

# 基于对称 Kullback-Leibler 散度的点集配准方法

杨小艳\*

安康学院电子与信息工程学院电子信息技术研究中心, 陕西 安康, 725000

**摘要** 提出一种基于 SKL (Symmetric Kullback-Leibler) 散度的点集配准算法, 将点集中的每一个点表示成一个高斯分布, 高斯分布包含点的位置信息和周围点的影响大小信息。将整个点集建模为一个高斯混合模型 (GMM), 因此两点集的配准问题转化为求两 GMM 间 SKL 散度的最小值问题。采用遗传算法进行优化求解。实验结果表明, 所提算法对噪声、出格点和缺失点具有较强的鲁棒性, 且取得较高的配准精度。

**关键词** 图像处理; 点集配准; 对称 Kullback-Leibler 散度; 高斯混合模型; 图像配准

中图分类号 TP753

文献标志码 A

doi: 10.3788/LOP57.081022

## Point Set Registration Method Based on Symmetric Kullback-Leibler Divergence

Yang Xiaoyan\*

Research Center of Electronic Information Technology, School of Electronic and Information Engineering, Ankang University, Ankang, Shaanxi 725000

**Abstract** A point set registration algorithm based on symmetric Kullback-Leibler (SKL) divergence is proposed. Each point in the point set is represented as a Gaussian distribution. The Gaussian distribution includes the location information of the point and the influences from surrounding points. The whole point set is modeled as a Gaussian mixture model (GMM). The registration problem of two point sets is thus formulated as the minimum value solution of SKL divergence between two GMMs. The genetic algorithm is used for optimal solution. The experimental results show that the proposed algorithm is robust to noise, outliers, and missing points, and achieves good registration accuracy.

**Key words** image processing; point set registration; symmetric Kullback-Leibler divergence; Gaussian mixture model; image registration

**OCIS codes** 100.3008; 120.0280

## 1 引言

点集配准是计算机视觉和模式识别研究的一项重要内容, 广泛应用于异源图像配准<sup>[1]</sup>、目标分类识别<sup>[2]</sup>、立体视觉、医学图像处理<sup>[3]</sup>等领域中。点集配准的任务是寻找两点集间点与点的对应关系, 并求解出某一点集到另一点集的变换参数。然而, 在实际处理中, 噪声、出格点和缺失点的大量存在, 导致点集配准的精度急剧下降。存在噪声、出格点和缺

失点情况下的点集配准成为计算机视觉和模式识别研究的热点和难点问题, 当前亟需研究鲁棒性强且精度高的点集配准算法。

点集配准算法基本可以分为两类: 一类是通过估计两点集间的空间变换参数来找到点与点之间的对应关系, 这类算法主要有迭代最近点 (ICP) 算法<sup>[4]</sup>、基于薄板样条的点集配准算法<sup>[5]</sup>等; 另一类是基于点特征, 通过点特征识别的方法来寻找点与点之间的变换关系, 从而求解出两点集间的变换参数,

收稿日期: 2019-07-11; 修回日期: 2019-08-26; 录用日期: 2019-09-24

基金项目: 国家自然科学基金 (61801005)、安康学院高层次人才项目 (2018AYQDZR01)、安康市科技计划项目 (2018Ak02-12)

\* E-mail: lotus\_summer117@163.com

这类算法主要有基于不变量特征的点集配准算法<sup>[6]</sup>、基于形状上下文的点集配准算法<sup>[7]</sup>等,该类算法对噪声、出格点和缺失点的鲁棒性较差。ICP算法是最基本且最常用的点集配准算法之一,ICP算法的基本原理是依据最近邻准则寻找两点集中点与点之间的对应关系,并计算两点集之间点对的均方差,将变换后的点集作为输入,继续寻找两点间的变换关系,若均方差大于给定的阈值,则通过继续迭代输入求解两点集间的变换关系,直至均方差小于给定的阈值。ICP算法是一种简单直观的点集配准方法,在两点集初始位置相差不大且两点集间有明确的“一对一”的对应关系时,ICP算法的配准精度较高。然而,在存在出格点、缺失点和噪声的情况下,ICP算法的精度急剧下降。一些学者针对ICP算法存在的问题提出了一些改进算法<sup>[8-12]</sup>,但这些改进算法基本都要求两点集间的初始位置比较接近。

与需要点集具有明确的“一对一”的对应关系不同,一种具有“一对多”的对应关系的配准算法在文献<sup>[13]</sup>中被提出,该算法将变换参数和点与点之间的对应关系构造成一个矩阵,通过模拟退火的方法来寻求优化问题的解。Myronenko等<sup>[13]</sup>利用期望最大化(EM)算法来求解变换参数和点与点之间的对应关系,同时采用高斯径向基函数(GRBF)来代替薄板样条模型表示点集的非刚体变化,实验证明,该方法在非刚体配准中具有较好的鲁棒性。近年来,在EM算法优化的框架下,一些具有较好鲁棒性的点集配准算法相继被提出<sup>[10,14-15]</sup>,该类算法将两点集分别建模为高斯混合模型(GMM),将寻求两点集中点与点之间的对应关系问题看成是求后验概率最大化的问题。这类算法对噪声、缺失点和出格点均具有较好的鲁棒性,且配准精度较高,但点集间变换参数的精度受到点集建模的影响。针对这些缺陷,一些不需要求解点与点之间的对应性的配准算法被提出<sup>[14,16-19]</sup>,这类算法同样将两点集分别建模为GMM,然后把点集配准问题转化成求两GMM间的差异性,两GMM间差异性最小时对应的参数即为点集的变换参数。实验证明该类算法对噪声、出格点和缺失点的鲁棒性较强,但在噪声和出格点较多的情况下,这类算法的精度会下降。此外,在合成孔径雷达图像中,利用非均匀GMM来对水体边缘点集进行建模,实现了含水体目标的高精度配准<sup>[20]</sup>。

基于鲁棒点集配准算法的思想,结合点集的统计性,本文提出一种基于SKL散度的点集配准算

法。该方法把待配准的两点集分别建模为GMM,其中,将点集中的每一个点表示成一个高斯分布,其均值是点的位置坐标,均方差的大小表示周围点对此点的影响大小,采用相等的权值系数进行高斯分布的混合。基于上述建模,将点集配准问题转化为使得两GMM间SKL散度最小化的问题,通过遗传算法来求解配准的变换参数,实验证明了该算法对噪声、出格点和缺失点具有较强的鲁棒性,且配准精度较高。

## 2 点集的GMM

在点集配准过程中,需要固定一个场景点集,用来当作配准的模版,另一个点集作为模型集,根据变化的变换参数来进行配准。对于模型集 $m$ 和场景集 $s$ ,通常,由于存在噪声、出格点和缺失点等情况,点集 $m$ 和 $s$ 的点数不一样。假设点集 $m$ 和 $s$ 中的点数分别为 $M$ 和 $S$ ,针对两点集分别建立GMM,其建模公式为

$$\begin{cases} p(x|\theta) = \sum_{i=1}^M \alpha_i \phi(x|\mu_i, \Sigma_i) \\ p(y|\Theta) = \sum_{j=1}^S \beta_j \phi(y|\nu_j, \Gamma_j) \end{cases}, \quad (1)$$

式中: $p(x|\theta)$ 和 $p(y|\Theta)$ 分别表示参数为 $\theta$ 和 $\Theta$ 的高斯混合模型; $\phi(x|\mu_i, \Sigma_i)$ 和 $\phi(y|\nu_j, \Gamma_j)$ 分别表示两GMM中第 $i$ 和第 $j$ 个高斯分布; $\mu_i$ 和 $\nu_j$ 分别表示相应高斯分布的均值; $\Sigma_i$ 和 $\Gamma_j$ 表示高斯分布的协方差矩阵; $\alpha_i$ 和 $\beta_j$ 表示GMM中的混合系数。为了表示点集中点的位置关系和点集中点与点之间的影响大小,将均值 $\mu_i$ 和 $\nu_j$ 表示为点的位置坐标,协方差矩阵 $\Sigma_i$ 和 $\Gamma_j$ 采用球极等方差形式,即 $\Gamma_j = \Sigma_i = \sigma^2 \mathbf{I}$ ( $\mathbf{I}$ 为单位矩阵)。高斯分布可建模为<sup>[17]</sup>

$$\begin{cases} \phi(x|\mu_i, \Sigma_i) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{\|x - \mu_i\|^2}{2\sigma^2}\right\} \\ \phi(y|\nu_j, \Gamma_j) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{\|x - \nu_j\|^2}{2\sigma^2}\right\} \end{cases}, \quad (2)$$

式中: $\sigma^2$ 为方差; $\|\cdot\|$ 为向量范数。两点集中的每一个点均利用(2)式建模为一个高斯分布。(2)式表示的是二维点集,但在数学上可直接推广到三维点集。每个高斯分布中的方差 $\sigma^2$ 表示了某点邻域内的点对该点的影响大小, $\sigma^2$ 越大,该点受到周围点的影响越大;反之,则影响越小。混合系数 $\alpha_i$ 和 $\beta_j$ 可分别表示为 $\alpha_i = 1/M$ , $\beta_j = 1/S$ 。

### 3 基于 SKL 散度的点集配准

#### 3.1 两 GMM 模型间的 SKL 散度

经过对两点集的 GMM 建模,配准问题转化为优化求解 GMM 间差异的最小值问题。在文献[21]中,GMM 间的差异性采用 KL 散度与移地距离相结合的方式,此外,文献[22]利用 KL 散度来计算两 GMM 间的差异性。由于 KL 散度并不满足对称性和三角不等式,并不是真实的距离度量,故本文采用 SKL 散度计算两 GMM 间的差异性。

对于两 GMM  $p(x|\theta)$  和  $q(x|\Theta)$ ,后续分别记为  $p(x)$  和  $q(x)$ ,其间的 SKL 散度计算式为

$$SKL[p(x),q(x)] = \frac{1}{2} \{KL[p(x),q(x)] + KL[q(x),p(x)]\}, \quad (3)$$

式中: $KL[p(x),q(x)]$ 表示 GMM 模型  $p(x)$ 到 $q(x)$ 的 KL 散度。求解(3)式的关键是求两 GMM 模型  $p(x)$ 和 $q(x)$ 间的 SKL 散度,由于  $p(x)$ 和 $q(x)$ 间的 SKL 散度没有解析表达式,因此,需要采用数值近似的方法来进行计算,在这里采用匹配近似的方法。

对于两 GMM 模型  $p(x)$ 和 $q(x)$ ,假设分别包含了  $M$  和  $S$  个高斯分布,记为

$$\begin{cases} p(x) = \sum_{i=1}^M \alpha_i f_i \\ q(x) = \sum_{j=1}^S \beta_j g_j \end{cases}, \quad (4)$$

式中: $f_i$ 为高斯混合模型  $p(x)$ 中第  $i$  个高斯成分; $g_j$ 为高斯混合模型  $q(x)$ 中第  $j$  个高斯成分。其间的 SKL 散度可表示为

$$SKL[p(x),q(x)] = \int p(x) \ln \frac{p(x)}{q(x)} dx + \int q(x) \ln \frac{q(x)}{p(x)} dx. \quad (5)$$

根据凸函数性质,将(4)式代入(5)式,可得<sup>[23]</sup>

$$SKL\left(\sum_{i=1}^M \alpha_i f_i \parallel \sum_{j=1}^S \beta_j g_j\right) \leq \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j SKL(f_i \parallel g_j). \quad (6)$$

根据匹配近似的原理,可得

$$SKL[p(x),q(x)] \approx$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \alpha_i \log(\alpha_i f_i) + \sum_{j=1}^n \beta_j \log(\beta_j g_j) - \\ & \sum_{i=1}^n \alpha_i \max_j \int f_i \log(\beta_j g_j) - \sum_{i=1}^n \beta_j \max_j \int g_j \log(\alpha_i f_i) = \\ & \sum_{i=1}^n \alpha_i \min_j \left[ SKL(f_i \parallel g_j) + \log \frac{\alpha_i}{\beta_j} \right]. \quad (7) \end{aligned}$$

根据(7)式的近似可以看出, $p(x)$ 和 $q(x)$ 之间

存在映射关系  $\pi: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$ ,在本文中,对应关系为

$$\pi(i) = \operatorname{argmin}[SKL(f_i \parallel g_j) - \log \beta_j]. \quad (8)$$

将对应关系代入(7)式,化简可得 SKL 散度的匹配近似为

$$SKL_{\text{match}}(f_i \parallel g_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \left[ SKL(f_i \parallel g_{\pi(i)}) + \log \frac{\alpha_i}{\beta_{\pi(i)}} \right]. \quad (9)$$

根据散度的链规则<sup>[24]</sup>,将(9)式化简为

$$SKL_{\text{match}}(p, q) = \sum_{i=1}^M SKL(f_i, g_i) - \log C_\pi, \quad (10)$$

式中: $C_\pi = \sum_{i=1}^M \beta_{\pi(i)}$ 。

#### 3.2 点集配准算法

基于两 GMM 间的对称 KL 散度的计算,给定模型集  $s$  一个变换  $T = \{R, s, t\}$ ,变换后的点集表示为  $T(s)$ ,则点集配准问题变为求点集  $m$  和点集  $s$  间对称 KL 散度的最小值问题,即  $\operatorname{argmin} SKL[m, T(s)]$ ,本文采用遗传算法来求解上述最优化问题,点集配准算法的流程可分为如下步骤:

- 1) 对点集  $s$  给定初始变换: $\mathbf{R} = \mathbf{I}$  ( $\mathbf{R}$  表示初始变换矩阵),  $s = 1, t = 0$ ;
- 2) 计算两 GMM 间的 SKL 散度,并将其与阈值进行比较,SKL 散度大于阈值则进行步骤 3),小于阈值则进行步骤 4);
- 3) 利用遗传算法求解  $\operatorname{argmin} SKL[m, T(s)]$  的最优化参数;
- 4) 根据优化参数输出点集配准结果。

### 4 实验与分析

为了分析本文所提的点集配准算法的鲁棒性和有效性,利用 Chui 数据集集中的点集数据进行实验。将本文基于 SKL 散度的刚体点集配准(简记为 SKL)结果分别与 ICP 算法<sup>[4]</sup>、核相关(KC)算法<sup>[17]</sup>和相干点漂移(CPD)算法<sup>[13]</sup>进行比较,利用配准成功率和均方差(MSE)作为衡量配准精度的指标。

采用 Chui 数据集集中的“fish”点集数据作为模板点集,在其中分别加入比例为 0.2 和 0.8 的随机出格点和噪声得到样本点集,对模板点集和样本点集分别用 SKL 算法、ICP 算法、KC 算法和 CPD 算法进行配准实验,由于 ICP 算法在出格点较多时的配准结果太差,因此没有列出该算法的实验结果,其余算法的对比结果如图 1~4 所示。从图 1~4 的结果

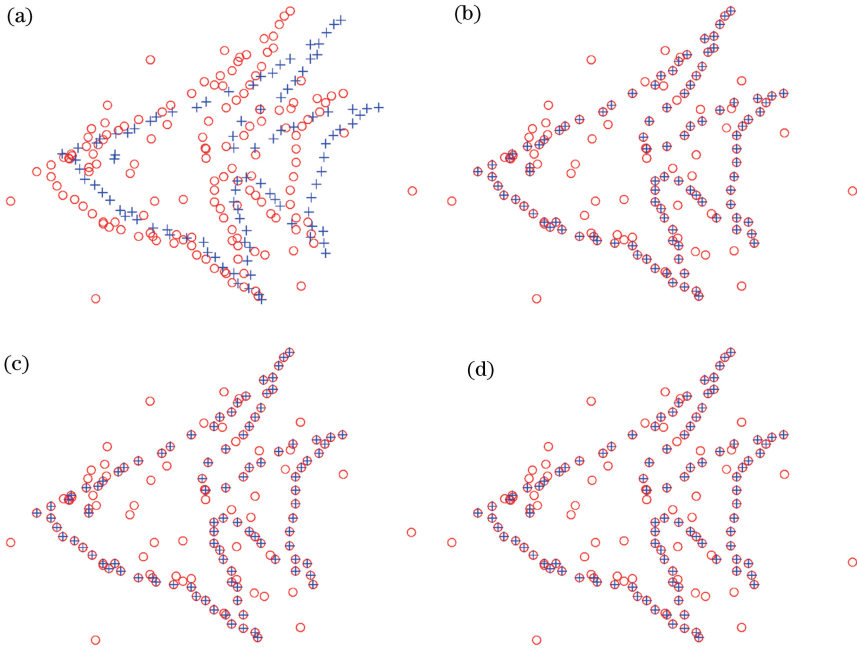


图 1 在出格点比例为 20% 时,不同算法的配准结果。(a)原始点集;(b) KC 算法结果;(c) CPD 算法结果;  
(d) SKL 算法结果

Fig. 1 Registration results of different algorithms at outlier ratio of 20%. (a) Original point set; (b) result of KC algorithm; (c) result of CPD algorithm; (d) result of SKL algorithm

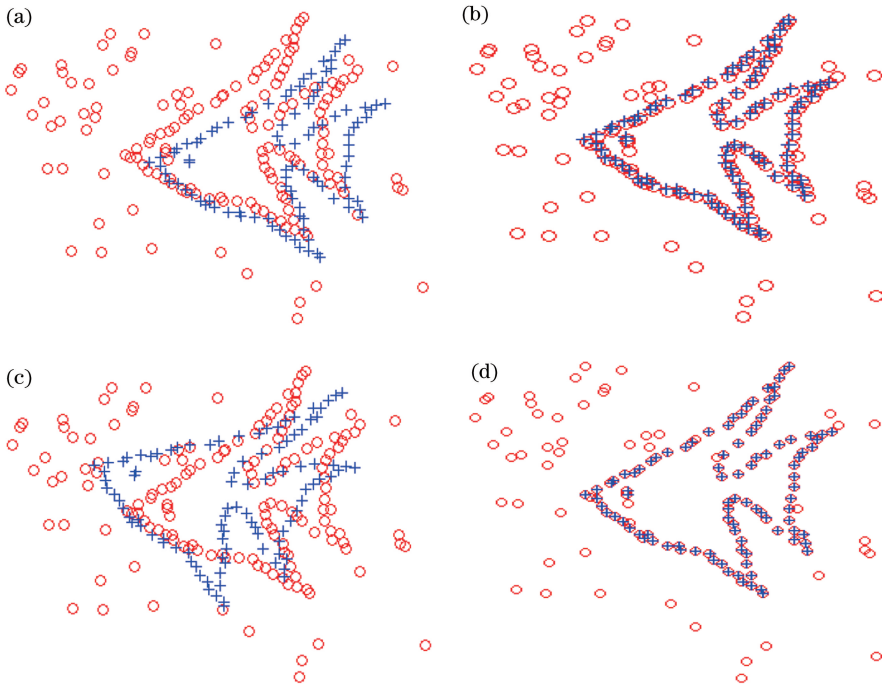


图 2 在出格点比例为 80% 时,不同算法的配准结果。(a)原始点集;(b) KC 算法结果;(c) CPD 算法结果;(d) SKL 算法结果  
Fig. 2 Registration results of different algorithms at outlier ratio of 80%. (a) Original point set; (b) result of KC algorithm; (c) result of CPD algorithm; (d) result of SKL algorithm

可以看出:当出格点和噪声较少时,CPD、KC 和 SKL 算法的配准精度均较高;当出格点和噪声较多时,CPD 算法的配准精度较差,而 KC 和 SKL 算法均有较高的配准精度,SKL 算法的配准结果好于

KC 算法。

为了定量比较 SKL、KC、CPD 和 ICP 算法的配准结果,在实验中改变加入点集中出格点和噪声的比例,分别在没有出格点或噪声以及在 20%、40%、

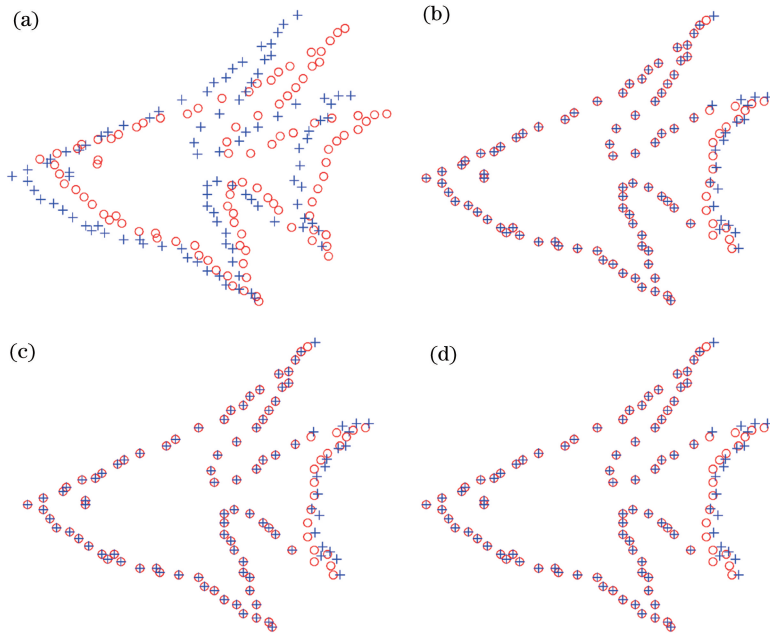


图3 在噪声比例为20%时,不同算法的配准结果。(a)原始点集;(b) KC算法结果;(c) CPD算法结果;(d) SKL算法结果  
Fig. 3 Registration results of different algorithms at noise ratio of 20%. (a) Original point set; (b) result of KC algorithm; (c) result of CPD algorithm; (d) result of SKL algorithm

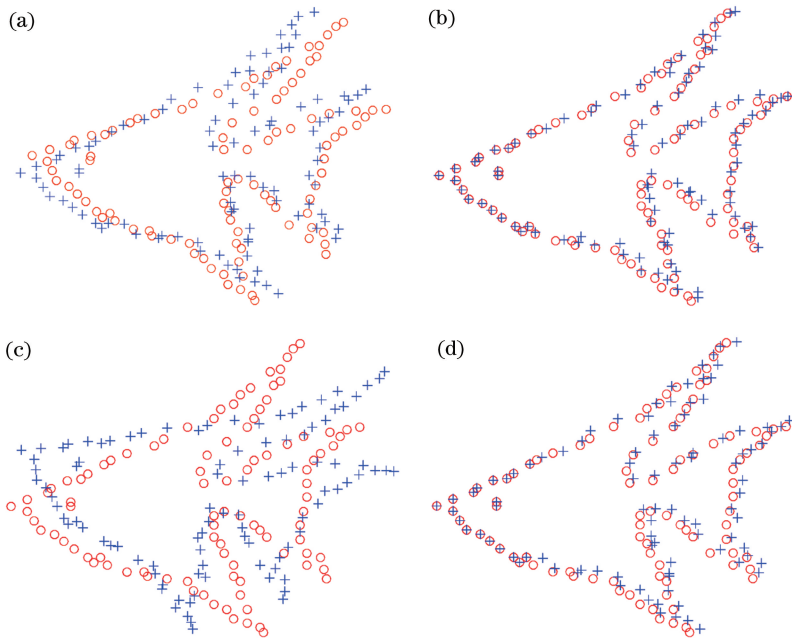


图4 在噪声比例为80%时,不同算法的配准结果。(a)原始点集;(b) KC算法结果;(c) CPD算法结果;(d) SKL算法结果  
Fig. 4 Registration results of different algorithms at noise ratio of 80%. (a) Original point set; (b) result of KC algorithm; (c) result of CPD algorithm; (d) result of SKL algorithm

60%、80%和100%的出格点或噪声比例的条件下进行配准实验,计算不同配准算法的配准成功率和MSE值,结果如图5和6所示。从图5和6的实验结果可以看出,当出格点和噪声的比例少于60%时,SKL和KC算法的配准成功率和MSE值相当,且均好于CPD算法的配准结果,ICP算法的配准精

度最低。当出格点和噪声的比例大于60%时,SKL算法的配准成功率最高,MSE最小。上述实验结果充分验证了本文所提配准算法的鲁棒性和有效性。

## 5 结 论

提出一种基于SKL散度的点集配准算法,通过



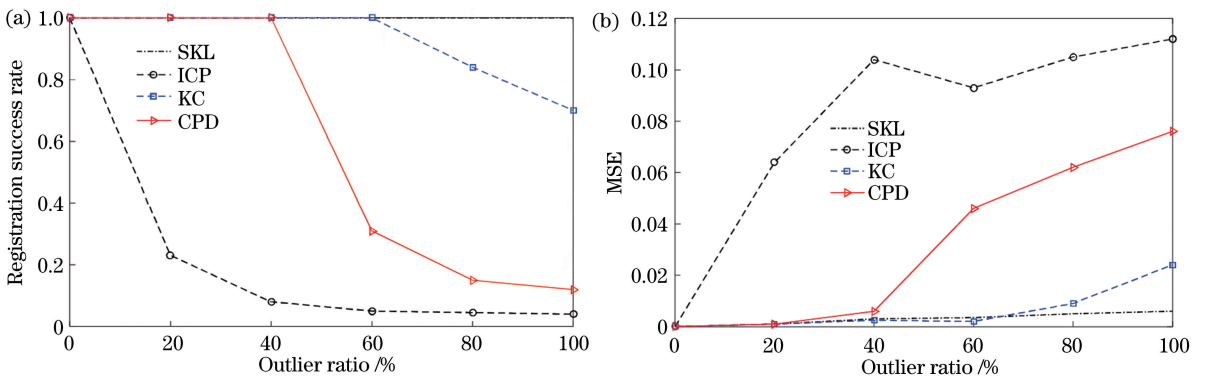


图5 不同出格点比例下的配准精度。(a)配准成功率;(b) MSE

Fig. 5 Registration accuracy under different outlier ratios. (a) Registration success rate; (b) MSE

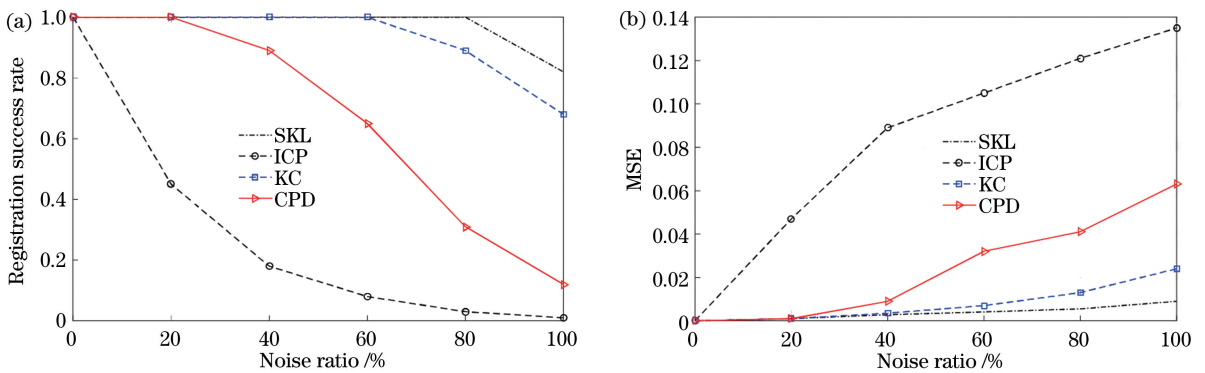


图6 不同噪声比例下的配准精度。(a)配准成功率;(b) MSE

Fig. 6 Registration accuracy under different noise ratios. (a) Registration success rate; (b) MSE

将两点集分别建模为高斯混合模型,点集配准问题转化为求两高斯混合模型间的 SKL 散度的最小值问题,并依据遗传算法求解点集配准的变换参数,两高斯混合模型间的 SKL 散度采用匹配近似的方法计算。在不同出格点和噪声比例下进行配准实验,并采用配准成功率和 MSE 来衡量算法的配准精度,实验结果验证了本文算法的有效性。

### 参 考 文 献

- [1] Dwith Chenna Y, Ghassemi P, Pfefer T, et al. Free-form deformation approach for registration of visible and infrared facial images in fever screening [J]. Sensors, 2018, 18(2): 125-138.
- [2] Martinez-Hernandez U, Dodd T J, Prescott T J. Feeling the shape: active exploration behaviors for object recognition with a robotic hand [J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2018, 48(12): 2339-2348.
- [3] Papazoglou S, Würfel J, Paul F, et al. Single-subject independent component analysis-based intensity normalization in non-quantitative multi-modal structural MRI [J]. Human Brain Mapping, 2017, 38

(7): 3615-3622.

- [4] Besl P J, McKay N D. A method for registration of 3-D shapes [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1992, 14 (2): 239-256.
- [5] Chui H L, Rangarajan A. A new point matching algorithm for non-rigid registration [J]. Computer Vision and Image Understanding, 2003, 89 (2/3): 114-141.
- [6] Gope C, Kehtarnavaz N. Affine invariant comparison of point-sets using convex hulls and Hausdorff distances [J]. Pattern Recognition, 2007, 40 (1): 309-320.
- [7] Yang M Q, Kidiyo K, Joseph R. Shape matching and object recognition using chord contexts [C] // 2008 International Conference Visualisation, July 9-11, 2008, London, UK. New York: IEEE, 2008: 63-69.
- [8] Shin D W, Ho Y S. 3D scene reconstruction using colorimetric and geometric constraints on iterative closest point method [J]. Multimedia Tools and Applications, 2018, 77(11): 14381-14406.
- [9] Liang L M, Wei M Q, Szymczak A, et al. Nonrigid

- iterative closest points for registration of 3D biomedical surfaces [J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2018, 100: 141-154.
- [10] Sobreira H, Costa C M, Sousa I, et al. Map-matching algorithms for robot self-localization: a comparison between perfect match, iterative closest point and normal distributions transform[J]. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 2019, 93(3/4): 533-546.
- [11] Zhao F Q, Geng G H. Fracture surface matching method for terracotta based on feature points [J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2018, 55(4): 041005.  
赵夫群, 耿国华. 基于特征点的秦俑断裂面匹配方法 [J]. *激光与光电子学进展*, 2018, 55(4): 041005.
- [12] Zeng F X, Li L, Diao X P. Iterative closest point algorithm registration based on curvature features [J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2017, 54(1): 011003.  
曾繁轩, 李亮, 刁鑫鹏. 基于曲率特征的迭代最近点算法配准研究 [J]. *激光与光电子学进展*, 2017, 54(1): 011003.
- [13] Myronenko A, Song X B. Point set registration: coherent point drift [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2010, 32(12): 2262-2275.
- [14] Li L, Yang M, Wang C, et al. Robust point set registration using signature quadratic form distance [J]. *IEEE transactions on Cybernetics*, 2018: 1-13.
- [15] Bustos A P, Chin T J. Guaranteed outlier removal for point cloud registration with correspondences[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2018, 40(12): 2868-2882.
- [16] Hasanbelliu E, Giraldo L S, Principe J C. Information theoretic shape matching [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2014, 36(12): 2436-2451.
- [17] Jian B, Vemuri B C. Robust point set registration using Gaussian mixture models [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2011, 33(8): 1633-1645.
- [18] Jia Q, Fan X, Liu Y, et al. Hierarchical projective invariant contexts for shape recognition [J]. *Pattern Recognition*, 2016, 52: 358-374.
- [19] Hua X Q. Research on key technologies of image object recognition based on information geometry [D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2014.  
华小强. 基于信息几何的图像目标识别关键技术研究 [D]. 长沙: 国防科学技术大学, 2014.
- [20] He F Y, Zhao W. Image registration of synthetic aperture radar including body of water [J]. *Acta Optica Sinica*, 2017, 37(9): 0928001.  
贺飞跃, 赵伟. 含水体的合成孔径雷达图像配准 [J]. *光学学报*, 2017, 37(9): 0928001.
- [21] Wang J, Wang P, Hua X Q, et al. Multi-source image registration method based on Kullback-Leibler divergence of unscented transform [J]. *Journal of Chongqing University of Technology (Natural Science)*, 2016, 30(8): 137-142.  
王佳, 王平, 华小强, 等. 基于无迹变换的 KL 散度异源图像匹配方法 [J]. *重庆理工大学学报(自然科学)*, 2016, 30(8): 137-142.
- [22] Yu Y. Similarity measure method of Gaussian mixture model by integrating Kullback-Leibler divergence and earth mover's distance [J]. *Journal of Computer Applications*, 2014, 34(3): 828-832.  
余艳. 融合 KL 散度和移地距离的高斯混合模型相似性度量方法 [J]. *计算机应用*, 2014, 34(3): 828-832.
- [23] Goldberger J, Gordon S, Greenspan H. An efficient image similarity measure based on approximations of KL-divergence between two Gaussian mixtures [C] // *Proceedings Ninth IEEE International Conference on Computer Vision*, October 13-16, 2003, Nice, France. New York: IEEE, 2003: 8301652.
- [24] Cover T M, Thomas J A. *Elements of information theory* [M]. 2nd ed. Canada: John Wiley & Sons, 2006.