

# 基于 Tikhonov 正则化的计算鬼成像方法

陶勇, 王肖霞\*, 闫国庆, 杨风暴

中北大学信息与通信工程学院, 山西 太原 030051

**摘要** 针对计算鬼成像采样过程中出现的数据扰动及采样次数不易较多所引起的鬼图像质量较差的问题, 提出了一种基于 Tikhonov 正则化的计算鬼成像方法。该方法利用一个表征噪声强度的约束项, 将计算鬼成像问题转化为信号误差与噪声强度最小化的数学问题, 并利用广义交叉验证法选取合适的正则参数来重构待测物体的鬼像。实验结果表明, 所提算法在干扰情况下明显优于传统鬼成像、差分鬼成像和伪逆鬼成像, 具有较强的稳定性; 在无干扰情况下, 也明显优于传统鬼成像、差分鬼成像, 且不差于伪逆鬼成像。

**关键词** 图像处理; 鬼成像; 图像重建; Tikhonov 正则化; 广义交叉验证法

中图分类号 O438

文献标志码 A

doi: 10.3788/LOP57.021016

## Computational Ghost Imaging Method Based on Tikhonov Regularization

Tao Yong, Wang Xiaoxia\*, Yan Guoqing, Yang Fengbao

College of Information and Communication Engineering, North University of China, Taiyuan, Shanxi 030051, China

**Abstract** This study proposes a computational ghost imaging method based on Tikhonov regularization to solve the problem of poor ghost image quality caused by data perturbation and few sampling times during ghost imaging sampling. The proposed method uses a constraint term that characterizes the noise intensity to transform the computational ghost imaging problem into a mathematical problem for minimizing the signal error and noise intensity. Subsequently, the ghost image of the unknown object is reconstructed by selecting appropriate regular parameters using the generalized cross-validation method. The experimental results denote that the proposed algorithm is superior to traditional, differential, and pseudo-inverse ghost imaging methods when interference is present and that it exhibits considerable stability. Furthermore, in the absence of interference, the proposed method is superior to traditional and differential ghost imaging methods and exhibits similar performance when compared with that exhibited by pseudo-inverse ghost imaging at the same time.

**Key words** image processing; ghost imaging; image reconstruction; Tikhonov regularization; generalized cross-validation method

**OCIS codes** 100.3020; 270.2500; 270.5568

## 1 引言

计算鬼成像 (CGI)<sup>[1]</sup> 作为一种单光路的反直觉、非定域成像技术, 与量子鬼成像<sup>[2]</sup> 及其他传统鬼成像<sup>[3]</sup> 相比, 具有实现光路简单、光源灵活易获取等优点, 在快速搜救、雷达成像<sup>[4]</sup>、保密通信<sup>[5-6]</sup> 等领域具有广泛的应用价值和前景。然而, 在系统具体实现和应用时, 由于光学器件、测量仪器等的精度问题, 测量值常常无法真实反映被照物体

的透过率或反射率, 限制了鬼成像的发展。另外, 鬼成像中往往需要大量的散斑图案才能获得鬼像, 且成像质量较差<sup>[7]</sup>, 特别是对于动态鬼成像<sup>[8]</sup> 技术来说, 不可能获得大量的散斑图案, 这无疑制约了鬼成像技术的具体应用。因此, 在有干扰和散斑图案数量较少的情况下, 研究提升鬼成像质量的方法具有重要意义。

自 2008 年 CGI 被提出后, 各种改进的算法也接连被提出。2010 年, Ferri 等<sup>[9]</sup> 提出差分鬼成像

收稿日期: 2019-05-30; 修回日期: 2019-07-03; 录用日期: 2019-07-15

基金项目: 中北大学研究生科技基金(20191631)

\* E-mail: wangxiaoxia@nuc.edu.cn

(DGI),即在 CGI 的重构基础上去除一个近似的噪声项,该方法能在一定程度上提高重建图像的信噪比,但效果有限。伪逆鬼成像(PGI)<sup>[10]</sup>通过矩阵的伪逆计算实现较低采样次数下鬼成像的精确重建,但其过度依赖数据的精确性,在有噪声条件下重建的图像存在较大的失真,难以直接用于真实场景。压缩计算鬼成像(CCGI)<sup>[11-12]</sup>利用信号稀疏性的先验知识,能在远少于成像维数的测量次数下实现高分辨率重建,但其要求测量矩阵有一定的不相关性且重构算法较为复杂。

针对以上问题,本文基于 Tikhonov 正则化<sup>[13-15]</sup>提出了一种新的 CGI 方法,并通过广义交叉验证法(GCV)<sup>[16]</sup>实现了正则参数的选取。本文方法同时考虑了图像重建的误差和重建的稳定性,通过定性分析和评价指标的定量对比,证明在干扰情况下该方法的性能明显优于 CGI、DGI 及 PGI,其优越的成像结果有助于今后鬼成像在目标识别与检测等方面的应用。

## 2 鬼成像模型及问题

CGI 实验光路如图 1 所示,空间光调制器(SLM)接收激光器发射的光束并将其调制成空间分布已知的光场,然后照射到待成像物体表面。

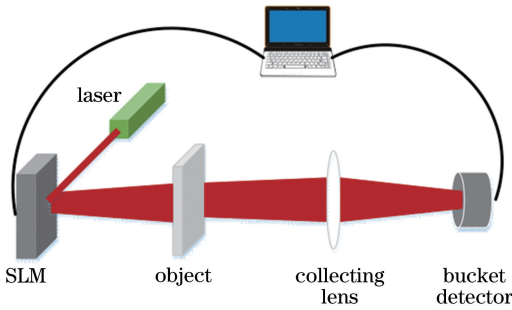


图 1 计算鬼成像实验装置图

Fig. 1 Experimental setup of CGI

记照射到待测物体表面的散斑图案为  $I(x, y)$ ,分辨率为  $m \times n$ ,物体的透过率分布为  $T(x, y)$ ,其中,  $x, y$  表示坐标。设第  $k$  次采样时产生的散斑图案为  $I(x, y; k)$ ,相应的桶探测器测得的总光强记为  $B(k)$ 。将全部的  $M$  次采样的散斑图样与桶探测器的值进行关联运算即可重建出物体的像,重建公式为

$$T'(x, y) = \langle I(x, y; k) \times B(k) \rangle - \langle I(x, y; k) \rangle \times \langle B(k) \rangle, \quad (1)$$

式中:  $T'(x, y)$  为重建图像;  $\langle \cdot \rangle$  表示取平均值运算;  $k = 1, 2, 3, \dots, M$ 。第  $k$  次测量时,理论上的桶

探测器的值可以由(2)式得到:

$$B(k) = \iint I(x, y; k) \times T(x, y) dx dy. \quad (2)$$

全部的  $M$  次采样过程可以表示为

$$\begin{bmatrix} I(1,1;1) & I(1,2;1) & \cdots & I(m,n;1) \\ I(1,1;2) & I(1,2;2) & \cdots & I(m,n;2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ I(1,1;M) & I(1,2;M) & \cdots & I(m,n;M) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T(1,1) \\ T(1,2) \\ T(1,3) \\ \vdots \\ T(m,n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B(1) \\ B(2) \\ \vdots \\ B(M) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

(3)式可以简化为一个线性方程  $\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{B}$ ,其中,  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(p, q)_{M \times N}$ ,  $N = m \times n$ ;  $\mathbf{T} = \mathbf{T}(q, 1)_{N \times 1}$ ;  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(p, 1)_{M \times 1}$ ,其中  $1 \leq p \leq M, 1 \leq q \leq N$ ,且  $p, q$  均为整数。

假设由散斑图序列组合而成的  $\mathbf{A}$  为测量矩阵,桶探测器的序列值  $\mathbf{B}$  为观测矩阵,在成像过程中,由于环境噪声干扰和仪器性能的限制,桶探测器数据采集过程中可能会出现轻微扰动,使观测矩阵  $\mathbf{B}$  产生一定偏差。由此,线性方程变为

$$\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{B}_0 + \boldsymbol{\delta}(\mathbf{B}) = \mathbf{B}, \quad (4)$$

式中:  $\mathbf{B}_0$  为桶探测器理论值,  $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{B})$  表示桶探测器测量时产生的偏差。特殊地,当  $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{B}) = \mathbf{0}$  时,鬼成像工作在无干扰状态。

实际应用中,较少的采样次数和数据采集集中的不确定性会极大制约鬼成像的高质量重建。传统的 CGI、DGI 等鬼成像算法要求对物体进行大量采样,在测量次数较少的情况下其精确度难以得到保证。而 PGI 等鬼成像算法能在采样次数较小时实现较为精确的重建,但抗干扰性能较差。因此,合适的重建算法对于鬼成像的实用化至关重要。

## 3 基于 Tikhonov 正则化的计算鬼成像

### 3.1 重建方法

当鬼成像过程中采样次数少于成像维数,即测量矩阵  $\mathbf{A}$  中  $M < N$  时,其工作机理可以近似地等价于求解一个方程个数小于未知量的欠定方程组,此时方程组的解并不唯一确定。并且在有干扰情况下,测量矩阵  $\mathbf{A}$  中较小的奇异值所对应的高频分量中的噪声将被大幅放大,使鬼成像结果产生较大失真。

因此,为了解决上述不适定问题,本文将 Tikhonov 正则化方法引入到鬼成像中,在重建物体信息的过程中利用 2-范数的先验信息进行约束,将问题转化为

$$\min(\| \mathbf{AT} - \mathbf{B} \|_2^2 + \lambda^2 \| \mathbf{T} \|_2^2), \quad (5)$$

式中:  $\| \mathbf{AT} - \mathbf{B} \|_2^2$  为残差项,表征图像重建的不确定性;  $\| \mathbf{T} \|_2^2$  为惩罚项,近似表征重建的噪声强度;  $\lambda$  为平衡残差项和惩罚项间权重的正则化参数。当  $\lambda$  唯一确定时,可以通过求解 (5) 式的最小化问题重建出一个兼顾准确性和抗干扰性的图像。对于某一  $\lambda$ , (5) 式的解为

$$\mathbf{T}_\lambda = \sum_{i=1}^M f_i \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{B}}{\sigma_i} \mathbf{v}_i, \quad (6)$$

式中:

$$\begin{cases} f_i = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \lambda^2} \approx \begin{cases} 1, & \sigma_i \gg \lambda \\ \sigma_i^2 / \lambda^2, & \sigma_i \ll \lambda \end{cases} \\ \mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T \\ \mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_M) \\ \mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N) \\ \mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M) \end{cases}. \quad (7)$$

(6) 式中  $\sigma_i$  为  $\mathbf{A}$  的第  $i$  个奇异值,  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_M$  为左奇异向量,  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N$  为右奇异向量,  $f_i$  可以视为 Tikhonov 正则化的滤波因子,其作用为过滤掉较小的奇异值对正则化解的影响,从而在不确定问题中找到一个稳定的解,即所重建的图像。

### 3.2 正则参数 $\lambda$ 的选取

结合 (5) 式,对于鬼成像中的精确重建问题,所重建的图像一方面使得残差项  $\| \mathbf{AT} - \mathbf{B} \|_2^2$  较小,此时重建图像为  $\mathbf{AT} - \mathbf{B} = 0$  的近似解;另一方面通过使惩罚项  $\| \mathbf{T} \|_2^2$  尽可能小来保证待求解的稳定性。 $\lambda$  过小时不能很好地抑制噪声,而  $\lambda$  过大时会丢失高频分量中的细节描述而使重建图像模糊。因而,选取正则化参数时应该同时考虑残差项与惩罚项的大小,在残差项与惩罚项之间寻求一个平衡,从而使得这两部分都较小。

GCV 是由 Golub 提出的一种十分有效的选取正则化参数  $\lambda$  的方法。GCV 假定将任意一个观测值  $B_i$  从原观测序列  $\mathbf{B}$  中删除,则此时由剩余观测值集合求得的正则化解应能够较好地预测被去掉的观测值  $B_i$ 。其优点在于不需要知道关于误差范数的先验知识,且理论上能够选取到最优的正则参数。以正则参数  $\lambda$  为参变量,采用 GCV 确定最优的正则参数就是求解使 GCV 函数最小的  $\lambda$  值,GCV 函

数的定义为

$$G(\lambda) = \frac{\| \mathbf{AT}_\lambda - \mathbf{B} \|_2^2}{[\text{trace}(\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{A}_\lambda^{(T)})]^2}, \quad (8)$$

式中:  $\text{trace}(\cdot)$  表示求矩阵的迹;  $\mathbf{A}_\lambda^{(T)}$  为将  $\mathbf{B}$  映射到解  $\mathbf{T}_\lambda$  上的任意矩阵,即满足  $\mathbf{T}_\lambda = \mathbf{A}_\lambda^{(T)} \mathbf{B}$ 。

### 3.3 评价指标

为了定量比较各算法重建结果的优劣程度,本文采用均方误差(MSE)和结构相似性(SSIM)作为评价指标。MSE 从灰度值上直观地反映重建图像与物体真实信息的差异度,其值越小,重建图像越接近物体真实信息,即鬼成像的重建效果越好。SSIM 反映图像中结构属性的相似度,综合考虑亮度、对比度和结构三个因素,用均值作为亮度的估计,标准差作为对比度的估计,协方差作为结构相似程度的度量,其值越大表示重建图像失真越小。MSE 和 SSIM 的计算公式为

$$E_{\text{MS}} = \frac{1}{mn} \sum_{x=1}^m \sum_{y=1}^n |T'(x, y) - T(x, y)|^2, \quad (9)$$

$$M_{\text{SSI}} = \frac{(2u_T u_{T'} + c_1)(2\sigma_T \sigma_{T'} + c_2)}{(u_T^2 + u_{T'}^2 + c_1)(\sigma_T^2 + \sigma_{T'}^2 + c_2)}, \quad (10)$$

式中:  $T'$  表示鬼成像的重建图像,  $T$  表示成像物体的真实信息;  $u_T, u_{T'}$  分别为  $T$  和  $T'$  的平均值;  $\sigma_T, \sigma_{T'}$  分别为  $T$  和  $T'$  的方差,  $\sigma_{TT'}$  为  $T$  和  $T'$  的协方差;  $c_1 = (k_1 \times L)^2, c_2 = (k_2 \times L)^2$  为用以维持稳定的常数,  $L$  为灰度值的动态范围,  $k_1 = 0.01, k_2 = 0.03$ 。

## 4 仿真实验

为了验证所提算法的有效性,本文以 MATLAB2014a 为仿真平台设计了两组实验,分别说明其在有干扰和无干扰条件下的性能。软件环境为 Windows10, 64 位,运行内存 4 GB。实验中假设图像为待成像物体,图像的灰度值分布视为待成像物体的透过率分布。

### 4.1 有干扰条件下

第一组实验假定桶探测器测得的值存在一定的偏差,在观测矩阵  $\mathbf{B}$  中添加高斯分布的干扰,对本文算法与 CGI、DGI、PGI 三种算法进行对比。实验以 double-slit、rice、text、cell 四幅图片为对象,图片规格均为 64 pixel  $\times$  64 pixel。实验均工作在欠采样条件下,二值图 double-slit、text 成像过程中加入了期望为 0、标准差为 3 的高斯噪声,灰度图 rice、cell 成像过程中加入了期望为 0、标准差为 1.5 的高斯噪声,采样次数  $M$  均为 3000 次,所用散斑图服从随机二值分布。不同算法下的各图像的重建图像如图 2

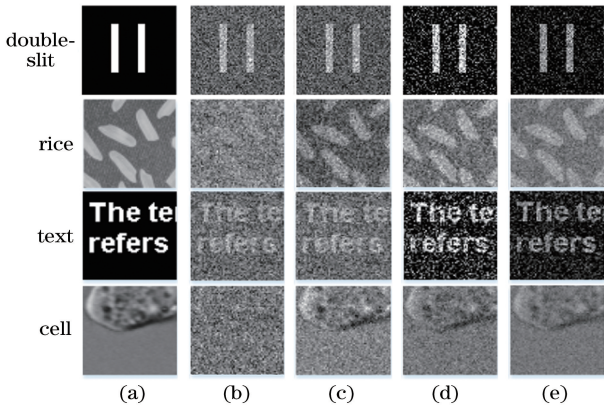


图 2 有干扰下各算法的重建结果。(a)原图像；  
(b) CGI；(c) DGI；(d) PGI；(e)本文算法

Fig. 2 Reconstructed results of different algorithms under interference. (a) Original images; (b) CGI; (c) DGI; (d) PGI; (e) proposed algorithm

所示。CGI、DGI、PGI 及本文算法的平均重建时间分别为 1.06, 1.12, 26.30, 27.41 s。

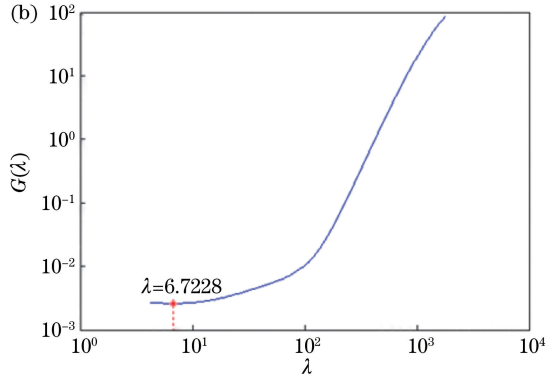
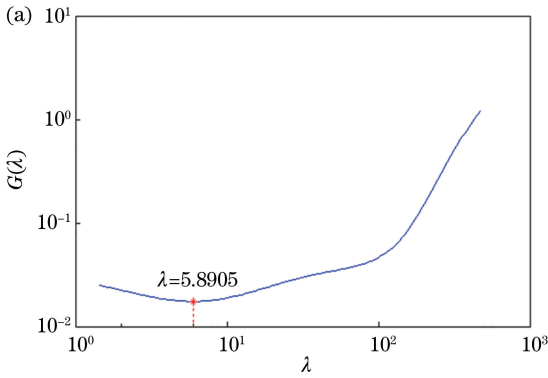


图 3 有干扰实验下的 GCV 函数。(a) double-slit 图 GCV 曲线；(b) rice 图 GCV 曲线

Fig. 3 GCV function with interference. (a) GCV curve of double-slit image; (b) GCV curve of rice image

表 1 有干扰下各算法结果的 MSE

Table 1 MSE of different algorithms under interference

Image	MSE			
	CGI	DGI	PGI	This paper
double-slit	0.1692	0.1493	0.0749	<b>0.0387</b>
rice	0.0309	0.0169	0.0143	<b>0.0090</b>
text	0.1605	0.1511	0.1074	<b>0.0636</b>
cell	0.0286	0.0093	0.0052	<b>0.0035</b>

当存在一定干扰时，除了 double-slit 的 SSIM 指标表现不佳外，本文算法的重建结果不论是 MSE 还是 SSIM，均为这几种算法中最优。为全方位对比本文算法和 CGI、DGI、PGI 的抗噪声性能，以灰度图 rice 为例，模拟在桶探测器中加入不同程度的扰动，即在观测矩阵  $B$  的基础上加上均值为 0，标准差分别为 0.5、1、1.5、2、2.5 和 3 的高斯分布的干扰，计算不同算法成像结果的 MSE 和 SSIM 指标，结果

从重建效率上看，本文算法差于 CGI 及 DGI，与 PGI 相近。从重建结果上看，本文算法的成像结果明显比 CGI、DGI 的结果更接近于原图像，而图 2(d) 中大量像素处于过饱和状态，甚至将原图像中的有用信息湮没，严重影响了重建图像的质量。相比之下，图 2(e) 则有肉眼可见的改善。但本文方法在去除干扰影响的同时不可避免地牺牲了部分对比度信息，后期可以考虑通过图像增强来优化重建图像。本文方法主要依靠正则参数  $\lambda$  调节鬼成像中的抗干扰能力，double-slit 和 rice 在有干扰条件下的 GCV 函数及正则参数  $\lambda$  如图 3 所示。

当实验测得的数据存在偏差使重建图像产生较大失真时，GCV 会自适应地调整正则参数  $\lambda$  的值，改变惩罚项的比重，以增强重建过程中的抗干扰能力。通过 MSE 和 SSIM 指标对图 2 中的鬼成像结果进行定量比较，各算法的 MSE 及 SSIM 指标如表 1 和表 2 所示。

如图 4 所示。

图 4 中，横坐标为所添加干扰的强度，纵坐标分别为 MSE、SSIM。以灰度图 rice 为分析对象可以看到，本文算法有一定的抗干扰性能，当高斯干扰的标准差在 3 以内时，其重建结果明显优于其他算法；并且其抗干扰性能远强于 PGI，在存在干扰时的 MSE 和 SSIM 指标一直优于 PGI。可以预见当高

表 2 有干扰下各算法结果的 SSIM

Table 2 SSIM of different algorithm results under interference

Image	SSIM			
	CGI	DGI	PGI	This paper
double-slit	0.2899	<b>0.3043</b>	0.1846	0.1996
rice	0.1228	0.3557	0.3591	<b>0.4722</b>
text	0.1997	0.2089	0.3682	<b>0.3823</b>
cell	0.1068	0.3202	0.4081	<b>0.5148</b>



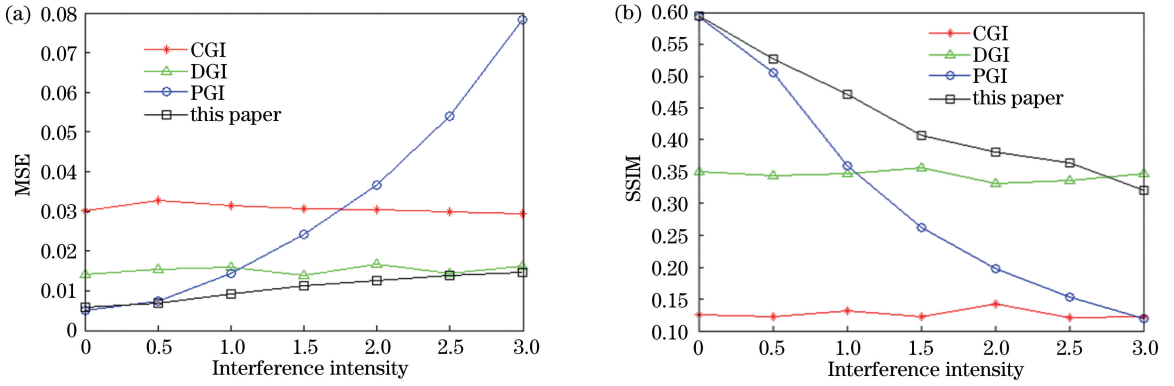


图 4 各算法抗干扰性结果对比。(a) MSE; (b) SSIM

Fig. 4 Comparison of anti-interference performances of different algorithms. (a) MSE; (b) SSIM

斯干扰的标准差大于 3 时,本文算法的 MSE 将逐渐增大并超过 DGI, SSIM 也几乎同步低于 DGI。这是因为 CGI、DGI 其实都是建立在统计学基础上的鬼成像算法,其本质是根据大量的随机数据以一定的权值加权来逼近真实的信息,而 PGI 及本文算法则建立在矩阵运算的基础上,对数据的准确性要求相对较高。

#### 4.2 无干扰条件下

第二组实验模拟无干扰条件下的鬼成像,比较 CGI、DGI 及本文算法的重建效果。需要说明的是,由于 PGI 的解遵循  $AT=B$ , 即  $\min\{\|AT-B\|_2\}$ , 等价于  $\lambda=0$  时的 Tikhonov 正则化方法, 此时 (5) 式中的惩罚项被省略。即 PGI 只考虑了重建图像与测量数据的一致性, 而忽略了测量过程中可能出现的偏差。另一方面, 本文算法在无干扰条件下所确定的  $\lambda$  值较小, 惩罚项的影响效果远小于残差项, 可忽略不计。因此, 本文算法在无干扰条件下的成像效果与 PGI 相近, 由图 4 中干扰强度为 0 时 PGI 和本文结果的 MSE 和 SSIM 也可以看出。由于二者在无干扰时的成像结果过于接近, 在本小节实验中对 PGI 的结果不再过多分析。

实验图像仍为 double-slit、rice、text、cell, 采样次数  $M=3000$ , 所用散斑图服从随机二值分布, 不再向桶探测器中加入扰动, 各算法重建出的图像如图 5 所示。

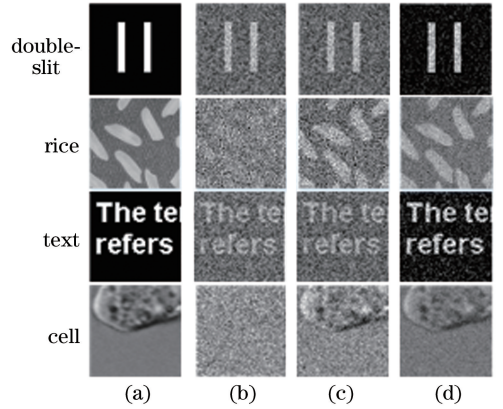


图 5 无干扰下各算法的重建结果。(a)原图像; (b) CGI; (c) DGI; (d)本文算法

Fig. 5 Reconstructed results of different algorithms without interference. (a) Original images; (b) CGI; (c) DGI; (d) proposed algorithm

从主观上看, 本文算法的重建图像远好于 CGI、DGI。此时, double-slit 和 rice 在实验中的 GCV 函数及正则参数  $\lambda$  取值如图 6 所示。

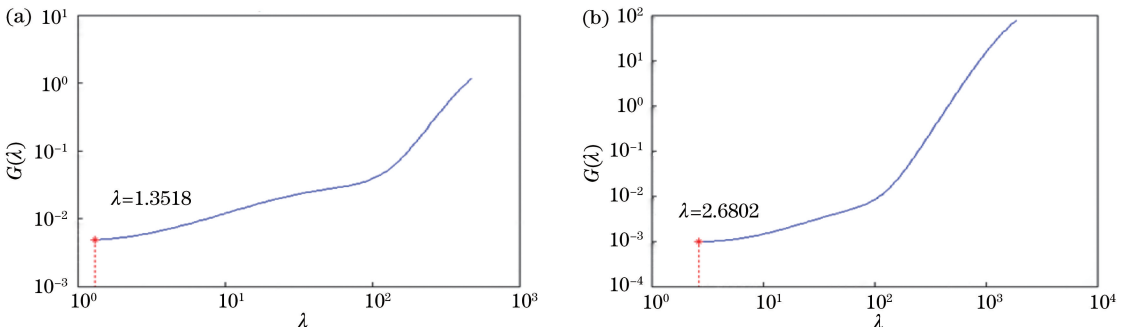


图 6 无干扰下的 GCV 函数。(a) Double-slit 图 GCV 曲线; (b) rice 图 GCV 曲线

Fig. 6 GCV function without interference. (a) GCV curve of double-slit image; (b) GCV curve of rice image

double-slit 和 rice 的  $\lambda$  取值分别为 1.3518 和 2.6802, 与有干扰时相比明显减小, 有效避免了将重建图像的边缘等细节部分当作噪声而被抑制的情况。分别计算上述实验鬼成像结果的 MSE 和 SSIM, 如表 3、4 所示。可知, 本文算法的 MSE 明显低于 CGI、DGI, 而 SSIM 则高于两者。这说明在不含干扰的前提下, 本文算法在鬼成像图像重建的精确性上也要优于 CGI 和 DGI。综上所述, 当不存在干扰或干扰小于一定强度时, 本文算法的鬼成像结果在 CGI、DGI、PGI 中占有绝对的优势。

表 3 无干扰下各算法结果的 MSE

Table 3 MSE of different algorithms without interference

Image	MSE		
	CGI	DGI	This paper
Double-slit	0.1802	0.1577	<b>0.0208</b>
Rice	0.0316	0.0165	<b>0.0052</b>
Text	0.1769	0.1364	<b>0.0379</b>
Cell	0.0254	0.0116	<b>0.0021</b>

表 4 无干扰下各算法结果的 SSIM

Table 4 SSIM of different algorithms without interference

Image	SSIM		
	CGI	DGI	This paper
Double-slit	0.2883	0.2908	<b>0.6737</b>
Rice	0.1258	0.3496	<b>0.5952</b>
Text	0.2077	0.2248	<b>0.4911</b>
Cell	0.1099	0.3141	<b>0.6267</b>

## 5 结 论

基于 Tikhonov 正则化并结合 GCV 提出了一种新的鬼成像重建方法。利用 MATLAB 分别对不同算法在欠采样条件下的有干扰和无干扰情况进行了分析, 并验证了该算法在鬼成像的图像重建中的精确性和稳定性。当干扰在一定范围内时, 与 CGI、DGI 及 PGI 相比, 本文算法的重建图像具有较大的 SSIM, 且 MSE 远小于其他算法。

在鬼成像过程中, 本文算法虽然在欠采样下能实现较为精确的重建, 但在有干扰条件下的重建图像却会牺牲部分对比度信息, 一定程度上影响了重建图像的视觉感受。因此, 下一步工作将在算法中加入对比度信息等约束条件, 以进一步优化鬼成像的重建结果。

## 参 考 文 献

[1] Shapiro J H. Computational ghost imaging [J]. Physical Review A, 2008, 78(6): 061802.

- [2] Strekalov D V, Sergienko A V, Klyshko D N, et al. Observation of two-photon “ghost” interference and diffraction [J]. Physical Review Letters, 1995, 74 (18): 3600-3603.
- [3] Bennink R S, Bentley S J, Boyd R W. “Two-photon” coincidence imaging with a classical source [J]. Physical Review Letters, 2002, 89(11): 113601.
- [4] Zhao C Q, Gong W L, Chen M L, et al. Ghost imaging lidar via sparsity constraints [J]. Applied Physics Letters, 2012, 101(14): 141123.
- [5] Yu W K, Li S, Yao X R, et al. Protocol based on compressed sensing for high-speed authentication and cryptographic key distribution over a multiparty optical network [J]. Applied Optics, 2013, 52(33): 7882-7888.
- [6] Cao F, Zhao S M. Optical encryption scheme with double secret keys based on computational ghost imaging [J]. Acta Optica Sinica, 2017, 37 (1): 0111001.  
曹非, 赵生妹. 基于计算鬼成像的双密钥光学加密方案 [J]. 光学学报, 2017, 37(1): 0111001.
- [7] Erkmen B I, Shapiro J H. Signal-to-noise ratio of Gaussian-state ghost imaging [J]. Physical Review A, 2009, 79(2): 023833.
- [8] Liang Z Y, Fan X, Cheng Z D, et al. High-order thermo-optic ghost imaging for a tangential moving target [J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2016, 53(8): 081102.  
梁振宇, 樊祥, 程正东, 等. 切向运动目标的热光高阶鬼成像研究 [J]. 激光与光电子学进展, 2016, 53 (8): 081102.
- [9] Ferri F, Magatti D, Lugiato L A, et al. Differential ghost imaging [J]. Physical Review Letters, 2010, 104(25): 253603.
- [10] Gong W L. High-resolution pseudo-inverse ghost imaging [J]. Photonics Research, 2015, 3(5): 234-237.
- [11] Katz O, Bromberg Y, Silberberg Y. Compressive ghost imaging [J]. Applied Physics Letters, 2009, 95 (13): 131110.
- [12] Chen Y, Fan X, Cheng Y B, et al. Compressive sensing ghost imaging based on neighbor similarity [J]. Acta Optica Sinica, 2018, 38(7): 0711001.  
陈熠, 樊祥, 程玉宝, 等. 基于邻域相似度的压缩感知鬼成像 [J]. 光学学报, 2018, 38(7): 0711001.
- [13] Yang W Q, Peng L H. Image reconstruction algorithms for electrical capacitance tomography [J]. Measurement science and technology, 2002, 14(1):

- R1-R13.
- [14] Delgado R A, Middleton R H. Sparse representation using stepwise Tikhonov regularization with offline computations[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2019, 26(6): 873-877.
- [15] Zheng G H, Zhang Q G. Solving the backward problem for space-fractional diffusion equation by a fractional Tikhonov regularization method [J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2018, 148: 37-47.
- [16] Golub G H, Heath M, Wahba G. Generalized cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter[J]. Technometrics, 1979, 21(2): 215-223.