144] Xu H C, Xu F X, Theurer T, et al. Experimental quantification of coherence of a tunable quantum detector[J]. *Physical Review Letters*, 2020, 125(6): 060404.
- [145] Pallister S, Linden N, Montanaro A. Optimal verification of entangled states with local measurements[J]. *Physical Review Letters*, 2018, 120(17): 170502.
- [146] Lundeen J S, Sutherland B, Patel A, et al. Direct measurement of the quantum wavefunction [J]. *Nature*, 2011, 474(7350): 188-191.
- [147] Fischbach J, Freyberger M. Quantum optical reconstruction scheme using weak values[J]. *Physical Review A*, 2012, 86(5): 052110.
- [148] Salvail J Z, Agnew M, Johnson A S, et al. Full characterization of polarization states of light via direct measurement[J]. *Nature Photonics*, 2013, 7 (4): 316-321.
- [149] Malik M, Mirhosseini M, Lavery M P J, et al. Direct measurement of a 27-dimensional orbital-angular-momentum state vector[J]. *Nature Communications*, 2014, 5: 3115.
- [150] Chaturvedi S, Ercolessi E, Marmo G, et al. Wigner-

- Weyl correspondence in quantum mechanics for continuous and discrete systems: a Dirac-inspired view[J]. *Journal of Physics A*, 2006, 39(6): 1405-1423.
- [151] Bamber C, Lundeen J S. Observing Dirac's classical phase space analog to the quantum state[J]. *Physical Review Letters*, 2014, 112(7): 070405.
- [152] Lundeen J S, Bamber C. Procedure for direct measurement of general quantum states using weak measurement[J]. *Physical Review Letters*, 2012, 108(7): 070402.
- [153] Mao Y L, Ma Z H, Jin R B, et al. Error-disturbance trade-off in sequential quantum measurements[J]. *Physical Review Letters*, 2019, 122(9): 090404.
- [154] di Lorenzo A. Quantum state tomography from a sequential measurement of two variables in a single setup[J]. *Physical Review A*, 2013, 88(4): 042114.
- [155] di Lorenzo A. Sequential measurement of conjugate variables as an alternative quantum state tomography[J]. *Physical Review Letters*, 2013, 110(1): 010404.
- [156] Diósi L. Structural features of sequential weak measurements[J]. *Physical Review A*, 2016, 94: 010103.
- [157] Shojaee E, Jackson C S, Riofrio C A, et al. Optimal pure-state qubit tomography via sequential weak measurements[J]. *Physical Review Letters*, 2018, 121(13): 130404.
- [158] Chen J S, Hu M J, Hu X M, et al. Experimental realization of sequential weak measurements of non-commuting Pauli observables[J]. *Optics Express*, 2019, 27(5): 6089-6097.
- [159] Thekkadath G S, Giner L, Chalich Y, et al. Direct measurement of the density matrix of a quantum system[J]. *Physical Review Letters*, 2016, 117(12): 120401.
- [160] Wu S J. State tomography via weak measurements[J]. *Scientific Reports*, 2013, 3(1): 1193.
- [161] Ren C L, Wang Y, Du J F. Efficient direct measurement of arbitrary quantum systems via weak measurement[J]. *Physical Review Applied*, 2019, 12: 014045.
- [162] Lundeen J S, Resch K J. Practical measurement of joint weak-values and their connection to the annihilation operator[J]. *Physics Letters A*, 2005, 334(5/6): 337-344.
- [163] Brodutch A, Vaidman L. Measurements of non local weak-values[J]. *Journal of Physics: Conference Series*, 2009, 174: 012004.
- [164] Kedem Y, Vaidman L. Modular values and weak-values of quantum observables[J]. *Physical Review Letters*, 2010, 105(23): 230401.
- [165] Pan W W, Xu X Y, Kedem Y, et al. Direct measurement of a nonlocal entangled quantum state[J]. *Physical Review Letters*, 2019, 123(15): 150402.
- [166] Kim Y, Kim Y S, Lee S Y, et al. Direct quantum process tomography via measuring sequential weak-values of incompatible observables[J]. *Nature Communications*, 2018, 9(1): 192.
- [167] Xu L, Xu H C, Xu F X, et al. Direct characterization of quantum measurement using weak-values [EB/OL]. (2020-05-21)[2021-04-01]. <https://arxiv.org/abs/2005.10423>.
- [168] Brida G, Ciavarella L, Degiovanni I P, et al. Ancilla-assisted calibration of a measuring apparatus[J]. *Physical Review Letters*, 2012, 108(25): 253601.
- [169] Zhang L J, Coldenstrodt-Ronge H B, Datta A, et al. Mapping coherence in measurement via full quantum tomography of a hybrid optical detector[J]. *Nature Photonics*, 2012, 6(6): 364-368.
- [170] Zhang L J, Datta A, Coldenstrodt-Ronge H B, et al. Recursive quantum detector tomography[J]. *New Journal of Physics*, 2012, 14(11): 115005.
- [171] Lundeen J S, Feito A, Coldenstrodt-Ronge H, et al. Tomography of quantum detectors[J]. *Nature Physics*, 2009, 5(1): 27-30.
- [172] Barnett S M, Pegg D T, Jeffers J. Bayes' theorem and quantum retrodiction[J]. *Journal of Modern Optics*, 2000, 47(11): 1779-1789.
- [173] Pegg D T, Barnett S M, Jeffers J. Quantum retrodiction in open systems[J]. *Physical Review A*, 2002, 66(2): 022106.
- [174] Pegg D T, Barnett S M. Retrodictive quantum optical state engineering[J]. *Journal of Modern Optics*, 2004, 51(11): 1613-1626.
- [175] Amri T. Quantum behavior of measurement apparatus [EB/OL]. (2010-01-18) [2021-04-01]. <https://arxiv.org/abs/1001.3032>.
- [176] Amri T, Laurat J, Fabre C. Characterizing quantum properties of a measurement apparatus: insights from the retrodictive approach[J]. *Physical Review Letters*, 2011, 106(2): 020502.
- [177] Maccone L, Rusconi C C. State estimation: a comparison between direct state measurement and tomography[J]. *Physical Review A*, 2014, 89(2): 022122.
- [178] Zou P, Zhang Z M, Song W. Direct measurement of general quantum states using strong measurement[J]. *Physical Review A*, 2015, 91(5): 052109.
- [179] Vallone G, Dequal D. Strong measurements give a better direct measurement of the quantum wave

- function[J]. *Physical Review Letters*, 2016, 116(4): 040502.
- [180] Zhang Y X, Wu S J, Chen Z B. Coupling-deformed pointer observables and weak-values [J]. *Physical Review A*, 2016, 93(3): 032128.
- [181] Zhu X M, Zhang Y X, Wu S J. Direct state reconstruction with coupling-deformed pointer observables[J]. *Physical Review A*, 2016, 93(6): 062304.
- [182] Denkmayr T, Geppert H, Lemmel H, et al. Experimental demonstration of direct path state characterization by strongly measuring weak-values in a matter-wave interferometer [J]. *Physical Review Letters*, 2017, 118: 010402.
- [183] Calderaro L, Foletto G, Dequal D, et al. Direct reconstruction of the quantum density matrix by strong measurements [J]. *Physical Review Letters*, 2018, 121(23): 230501.
- [184] Zhu X M, Wei Q, Liu L X, et al. Hybrid direct state tomography by weak-value [EB/OL]. (2019-09-05) [2021-04-01]. <https://arxiv.org/abs/1909.02461>.
- [185] Zhang C R, Hu M J, Hou Z B, et al. Direct measurement of the two-dimensional spatial quantum wave function via strong measurements [J]. *Physical Review A*, 2020, 101: 012119.
- [186] Howland G A, Lum D J, Howell J C. Compressive wavefront sensing with weak-values [J]. *Optics Express*, 2014, 22(16): 18870-18880.
- [187] Mirhosseini M, Magaña-Loaiza O S, Hashemi Rafsanjani S M, et al. Compressive direct measurement of the quantum wave function [J]. *Physical Review Letters*, 2014, 113(9): 090402.
- [188] Knarr S H, Lum D J, Schneeloch J, et al. Compressive direct imaging of a billion-dimensional optical phase space [J]. *Physical Review A*, 2018, 98(2): 023854.
- [189] Shi Z M, Mirhosseini M, Margiewicz J, et al. Scan-free direct measurement of an extremely high-dimensional photonic state [J]. *Optica*, 2015, 2(4): 388-392.
- [190] Ogawa K, Yasuhiko O, Kobayashi H, et al. A framework for measuring weak-values without weak interactions and its diagrammatic representation [J]. *New Journal of Physics*, 2019, 21(4): 043013.
- [191] Ogawa K, Okazaki T, Kobayashi H, et al. Direct measurement of ultrafast temporal wavefunctions [EB/OL]. (2021-03-01) [2021-04-01]. <https://arxiv.org/abs/2103.01020>.
- [192] Zhou Y Y, Zhao J P, Hay D, et al. Direct tomography of high-dimensional density matrices for general quantum states [EB/OL]. (2021-02-02) [2021-04-01]. <https://arxiv.org/abs/2102.01271>.
- [193] Yang M, Xiao Y, Liao Y W, et al. Zonal reconstruction of photonic wavefunction via momentum weak measurement [J]. *Laser & Photonics Reviews*, 2020, 14(5): 1900251.