

非周期量子行走扩散性质的研究

任建烽, 张融*

南京邮电大学电子与光学工程学院, 江苏 南京 210023

摘要 主要探讨了非周期性量子行走中波函数的扩散性质。计算结果表明,通过在不同位置使用不同的幺正演化操作,能够精确调控多路径相干叠加态。不同的演化操作导致相干相长或者相干相消现象,从而对扩散性质产生影响。通过调节系统的演化参数,可改变行走者的扩散速率。量子行走扩散速率的研究有助于发展基于量子行走的新算法。

关键词 量子光学; 量子行走; 波函数; 相干叠加; 幺正演化; 扩散速率

中图分类号 O413.1

文献标志码 A

doi: 10.3788/LOP57.232701

Diffusion Properties of Non-Periodic Quantum Walks

Ren Jianfeng, Zhang Rong*

College of Electronic and Optical Engineering, Nanjing University of Posts and
Telecommunication, Nanjing, Jiangsu 210023, China

Abstract The diffusion property of wave functions in the non-periodic quantum walks is investigated in detail. The numerical results show that the multipath coherent superposition state can be precisely controlled by using position-dependent unitary evolution. Different evolutionary operations lead to the phenomenon of constructive or destructive interference and thus it affects the diffusion property. The diffusion speed of the walker can be changed by adjusting the evolution parameters of the system. The research on the diffusion speed of quantum walks is helpful to design new algorithms based on quantum walks.

Key words quantum optics; quantum walks; wave function; coherent superposition; unitary evolution; diffusion speed

OCIS codes 270.1670; 270.5565; 270.5585

1 引言

量子行走是经典随机行走在量子世界的对应。经典随机行走是许多基础学科的模式,如计算科学和生物传播等^[1]。由于量子相干叠加性,量子行走的扩散速率相比经典随机行走更快,因此基于量子行走可以设计效率更高的算法。已有的研究成果表明,能够从硬件和软件两个方面利用量子行走来实现量子计算^[2-6]。此外,非周期量子行走可以用于模拟 Anderson 局域性和拓扑相变,为研究复杂现象提供了很好的平台。非周期性量子行走还能用于完成量子信息任务,例如,任意高维量子态的制备、量子态的完美传输以及量子态的测量和重构^[9-12]等。人们对量子行走的性质及其物理实现进

行了大量的研究,量子行走已经在核磁共振系统、囚禁原子、囚禁离子以及光波导等具体物理系统中得以实现^[13-16]。

人们广泛研究了不同量子行走模型中波函数的扩散性质。在空间均匀演化操作量子行走的过程中,通过改变硬币操作的系数来改变行走者多路径相干性,使得扩散速率得到优化,扩散速率呈二次方提速^[17]。通过添加随时间变化的相位,可以调控量子态并实现最大纠缠态,但是行走者的扩散速率比空间均匀系统低^[18]。进一步研究空间非周期的量子行走对扩散速率的影响,通过在原点添加相位来实现局域性,即行走者局域在原点附近,其扩散速率大大降低^[19]。已有实验结果表明,借助于线性光学器件可实现非周期量子行走。通过组合半

收稿日期: 2020-04-16; 修回日期: 2020-05-12; 录用日期: 2020-05-20

* E-mail: zhangr@njupt.edu.cn

波片和四分之一波片来制备系统初态,利用波片和双折射晶体来实现非均匀么正演化,利用单光子探测器来测量光子在不同位置的分布,由不同位置的光子数计算出扩散速率,观测到扩散速率相比周期量子行走低^[18]。

本文主要讨论了一维非周期量子行走的扩散性质。首先简单介绍了标准量子行走,在此基础上通过随位置变化的硬币操作,实现了非周期量子行走。其次根据末态波函数得出行走者的位置概率分布和位置方差,并讨论了硬币操作系数对系统扩散速率的影响^[20-23]。

2 物理模型

在一维量子行走中,行走者包含两个自由度,分别是量子硬币和位置。量子硬币的状态是两个相互正交的二维量子态 $|c\rangle$,其中 $c=0,1$ 分别表示沿着一维链向左或向右行走。行走者的位置状态用 $|x\rangle(x \in \mathbf{Z})$ 描述, x 是行走者处于一维链的位置。每一步行走包含两个操作:硬币翻转操作 \mathbf{H} 和条件行走操作 S 。每一步量子行走的么正演化算符 U 是

$$U = S(\mathbf{H} \otimes \mathbf{I}), \quad (1)$$

式中: \mathbf{I} 是单位操作。当硬币状态进行翻转时,在标准量子行走中,每一处的硬币操作都相同,即

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \sqrt{d} & \sqrt{1-d} \\ \sqrt{1-d} & -\sqrt{d} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

式中:硬币操作系数 $d \in (0,1)$,当 $d = \frac{1}{2}$ 时硬币翻转操作是Hadamard操作。硬币翻转操作使得行走者处于 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 的相干叠加态。根据硬币状态进行行走操作,条件行走算符是

$$S = \sum_x |0\rangle\langle 0| \otimes |x-1\rangle\langle x| + |1\rangle\langle 1| \otimes |x+1\rangle\langle x|, \quad (3)$$

式中: \otimes 为张量积。条件行走操作使行走者处于不同位置的相干叠加态。如果每一步演化后都基于正交基 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 对硬币态进行投影测量,位置相干性则会被彻底破坏,量子行走转化为经典随机行走。如果重复么正演化操作且不进行测量操作,由于行走者处于不同位置的相干叠加态,量子行走者在一维链上以相干扩散的方式远离初始位置。

利用随位置改变的硬币操作可以精确操控多路径相干态。本文重点讨论在原点处使用不同于其他位置的硬币操作:

$$\mathbf{H}(0) = \exp(i\varphi) \begin{pmatrix} \sqrt{d} & \sqrt{1-d} \\ \sqrt{1-d} & -\sqrt{d} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

式中:相位 $\varphi \in [0, 2\pi)$ 。其他位置和标准行走一样使用(2)式中的硬币操作。如果 $\varphi = 0$,这种非周期量子行走模型就转变为标准量子行走。

讨论行走者初始位置处于原点 $x = 0$ 处,硬币处于任意 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 的叠加态的情况:

$$\psi(0) = [a(0,0)|0\rangle + b(0,0)|1\rangle] |0\rangle, \quad (5)$$

式中: ψ 为波函数;系数 a 和 b 满足 $|a(0,0)|^2 + |b(0,0)|^2 = 1$ 。经过 t 步演化后,系统的末态 $\psi(t)$ 为

$$\psi(t) = U^t \psi(0) = \sum_x [a(x,t)|0\rangle + b(x,t)|1\rangle] |x\rangle, \quad (6)$$

式中: $x \in [-t:2:t]$,并且满足归一化条件 $\sum_x |a(x,t)|^2 + |b(x,t)|^2 = 1$,其中 $-t:2:t$ 表示 $-t$ 至 t ,间隔为2。末态中的系数 $a(-1,t)$ 和 $b(1,t)$ 的关系为

$$\begin{cases} \sqrt{2}a(-1,t) = \exp(i\varphi)a(0,t-1) + \exp(i\varphi)b(0,t-1) \\ \sqrt{2}b(1,t) = \exp(i\varphi)a(0,t-1) - \exp(i\varphi)b(0,t-1) \end{cases}. \quad (7)$$

其他系数根据如下递推关系得出:

$$\begin{cases} \sqrt{2}a(x-1,t) = a(x,t-1) + b(x,t-1) \\ \sqrt{2}b(x+1,t) = a(x,t-1) - b(x,t-1) \end{cases}. \quad (8)$$

利用系统末态可求出行走者的位置概率分布以及位置方差。位置概率分布描述的是经过若干步演化后行走者在不同位置的分布概率 $P(x,t) = |a(x,t)|^2 + |b(x,t)|^2$,位置方差 $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ 描述的是行走者远离原点的扩散速率,其中

$\langle \cdot \rangle$ 是对力学量算符求平均。通过位置概率分布以及位置方差来分析非周期量子行走的演化性质。本文所讨论的非周期量子行走的演化性质在20步演化过程中即可得到很好的展现,同时这也是目前很多物理系统能够达到的步数,所以后续数值结果讨论主要展示20步演化过程中的位置分布以及扩散速率性质。论文[19]详细探讨了 $\varphi \in [0, 2\pi)$ 对行走性质的局域影响,并发现 $\varphi = \pi$ 时扩散速率大

幅降低的现象,即局域性。本文讨论了如何选择合适的相位 φ 来增大扩散速率。对于给定步数 $t=20$ 和硬币操作系数 $d=0.5$, 扩散速率即位置方差随相位 φ 的变化如图 1 所示。可以看出, 扩散速率随着相位的变化而出现减小或者增大的现象, 这是由量子相干相消或者相干相长导致的。当 φ 取特殊的数值时, 行走者的扩散速率较 $\varphi=0$ 时的扩散速率大。对于其他步数和硬币参数有相同的结论。在后续讨论中, 选取 $\varphi=\pi/4$ 进行重点讨论, 该相位在实验中易实现并且能够使扩散速率增大。

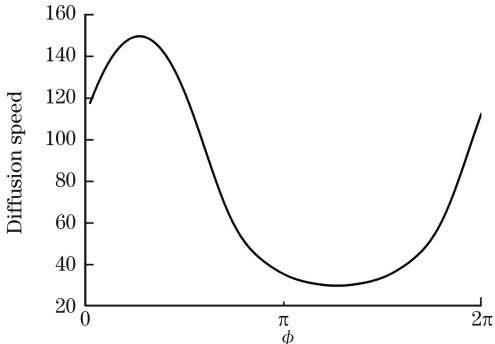


图 1 当 $t=20, d=0.5$ 时扩散速率随相位 φ 的变化
Fig. 1 Diffusion speed versus phase φ when $t=20$ and $d=0.5$

3 数值计算结果与讨论

首先计算了标准量子行走即 $\varphi=0$ 时, 硬币操作中的参数 d 对行走者位置概率分布 $P(x)$ 的影响。图 2(a)、(c)、(e) 分别描述了经过 20 步演化后 $d=0.2, 0.5, 0.8$ 对应的 $P(x)$ 。相比经典随机行走的高斯分布, 在标准量子行走中, $P(x)$ 在原点附近小而在远离原点处大, 说明行走者处于多路径相干叠加态。随着系数 d 的增大, 经过相同步数的演化, 行走者的扩散范围逐渐变宽。这是因为随着系数 d 的增大, 行走者远离原点的几率高于回到原点的几率。

选取原点处的硬币操作, 当 $\varphi=\pi/4, d=0.2, 0.5, 0.8$ 时的具体计算结果如图 2(b)、(d)、(f) 所示。其位置概率分布和 $\varphi=0$ 的情形类似, 同样会出现原点处 $P(x)$ 小而远离原点处 $P(x)$ 大的非高斯分布, 经过相同步数的演化, 行走者的扩散范围随着硬币系数 d 的增大而变宽。相比标准行走, 原点处的 $P(x)$ 会降得更低, 而远离原点处的 $P(x)$ 增大了。经过相同步数的演化, 行走者扩散到远离原点的几率增大了。

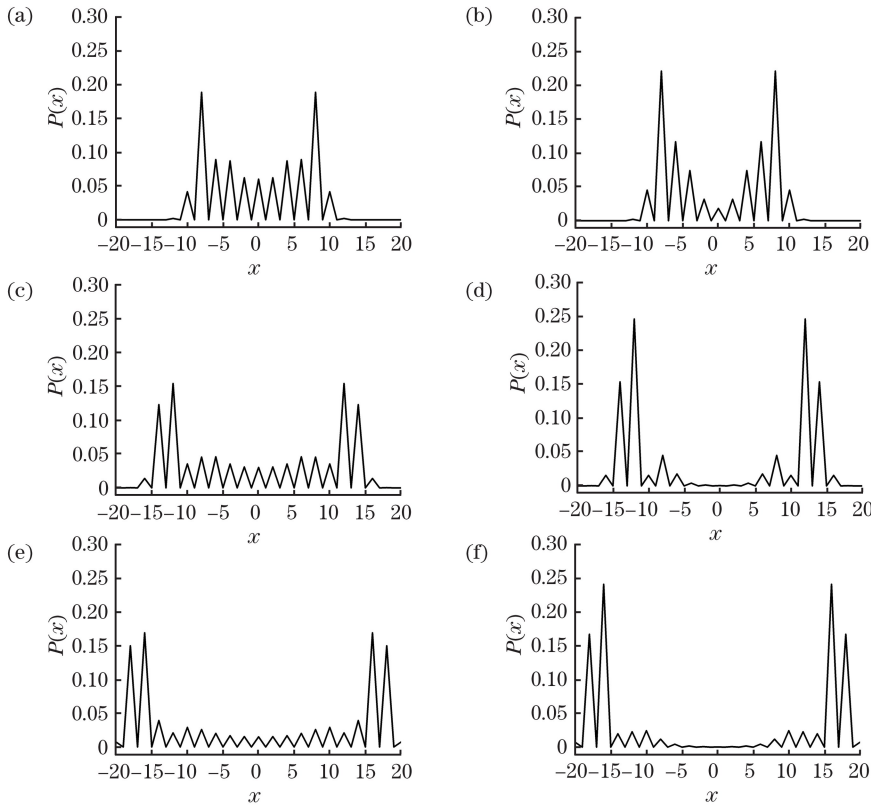


图 2 不同条件下行走者的位置概率分布。(a) $d=0.2, \varphi=0$; (b) $d=0.2, \varphi=\pi/4$; (c) $d=0.5, \varphi=0$; (d) $d=0.5, \varphi=\pi/4$; (e) $d=0.8, \varphi=0$; (f) $d=0.8, \varphi=\pi/4$

Fig. 2 Probability distributions of walker's position under different conditions. (a) $d=0.2, \varphi=0$; (a) $d=0.2, \varphi=\pi/4$; (c) $d=0.5, \varphi=0$; (d) $d=0.5, \varphi=\pi/4$; (e) $d=0.8, \varphi=0$; (f) $d=0.8, \varphi=\pi/4$

基于量子行走的快速扩散,可以设计新的效率更高的算法,接下来重点讨论行走者的扩散速率随硬币操作参数的改变。图 3(a)展示了在标准量子行走中,当选取不同的硬币参数 $d = 0.2, 0.5, 0.8$ 时,扩散速率随演化步数的变化。可以看出,增大硬币系数 d 可使行走者的扩散速率增大,这和图 2 中描述的经过相同步数的演化,行走者扩散的范围随着 d 的增大而变宽的结果是吻合的。

如果在原点处的硬币操作和其他位置处的硬币操作不同,并选取 $\varphi = \pi/4$,扩散速率随着步数的演化如图 3(b)、(c)、(d) 中的红色虚线所示。相

比较标准量子行走,非周期量子行走者在原点处相位 $\varphi = \pi/4$ 中的扩散速率均增大。可以通过改变原点处的硬币操作来显著提高行走者的扩散速率,这为基于量子行走实现高效率算法提供了很好的平台。本文提出的提高扩散速率的理论方案在线性光学系统或者光学波导等中可以实现。在线性光学系统中,可以利用半波片和四分之一波片的组合以及双折射晶体来实现空间非均匀幺正演化。以光学波导为例,目前的激光刻写技术可以实现随位置变化的幺正演化操作。最后通过单光子探测器测量光子在不同位置的分布。

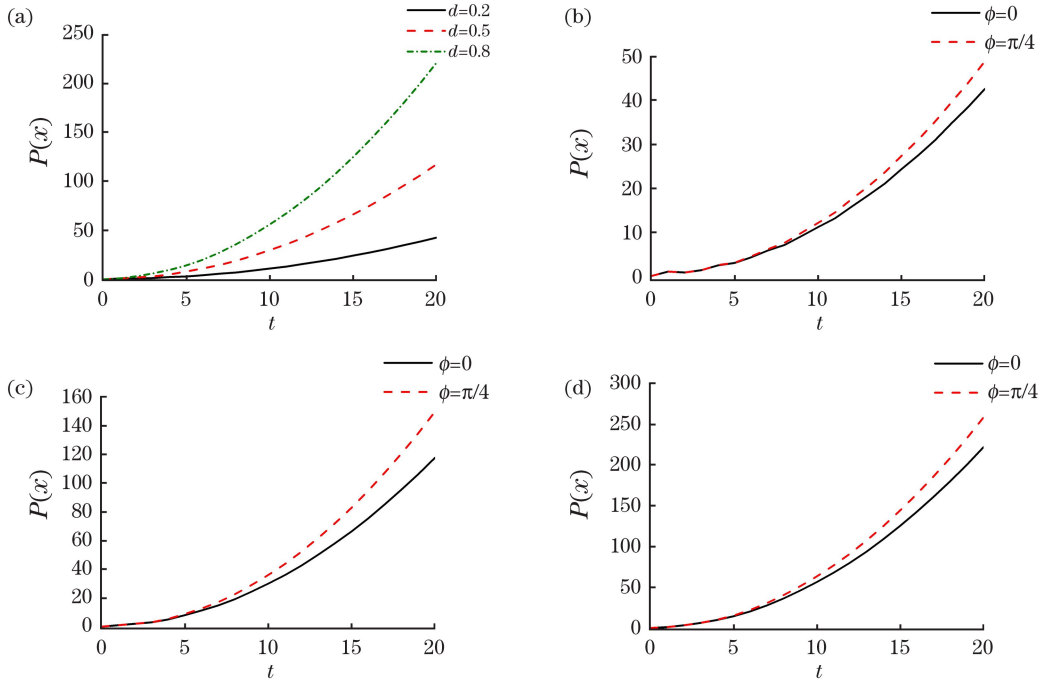


图 3 不同条件下位置方差随步数的变化。(a)不加相位;(b) $d = 0.2$; (c) $d = 0.5$; (d) $d = 0.8$

Fig. 3 Variance of position versus number of steps under different conditions. (a) No phase added; (b) $d=0.2$; (c) $d=0.5$; (d) $d=0.8$

4 结 论

通过理论计算,探讨了非周期量子行走的基本性质。行走者的位置概率分布和扩散速率均与硬币操作系数 d 和相位 φ 有关。增大系数 d 可使行走者在经过相同步骤后的扩散范围更大,从而提高了行走者的扩散速率。通过改变原点处硬币操作系数并选取 $\varphi = \pi/4$,能够进一步提高行走者的扩散速率。研究结论为基于量子行走设计新的效率更高的算法提供了很好的依据。

参 考 文 献

[1] Attal S, Petruccione F, Sabot C, et al. Open

quantum random walks [J]. Journal of Statistical Physics, 2012, 147(4): 832-852.

[2] Lu F. Controllable quantum entanglement based on cavity structure [J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2019, 56(4): 042701.

陆繁. 基于腔结构的可控量子纠缠[J]. 激光与光电子学进展, 2019, 56(4): 042701.

[3] He Z L, Sun M, Zeng H, et al. Communication method regarding quantum teleportation as quantum channel [J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2019, 56(23): 232602.

贺转玲, 孙苗, 曾晗, 等. 将量子隐形传态看作量子信道的通信方式[J]. 激光与光电子学进展, 2019, 56(23): 232602.

- [4] Wang G Y, Guo Y N. Protection of quantum coherence of qubit based on quantum feedback [J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2018, 55(10): 102702.
王国友, 郭有能. 基于量子反馈保护量子比特的相干性[J]. *激光与光电子学进展*, 2018, 55(10): 102702.
- [5] He Y F, Wang D, Yang H J, et al. Quantum key distribution based on heralded single photon sources and quantum memory[J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2019, 46(4): 0412001.
何业锋, 王登, 杨红娟, 等. 基于指示单光子源和量子存储的量子密钥分配[J]. *中国激光*, 2019, 46(4): 0412001.
- [6] Wang S F, Xiang X, Dong R F, et al. Research on experimental generation of quantum optical frequency comb [J]. *Acta Optica Sinica*, 2018, 38(10): 1027003.
王少锋, 项晓, 董瑞芳, 等. 量子光频梳产生实验研究[J]. *光学学报*, 2018, 38(10): 1027003.
- [7] Cong H L, Ren X Z. Quantum properties of two-level atoms interacting with frequency varying light fields under non-rotating-wave approximation [J]. *Acta Optica Sinica*, 2018, 38(4): 0427001.
丛红璐, 任学藻. 非旋波近似下二能级原子与频率变化光场作用的量子特性[J]. *光学学报*, 2018, 38(4): 0427001.
- [8] Shenvi N, Kempe J, Whaley K B. Quantum random-walk search algorithm[J]. *Physical Review A*, 2003, 67(5): 052307.
- [9] Kempe J. Quantum random walks: an introductory overview[J]. *Contemporary Physics*, 2003, 44(4): 307-327.
- [10] Stefaňak M, Skoupý S. Perfect state transfer by means of discrete-time quantum walk search algorithms on highly symmetric graphs[J]. *Physical Review A*, 2016, 94(2): 022301.
- [11] Rakovszky T, Asboth J K. Localization, delocalization, and topological phase transitions in the one-dimensional split-step quantum walk [J]. *Physical Review A*, 2015, 92(5): 052311.
- [12] Lee C, Kurzynski P, Nha H. Quantum walk as a simulator of nonlinear dynamics: nonlinear Dirac equation and solitons[J]. *Physical Review A*, 2015, 92(5): 052336.
- [13] Broome M A, Fedrizzi A, Lanyon B P, et al. Discrete single-photon quantum walks with tunable decoherence[J]. *Physical Review Letters*, 2010, 104(15): 153602.
- [14] Zeng M, Yong E H. Discrete-time quantum walk with phase disorder: localization and entanglement entropy[J]. *Scientific Reports*, 2017, 7: 12024.
- [15] Vieira R, Amorim E P M, Rigolin G. Dynamically disordered quantum walk as a maximal entanglement generator[J]. *Physical Review Letters*, 2013, 111(18): 180503.
- [16] Giordani T, Polino E, Emiliani S, et al. Experimental engineering of arbitrary qudit states with discrete-time quantum walks [J]. *Physical Review Letters*, 2019, 122(2): 020503.
- [17] Chandrashekar C M, Srikanth R, Laflamme R. Optimizing the discrete time quantum walk using a SU(2) coin[J]. *Physical Review A*, 2008, 77(3): 032326.
- [18] Wang Q Q, Xu X Y, Pan W W, et al. Dynamic-disorder-induced enhancement of entanglement in photonic quantum walks [J]. *Optica*, 2018, 5(9): 1136-1140.
- [19] Wójcik A, Łuczak T, Kurzyński P, et al. Trapping a particle of a quantum walk on the line[J]. *Physical Review A*, 2012, 85: 012329.
- [20] Du J F, Li H, Xu X D, et al. Experimental implementation of the quantum random-walk algorithm[J]. *Physical Review A*, 2003, 67(4): 042316.
- [21] Romanelli A. Thermodynamic behavior of the quantum walk[J]. *Physical Review A*, 2012, 85(1): 012319.
- [22] Abal G, Siri R, Romanelli A, et al. Quantum walk on the line: entanglement and nonlocal initial conditions[J]. *Physical Review A*, 2006, 73(4): 042302.
- [23] Peruzzo A, Lobino M, Matthews J C F, et al. Quantum walks of correlated photons [J]. *Science*, 2010, 329(5998): 1500-1503.