

# 基于小波分形插值的波前畸变校正

王海群, 王水满\*, 张怡

华北理工大学电气工程学院, 河北 唐山 063200

**摘要** 对于大气湍流引起的波前畸变, 现有波前重建方法的分辨率低, 并受传感器和变形镜的结构限制, 基于此, 提出一种基于小波分形差值波前校正的方法。该方法是在对大气湍流引起的波前畸变进行自相似分析的基础上, 利用小波分形插值方法进行波前重建的一种方法。首先采用快速小波分解法对波前相谱进行多分辨率分析, 并在此过程中进行软阈值去噪; 然后用分形插值方法提高波前相位的分辨率; 最后采用快速小波重构方法恢复波前相位。实验结果表明: 与基于最小方差估计(MVE)方法相比, 采用快速小波重构法恢复波前相位的光强值与残余波前方均根均显著提高, 能有效减少噪声的干扰, 得到较高的成像质量, 校正后的光斑形态良好, 稳定性较高。

**关键词** 成像系统; 小波变换; 分形插值; 波前畸变; 软阈值去噪

中图分类号 TN29

文献标志码 A

doi: 10.3788/LOP57.021103

## Wavefront Distortion Correction Based on Wavelet Fractal Interpolation

Wang Haiqun, Wang Shuiman\*, Zhang Yi

College of Electrical Engineering, North China University of Science and Technology, Tangshan, Hebei 063200, China

**Abstract** Existing wavefront reconstruction methods generally have low resolution when we examine wavefront distortion caused by turbulence in the atmosphere. They are also limited by the structures of sensors and deformable mirrors. In this paper, a method based on wavelet fractal-difference wavefront correction is proposed. A wavefront reconstruction method based on wavelet fractal interpolation is also proposed, and it is applied after performing self-similarity analysis of wavefront distortion caused by atmospheric turbulence. The multi-resolution analysis of the wavefront phase spectrum is performed by the fast wavelet decomposition method and soft threshold denoising is performed in this process. Subsequently, the fractal interpolation method is used to increase the resolution of the estimated wavefront phase. Finally, the recovery of the wavefront phase is achieved by applying the fast wavelet reconstruction method. Experimental results show that the fast wavelet reconstruction is capable of recovering the wavefront phase. Compared with the minimum variance estimation (MVE) method, the proposed method improves the light intensity value and residual wavefront root-mean-square value, thereby effectively reducing noise interference. A higher imaging quality is obtained and the corrected spot shape is reliable and stable.

**Key words** imaging systems; wavelet transform; fractal interpolation; wavefront distortion; soft threshold denoising

**OCIS codes** 110.1080; 010.1330; 140.3300

## 1 引言

自适应光学是一项使用可变形镜面矫正因大气抖动造成的光波波前畸变, 从而改进光学系统性能的技术<sup>[1]</sup>。在传统的波前重建方法中, 最常用的方

法是最小方差估计(MVE)。在实际应用中, 夏克-哈特曼波前传感器(WFS)用于测量光学自适应系统的波前梯度, 它由一系列小透镜组成, 每个小透镜将透过的光聚焦在其孔径内<sup>[2]</sup>, 并通过电荷耦合器件(CCD)来记录焦点的位置。一般来说, 透射光的

收稿日期: 2019-06-11; 修回日期: 2019-06-16; 录用日期: 2019-06-26

基金项目: 国家自然科学基金(61803154)

\* E-mail: 1615445294@qq.com

初始波前呈高斯分布,并且在长距离传播后可以被视为平面波,因此可以根据已知像素的原始位置计算波前梯度的值。但是在波前梯度的重建过程中,矩阵代数框架的波前测量分辨率会受到 WFS 中透镜数量的限制<sup>[3]</sup>,这会影响波前重建的质量,并且计算量大、计算过程复杂,特别是当检测孔径大并且检测器像素多时,该方法的实施难度更大。因此,为了获得具有高分辨率的波前估计以进行更好的波前重建<sup>[4]</sup>,减少运算量,提高波前校正效率和图像的品质,本文提出一种基于小波分形插值的波前重建方法,并进行了实验验证。

## 2 自相似分析

分形插值技术广泛应用于图像处理中,能平滑地放大图像,其性能与目标图像中像素的自相似性密切相关<sup>[5]</sup>。分形方法包括规则分形和随机分形,随机分形能更好地描绘自然景观。Pentland 证明大多数用自然景观映射的图像均满足分形布朗随机场(FBR)模型<sup>[6]</sup>,而 FBR 模型的特征为

$$E |B_H(x + \Delta x) - B_H(x)|^2 =$$

$$E |B_H(x + \Delta x) - B_H(x)|^2 |\Delta x|^2, \quad (1)$$

式中: $E|\cdot|$ 为期望值; $|\cdot|$ 为模数算子; $B$ 为图像的像素值; $x$ 为像素的坐标; $|\Delta x|$ 为两个像素之间的距离; $H$ 为描述分形图像表面粗糙度的赫斯特指数。设

$$\delta^2 = E |B_H(x + 1) - B_H(x)|^2, \quad (2)$$

$$\log E |B_H(x + \Delta x) - B_H(x)|^2 - 2H_\phi \log |\Delta x| = \delta^2. \quad (3)$$

式中: $H_\phi = 5/6$ 基于以上模型分析波前的自相似性。大气湍流引起的波前畸变的统计特征以相位结构函数(PSF)描述,其定义为

$$D_\phi(r) = E \{[\phi(\rho + r) - \phi(\rho)]^2\}, \quad (4)$$

式中: $\rho$ 和 $r$ 为波面上的二维坐标; $\phi$ 为相位延迟波动。根据现有研究,大气湍流的 PSF 可以表示为 Kolmogorov 谱<sup>[7]</sup>,即

$$D_\phi(r) = 6.88 \left(\frac{|r|}{r_0}\right)^{\frac{5}{3}}, \quad (5)$$

式中: $r_0$ 为随大气湍流变化的常数。

结合(3)式和(4)式,可得

$$\log E |B_H(\rho + r) - B_H(\rho)|^2 - 2H_\phi \log |r| = \log \delta_\phi^2, \quad (6)$$

式中: $\delta_\phi^2 = 6.88r_0^{-5/3}$ 。可以看出,(6)式计算得到的波前相与 FBR 模型一致,从而表明分形方法可应用于波前畸变的分析中。

## 3 小波分形插值的波前重建

### 3.1 小波分解和软阈值去噪

分形插值是提高分辨率的有效方法。但对于波前相位,大多数分形插值技术的平滑效应会导致高频精度损失,从而给估计结果带来误差。可利用小波分形插值的方法来准确地提高估计的波前分辨率<sup>[8]</sup>。首先,给定小波的滤波器组,包括低通滤波器 $L$ 和高通滤波器 $G$ ,采用快速小波变换将估计的波前相位 $\Phi$ 分解为低频分量 $\Phi^0$ 和低频分量,高频分量包括水平分量 $\Phi^1$ 、垂直分量 $\Phi^2$ 和对角分量 $\Phi^3$ 。然后,采用二维快速小波变换(2D Mallat 分解)描述为

$$\begin{cases} \Phi^0 = \tilde{L}\tilde{L}\Phi \\ \Phi^1 = \tilde{L}\tilde{G}\Phi \\ \Phi^2 = \tilde{G}\tilde{L}\Phi \\ \Phi^3 = \tilde{G}\tilde{G}\Phi \end{cases}, \quad (7)$$

式中: $\tilde{L}$ 和 $\tilde{G}$ 为 $L$ 与 $G$ 的双通滤波器。从而可以快速计算

$$\Phi = (\mathbf{\Gamma}^T \mathbf{\Gamma})^{-1} \mathbf{\Gamma}^T G, \quad (8)$$

式中: $\mathbf{\Gamma}$ 为离散微分算子。

当小波分解完成后,实施小波阈值去噪以消除测量噪声<sup>[9-10]</sup>。该方法基于小波变换的多分辨率分析(MRA)<sup>[11]</sup>,考虑了信号分布特性与噪声之间的差异,重要的是,大气湍流频谱的功率位于低频域,而测量噪声的功率则位于整个频率分布。为了在消除高频功率损耗的同时消除测量噪声,在运行中可使用软阈值去噪方法。其定义为

$$f(\omega_{j,k}) = \begin{cases} \text{sgn}(|\omega_{j,k}| - \eta), & |\omega_{j,k}| > \eta \\ 0, & |\omega_{j,k}| < \eta \end{cases}, \quad (9)$$

式中: $\omega_{j,k}$ 为对低分辨率波前相位的小波系数估计值; $\eta$ 为根据高频小波系数估计的阈值。 $\text{sgn}(\cdot)$ 表示为

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}. \quad (10)$$

### 3.2 分形插值波前相位去噪与小波重构

在该部分中,采用分形插值法单独处理分布在不同频率间隔中的去噪波前分量,像素的原始坐标 $\hat{\Phi}^i$ ( $i=0,1,2,3$ )都被设置为奇数,间隔为 $\Delta r$ 。基于自相似性参数,分形插值实现过程如下:

1) 当 $\hat{\Phi}^i$ ( $i=0,1,2,3$ )上任何点的坐标 $(x,y)$ 都是偶数时,分形插值过程被描述为

$$\begin{aligned} \Phi^i(x, y) = & \frac{1}{4} \left[ \Phi^i \left( x - \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta x}{2} \right) + \right. \\ & \Phi^i \left( x + \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta x}{2} \right) + \\ & \left. \Phi^i \left( x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta x}{2} \right) + \Phi^i \left( x - \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta x}{2} \right) \right] + \\ & \sqrt{1 + 2^{2H_\phi - 2} r_1} H_\phi g_\phi, \end{aligned} \quad (11)$$

式中:  $g_\phi$  为满足  $N(0, \sigma_\phi)$  的高斯随机变量;  $r_1 = \sqrt{2} \Delta r$  为内插像素与现有像素的间隔。

2) 当  $\hat{\Phi}^i (i=0, 1, 2, 3)$  上任何点的  $(x, y)$  是奇数和偶数的组合时, 分形插值过程被描述为

$$\begin{aligned} \Phi^i(x, y) = & \frac{1}{4} \left[ \Phi^i \left( x, y - \frac{\Delta x}{2} \right) + \Phi^i \left( x - \frac{\Delta x}{2}, y \right) + \right. \\ & \left. \Phi^i \left( x, y + \frac{\Delta x}{2} \right) + \Phi^i \left( x, y + \frac{\Delta x}{2} \right) \right] + \\ & 2^{-\frac{H_\phi}{2}} \sqrt{1 + 2^{2H_\phi - 2} r_2} H_\phi g_\phi, \end{aligned} \quad (12)$$

式中:  $r_1 = \Delta r$ 。从(11)式和(12)式可以看出, 分形插值的操作主要取决于  $H_\phi$  和  $\delta_\phi$  的参数设置。要计算  $\delta_\phi^2 = 6.88r_0^{-5/3}$ , 应首先将 Freed 参数  $r_0$  确定为<sup>[12]</sup>

$$r_0 = \left[ \frac{\lambda^2}{\int_0^{\Delta h} C_n^2 dh} \right]^{5/3}, \quad (13)$$

式中:  $\lambda$  为波长;  $\Delta h$  为大气中传播路径的垂直长度;  $d$  为大气到地面的距离。基于 Hufnagel-Valley 模型, 高度  $h$  的折射结构函数<sup>[13]</sup>可表示为

$$\begin{aligned} C_n^2(h) = & 0.00594 \left( \frac{v}{27} \right)^2 (10^{-5}h)^{10} \exp\left(-\frac{h}{1000}\right) + \\ & 2.7 \times 10^{-16} \exp\left(-\frac{h}{1500}\right) + A_{HV} \exp\left(-\frac{h}{100}\right), \end{aligned} \quad (14)$$

式中:  $A_{HV}$  为地面上折射结构的经验值;  $v$  为沿垂直路径的风速。对于经过大气湍流的光信号, 其传播路径和大气湍流环境都是时变的, 因此  $r_0$  为时间变量参数, 相应地,  $\sigma_\phi$  也是时间变量参数。为了使分形插值能更准确地求解方程, 可反向估计  $\sigma_\phi$ , 将(6)式应用于插值算法。在小波插值之后, 通过快速小波重建将波前相位重建为

$$\Phi = LL\hat{\Phi}^0 + LG\hat{\Phi}^1 + GL\hat{\Phi}^2 + GG\hat{\Phi}^3. \quad (15)$$

## 4 实验结果及分析

### 4.1 重建波的性能分析

为比较基于 MVE 的波前重建, 通过共轭梯度法简化迭代过程, 在不同信噪比(SNR)的条件下, 计

算零差检测相应的相干混合效率。图 1 为零差检测的平均相干混合效率, 表明本文方法的性能在相干混合效率方面优于传统的 MVE 方法。当要获得 0.8 的混合效率时, 本文方法可以实现约 2 dB~3 dB 的 SNR 增益。此外, 当插值数增大时, 可以获得 0.5 dB~1 dB 的 SNR 增益。本文方法的另一个优点是相干混合效率  $\gamma$  的上限可得到提高, 在零差检测中能更容易获得更高的效率。为了进一步比较, 将 SymletsA(sym4) 小波函数作为参考函数, 将 sym4 小波与其他小波函数的性能进行对比, 结果如图 2 所示。可以看到, sym4 小波函数的使用有助于获得最大相干混合效率。而 Haar 小波性能较差, 原因在于 Haar 小波不具有平滑性, 导致频域中的齿形位置分离, 使得估计精度降低。此外, 双正交小波(bior1.5 和 bior3.3)具有比 Haar 小波更好的线性相位特性, 使分解操作更加平滑, 然而对于非线性大气湍流谱, 采用线性分解方法并不能将其分解得很精确。特别在低频域中。因此, sym4 小波是小波分形插值方法中的较优方法。

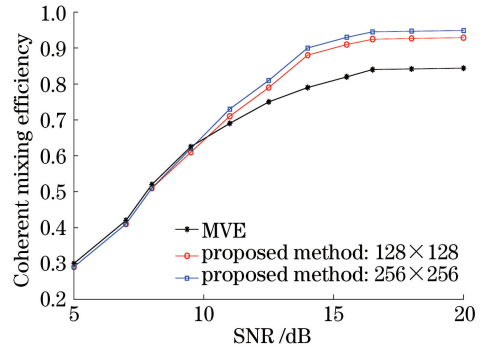


图 1 零差检测的平均相干混合效率  
Fig. 1 Averaged coherent mixing efficiency of homodyne detection

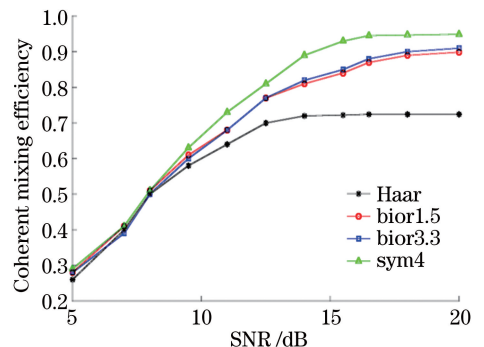


图 2 基于不同小波函数的小波分形插值方法的平均相干混合效率

Fig. 2 Averaged coherent mixing efficiency of wavelet fractal interpolation method based on different wavelet functions

为了测试插值方法在波前重建中的性能,选择3种插值方法,即双线性分形插值、三次B分形插值

和小波分形插值(sym4),比较它们在不同信噪比条件下相应的相干混合效率,如表1所示。表1表

表1 插值方法的相干混合效率对比

Table 1 Comparison of coherent mixing efficiency of interpolation methods

Method	$\gamma$			
	SNR: 5 dB	SNR: 10 dB	SNR: 15 dB	SNR: 20 dB
Bilinear fractal interpolation base on MVE	0.278	0.652	0.840	0.916
Cubic B fractal interpolation base on MVE	0.279	0.667	0.852	0.932
Wavelet fractal interpolation base on MVE	0.284	0.682	0.915	0.968
Proposed method	0.283	0.680	0.920	0.970

明,本文方法和基于MVE的小波分形插值方法在波前重构后的零差检测中具有几乎相同的性能,而其他两种方法的性能较差一些。此外,与基于MVE的方法相比,本文方法运行速度快,因为它同时实现相互插值和去噪<sup>[14]</sup>,能大大降低计算过程的复杂性,更好地满足系统要求。基于以上分析,本文方法能满足光学自适应系统在运算复杂性方面的要求。

#### 4.2 重建波的实验对比

图3所示的自适应光学系统<sup>[15]</sup>包括功率为1 mW的635 nm激光器、括束镜、光阑、像差板、倾斜镜、变形镜、德国生产的svs340 MTR CPC型像素大小为7.4  $\mu\text{m} \times 7.4 \mu\text{m}$ 的CCD相机、变形镜、夏

克-哈特曼波前传感器。利用Harding等<sup>[16]</sup>的方法随机产生1帧大气湍流相位屏,流程如下:

- 1) 使用夏克-哈特曼波前传感器测量波前相位;
- 2) 对低分辨率的波前相位进行估计;
- 3) 进行快速小波分解,并在此过程中进行软阈值去噪;
- 4) 实时估计分形参数,并进行分形差值计算;
- 5) 快速小波重建。

采用sym4小波对波前相位进行快速小波分解,分解过程如图4所示,对分解过程进行观察可知,低频分量的部分可含有较多的图像信息,而水平和垂直的高频分量部分则含有较多的细节信息。

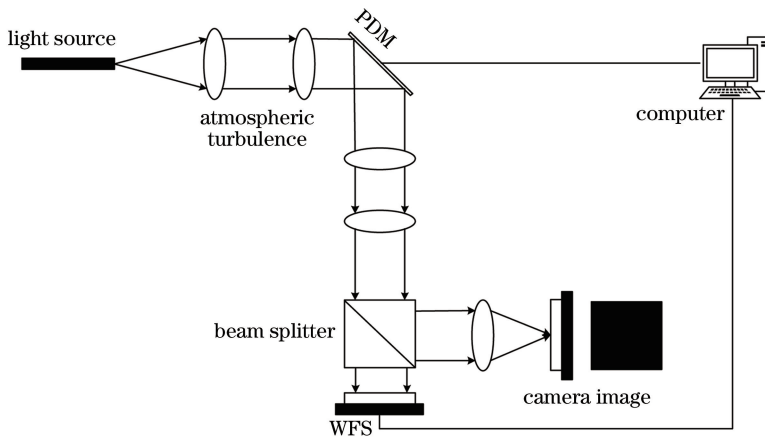


图3 自适应光学系统实验装置

Fig. 3 Experimental device of adaptive optical system

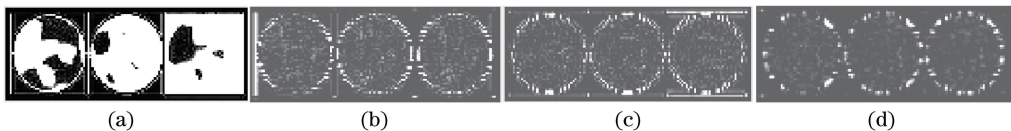


图4 小波分解。(a)低频分量;(b)高频水平分量;(c)高频垂直分量;(d)高频对角分量

Fig. 4 Wavelet decomposition. (a) Low frequency component; (b) high frequency horizontal component; (c) high frequency vertical component; (d) high frequency diagonal component

图 5(a)是含有噪声的像素,图 5(b)是经过去噪处理的像素。首先选用 sym4 小波对波前相谱进行多分辨率分析,并进行二维分解,利用小波变换的软

阈值进行去噪处理,小波系数的估计阈值为 50.08。从图 5(b)可以看出,采用软阈值去噪使信噪比获得较大的提升,使图像的信噪比更高、图像更平滑。

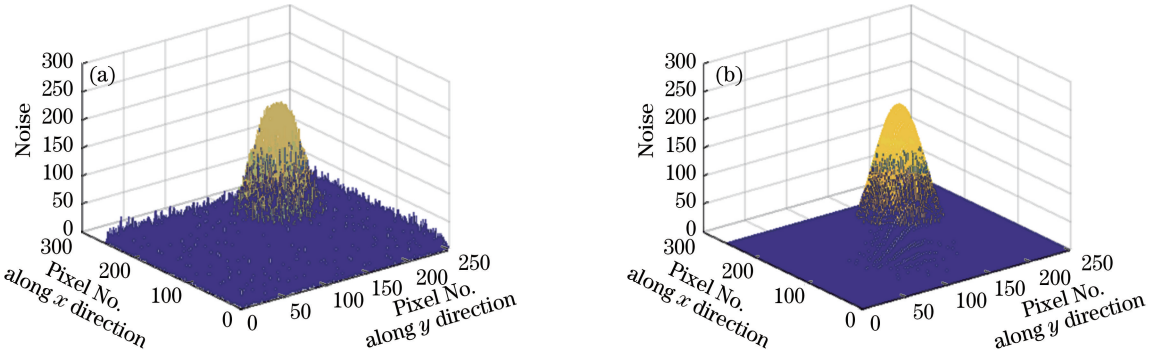


图 5 噪声对比。(a)含有噪声的像素;(b)经过去噪处理的像素

Fig. 5 Noise contrast. (a) Pixels with noise; (b) pixels with denoised processing

为了验证本文方法的校正能力,采用图 4 所示的自适应光学系统对本文方法进行校正,保持相差板静止不动,通过相机采集系统的成像信息。图 6 所示为校正前、后的图像对比。

明显,校正后的光斑形态良好,图像清晰度较高。根据图 6(c)所示的方均根(RMS)对比结果,传统 MVE 的方均根值为  $0.04 \mu\text{m}$ ,小波分形差值方法的方均根为  $0.026 \mu\text{m}$ ,表明本文所提的小波分形差值方法能显著提高校正能力。

图6(a)、(b)表明小波分形差值方法的校正效果

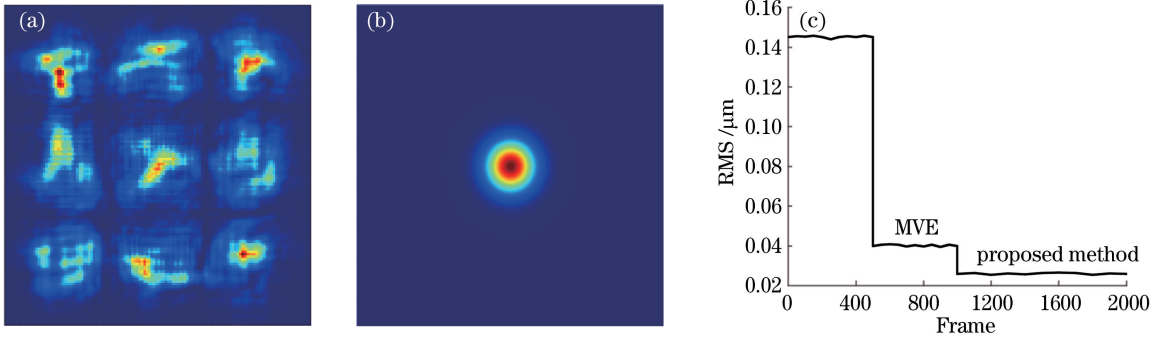


图 6 图像校正前、后的对比。(a)校正之前的图像;(b)校正之后的图像;(c)校正后残余波前的方均根

Fig. 6 Before and after image correction. (a) Image before correction; (b) image after correction; (c) root-mean-square value of corrected residual wavefront

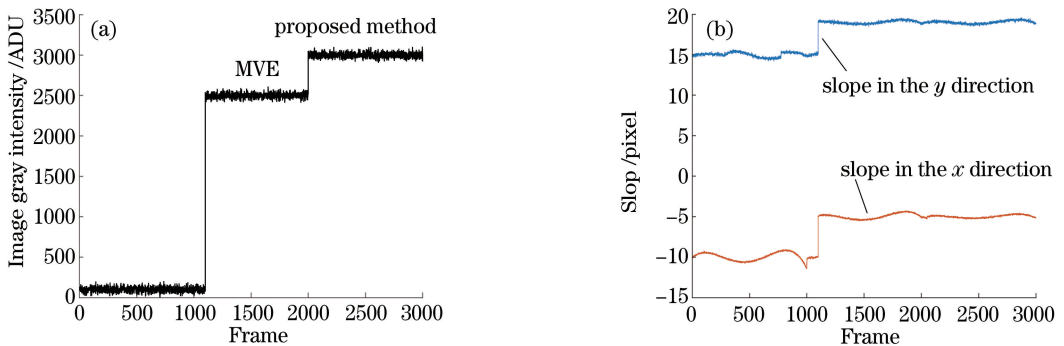


图 7 远场光斑校正前、后的对比。(a)远场光斑的光强度对比;(b)校正后的光斑斜率曲线

Fig. 7 Comparison before and after correction of far field spot. (a) Light intensity comparison of far-field spot; (b) slope curves after correction



根据图 7(a) 远场光斑图像灰度值强度对比可知, 传统 MVE 的图像灰度值强度为 2500 ADU 左右, 小波分形差值方法的图像灰度值强度为 3000 ADU 左右, 表明本文所提的小波分形差值方法能显

著提高光学系统的校正能力。由图 7(b) 可知, 校正后的光斑沿  $x$  方向与  $y$  方向的斜率一开始波动比较大, 之后变得比较平稳, 说明校正之后的光斑比较稳定, 说明本文方法可以有效抑制光斑抖动。

表 2 本文算法与 MVE 算法的对比

Table 2 Comparison between proposed method and MVE method

Method	Time complexity			Space complexity	Running time /s
	Average situation	Best case	Worst case	Auxiliary storage	
MVE	$O(n)$	$O(1)$	$O[n \log(2n)]$	$O(1)$	0.054
Proposed method	$O[\log(2n)]$	$O(1)$	$O(n)$	$O(1)$	0.021

在时间复杂性的平均情况与最坏情况下, 本文算法优于传统 MVE 算法; 在最好的情况下, 两者相同; 在空间复杂度上, 两者也相同; 在运行时间上, 本文算法要比传统 MVE 算法用时少。综上所述, 本文算法要优于传统 MVE 算法。

## 5 结 论

提出一种基于小波分形插值的波前重建方法。该方法利用自相似性波前畸变, 提高分辨率并去噪, 根据大气湍流谱对小波分形插值进行综合考虑, 避免高频分量的损失。此外, 在二维快速小波变换后实现软阈值去噪, 同时考虑测量噪声和波前畸变之间的频谱差异。在对小波分形插值方法进行理论分析后, 分析零差检测的相干混合效率, 将其用于评估波前重构的质量。实验结果表明: 与传统 MVE 方法相比, 本文方法可以获得更高的零差检测效率, 表现出相干混合效率的上限和波前重建时的 SNR 增益; 本文方法可以获得较高的相干混合效率, 有效增强了图像的品质, 降低噪声干扰, 并在时间复杂性与空间复杂性上表现出良好的效果。

## 参 考 文 献

- [1] Cheng T, Liu W J, Yang K J, et al. Decoupling control algorithm based on Laplacian eigenfunction for Woofer-Tweeter adaptive optics system [J]. Chinese Journal of Lasers, 2018, 45(9): 0905003.  
程涛, 刘文劲, 杨康健, 等. 基于拉普拉斯本征函数的 Woofer-Tweeter 自适应光学系统解耦控制算法 [J]. 中国激光, 2018, 45(9): 0905003.
- [2] Maji S K, Yahia H M, Fusco T. A multifractal-based wavefront phase estimation technique for ground-based astronomical observations [J]. IEEE Transaction on Geoscience and Remote Sensing, 2016, 54(3): 1705-1715.
- [3] Li D M, Gai M Y, Chen H C, et al. Research on

wavefront correction algorithm of Adaptive Optics system [C] // 2015 4th International Conference on Computer Science and Network Technology (ICCSNT), December 19-20, 2015, Harbin, China. New York: IEEE, 2015: 23-27.

- [4] Marron J C, Kendrick R L, Seldomridge N, et al. Atmospheric turbulence correction using digital holographic detection: experimental results [J]. Optics Express, 2009, 17(14): 11638-11651.
- [5] Ghazel M, Freeman G H, Vrscay E R. Fractal-wavelet image denoising revisited [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2006, 15(9): 2669-2675.
- [6] Tu G F, Zhang C, Wu J K, et al. Remote sensing image processing using wavelet fractal interpolation [C] // Proceedings. 2005 International Conference on Communications, Circuits and Systems, May 27-30, 2005, Hong Kong, China. New York: IEEE, 2005: 701-706.
- [7] Mudge K A, Dilusha Silva K K M B, Clare B A, et al. Scintillation index of the free space optical channel: phase screen modelling and experimental results [C] // 2011 International Conference on Space Optical Systems and Applications (ICSOS), May 11-13, 2011, Santa Monica, CA, USA. New York: IEEE, 2011: 403-409.
- [8] Prasad S A. Wavelet transform of Fractal Interpolation Function [J/OL]. (2012-06-20) [2019-06-10]. <https://arxiv.org/abs/1206.4129>.
- [9] Cui S S, Li Q. De-noising research on terahertz digital holography based on wavelet transform [J]. Infrared and Laser Engineering, 2015, 44(6): 1836-1840.  
崔珊珊, 李琦. 基于小波变换的太赫兹数字全息再现像去噪研究 [J]. 红外与激光工程, 2015, 44(6): 1836-1840.
- [10] Lin M, Xie G. Study on the image de-noising algorithm of adaptive threshold based on wavelet

- transform in the unclear radiation environment [C] // 2012 24th Chinese Control and Decision Conference (CCDC), May 23-25, 2012, Taiyuan, China. New York: IEEE, 2012: 1944-1948.
- [11] Eyyuboglu H T, Voelz D, Xiao X F. Scintillation analysis of truncated Bessel beams via numerical turbulence propagation simulation [J]. Applied Optics, 2013, 52(33): 8032-8039.
- [12] Wei H Y, Wu Z S, Ma Q L. Log-amplitude variance of laser beam propagation on the slant path through the turbulent atmosphere [J]. Progress in Electromagnetics Research, 2010, 108: 277-291.
- [13] Weng J W, Zhong J G, Hu C Y. Digital reconstruction of Fresnel hologram with a ridge of Gabor wavelet transform [J]. Acta Optica Sinica, 2009, 29(8): 2109-2114.  
翁嘉文, 钟金钢, 胡翠英. 菲涅耳数字全息图的 Gabor 小波变换再现法 [J]. 光学学报, 2009, 29(8): 2109-2114.
- [14] Chen B, Yang J, Yang X, et al. Effect of speckle noise on wavefront distortion correction in laser active imaging [J]. Chinese Journal of Lasers, 2015, 42(10): 1012002.  
陈波, 杨靖, 杨旭, 等. 激光主动成像中散斑噪声对波前畸变校正性能的影响 [J]. 中国激光, 2015, 42(10): 1012002.
- [15] Li J C, Song Q H, Pascal P, et al. Discussion of wavefront reconstruction algorithm of off-axis digital holography [J]. Chinese Journal of Lasers, 2014, 41(2): 0209008.  
李俊昌, 宋庆和, Pascal P, 等. 离轴数字全息波前重建算法讨论 [J]. 中国激光, 2014, 41(2): 0209008.
- [16] Harding C M, Johnston R A, Lane R G. Fast simulation of a Kolmogorov phase screen [J]. Applied Optics, 1999, 38(11): 2161-2170.