

# 基于二维码识别的 P4P 算法研究

李红卫<sup>1\*</sup>, 熊韬<sup>2</sup>

<sup>1</sup>广东交通职业技术学院海事学院, 广东 广州 510800;

<sup>2</sup>广州海格通信集团股份有限公司, 广东 广州 510663

**摘要** 研究了基于二维(QR)码识别的 P4P 算法, 提出利用 QR 码中存储的四个共面顶点的坐标和 QR 码图像中的像素坐标进行定位。通过相机标定和图像校正得到校正的 QR 码四个共面顶点的像素坐标, 通过译码程序解析得到四个共面顶点的实际位置坐标, 将 P4P 算法解算输出的旋转矩阵和平移向量作为下一步算法的迭代初始值。在透视  $N$  点投影算法中, 借助李群和李代数之间的局部同构关系, 将流形上的寻优转化为切空间中的寻优, 利用线性空间中的最优化手段对目标值进行优化。在切空间的任何梯度方向, 参数值都在该空间内, 即所求矩阵都在流形上。实验结果表明, 在导航运动过程中, 相机坐标位置误差小于  $\pm 2$  mm, 旋转角度误差小于  $\pm 0.5^\circ$ , 算法具有较高的定位精度及稳定性。

**关键词** 二维码; 透视  $N$  点投影算法; 视觉导航; 实际位置; 像素坐标

中图分类号 TP391

文献标志码 A

doi: 10.3788/LOP57.121501

## Research on P4P Algorithm Based on Quick Response Code Recognition

Li Hongwei<sup>1\*</sup>, Xiong Tao<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Maritime College, Guangdong Communication Polytechnic, Guangzhou, Guangdong 510800, China;

<sup>2</sup>Guangzhou Haige Communications Industry Group Co., Ltd., Guangzhou, Guangdong 510663, China

**Abstract** This paper studies P4P localization algorithm based on quick response (QR) code recognition, and proposes to use the coordinates of the four coplanar vertices stored in the QR code and the pixel coordinate in the QR code images to locate. The pixel coordinates of the four coplanar vertices of the corrected QR code are obtained through camera calibration and image correction, and the actual position coordinates of the four coplanar vertices are obtained through decoding program analysis. The rotation matrix and translation vector output by the P4P algorithm are used as the following iterative initial values of the next algorithm. In perspective  $N$  points projection algorithm, the optimization on manifold is converted into optimization in tangent space by means of local isomorphism between Lie group and Lie algebra, and the optimization method in linear space is used to optimize the target value. In any gradient direction of the tangent space, the parameter value is in the space, that is, the matrix is all on the manifold. Experimental results show that during the navigation movement, the camera coordinate position error is less than  $\pm 2$  mm, and the rotation angle error is less than  $\pm 0.5^\circ$ , showing that the algorithm has high positioning accuracy and stability.

**Key words** quick response code; perspective  $N$  points projection algorithm; visual navigation; physical location; pixel coordinates

**OCIS codes** 150.0155; 150.1135; 150.3045

收稿日期: 2019-10-08; 修回日期: 2019-10-18; 录用日期: 2019-10-31

基金项目: 广东省普通高校青年创新人才类项目(2019GKQNCX036, 2019GKQNCX039)、广东省船舶自动化工程技术研究中心(粤科产学研字[2016]176号)、广东省教育厅基础研究及应用研究重大项目(2017GKZDXM005)、校级科研课题(ZC-B-07-01KY-19003)、校级“一院一坊”项目(ZC-AB-05-1001-52)

\* E-mail: 992461977@qq.com

# 1 引言

近年来,自主式移动机器人技术在工业、农业、医学及社会服务业等领域的应用越来越广泛。导航技术是其研究的关键,常见的导航技术有电磁导航、光反射导航、视觉导航、味觉导航、声音导航等。视觉导航技术具有信号探测范围宽、获取信息完整等优点,是未来移动机器人导航的主要发展方向。在视觉导航系统中,国内外应用最多的是在移动机器人上安装基于局部视觉导航技术的车载相机<sup>[1]</sup>。

透视  $N$  点投影(PNP)问题是计算机视觉、摄影测量学及数学领域的一个重要问题。在 PNP 标定方法中,当  $N < 3$  时,PNP 问题有无穷多解;当  $N > 5$  时,存在异面点,可获取唯一解,但不是解析解,且异面特征点靶标制作困难,特征点三维坐标测量过程复杂、误差较大。当  $N \geq 6$  时,PNP 问题成为经典的直接线性变换(DLT)问题,研究  $N \geq 6$  的 PNP 问题在理论上没有太大意义。 $N = 4$  时,若四点共面,利用坐标系转换矩阵的单位正交性,可求得唯一的解析解。由于其共面靶标制作简单,特征点坐标定位方便,因此 P4P 成为常用的相机标定方法<sup>[2]</sup>。

二维(QR)码是近年来移动设备上流行的一种编码方式,具有编码密度高、信息容量大、编码范围广、容错能力强、译码可靠性高、成本低、易制作、持久耐用等优点,比传统的条形码存储的信息、数据类型<sup>[3]</sup>更多。

QR 码可代替传统自然特征目标用于机器人视觉导航,但一般仅利用 QR 码存储信息。在 QR 码中存储 QR 码布点的准确地理坐标,在自动导引运输车(AGV)移动路径上,每隔一段距离或在特定位置处,铺设 QR 码。AGV 在移动过程中,通过车载工业相机扫描并识别 QR 码确定 AGV 的位置和姿态信息,计算出 AGV 在航向上的角度和位置误差,使 AGV 以更正确的姿态向下一个 QR 码行驶。但在实际应用中,该方法定位精度较低<sup>[4]</sup>。因此,本文基于 QR 码的编码方式结合传统机器视觉技术,提出了一种 P4P 算法用于相机的位姿估计,已知相机相对车体的位姿,就能得到车体在参考坐标系中的位姿。

## 2 基于 QR 码的定位原理

QR 码具有存储信息的功能,因此在定位过程中,QR 码可以存储 QR 码四个共面顶点的实际坐

标,该坐标可由 AGV 上安装的工业相机拍摄 QR 码解析得到。其次译码程序解析 QR 码时还可以得到 QR 码四个共面顶点在图像中的像素坐标,两者同时作为 P4P 算法的输入便可求得相机光心位置,再由相机与车的相对关系就能推算出小车中心的坐标。实验使用的算法分两步,第一步构造一个简单的优化问题,即用 P4P 算法求得相机光心的位置,用旋转矩阵  $\mathbf{R}$  和位移向量  $\mathbf{t}$  表示, $\mathbf{R}$  是一个三阶正交矩阵;第二步构造基于流式的 P4P 算法,将第一步得到的输出值作为迭代的初始值,估计最终相机光心的位置。算法工作流程如图 1 所示。

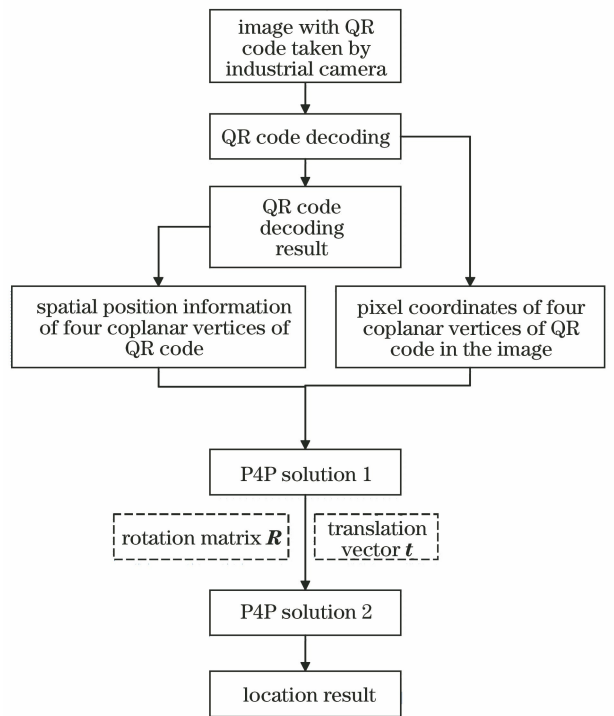


图 1 定位导航算法流程图

Fig. 1 Flow chart of positioning and navigation algorithm

PNP 定位导航过程涉及三个坐标系如图 2 所示。包括世界坐标系  $O_w - X_w Y_w Z_w$ 、相机坐标系  $O_c - X_c Y_c Z_c$ 、QR 码的图像坐标系  $O - XY$ 。

世界坐标系和相机坐标系均为右手坐标系,不会发生形变。可通过刚体变换将世界坐标系下的坐标转换到相机坐标系中<sup>[5]</sup>

$$\begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{bmatrix} = \mathbf{R} \cdot \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \end{bmatrix} + \mathbf{t}, \quad (1)$$

式中, $\mathbf{R}$  为绕  $X_w$ 、 $Y_w$ 、 $Z_w$  轴旋转效果的乘积。

定位过程中,先利用 P4P 算法估计  $\mathbf{R}$  和  $\mathbf{t}$ ,并将其作为基于流形 P4P 算法的迭代初始值,经迭代运算得到最终  $\mathbf{R}$  和  $\mathbf{t}$  的估计值,进而得到相机光心位

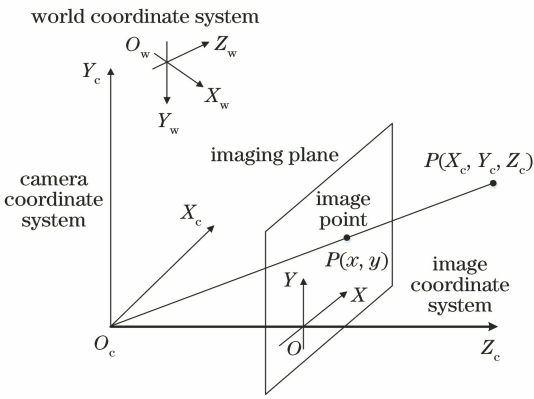


图2 PNP定位导航过程中的三个坐标系  
Fig. 2 Three coordinate systems in the process of PNP positioning and navigation

利用  $R$  求解得到翻滚角  $\theta_x$ 、俯仰角  $\theta_y$  和方位角  $\theta_z$

$$\theta_x = \arctan (r_{32}/r_{33}), \quad (4)$$

$$\theta_y = \arctan (-r_{31}/\sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}), \quad (5)$$

$$\theta_z = \arctan (r_{21}/r_{11}). \quad (6)$$

### 3 相机标定

对目标进行定位前,需要对所使用的相机进行标定,实验选用 Matlab 中的 Camera Calibrator 进行标定,标定图如图3所示。将用 A4 纸张打印的标定纸贴在地板上,从不同角度拍摄的图像如图4所示。

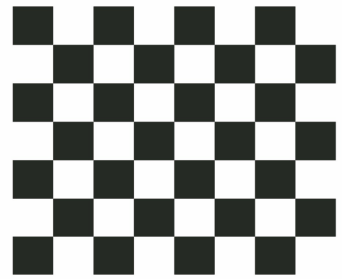


图3 标定图像

Fig. 3 Calibrated image

置的估计值<sup>[6]</sup>

$$\begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \end{bmatrix} = -R^{-1} \cdot t. \quad (2)$$

为了叙述方便,定义

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

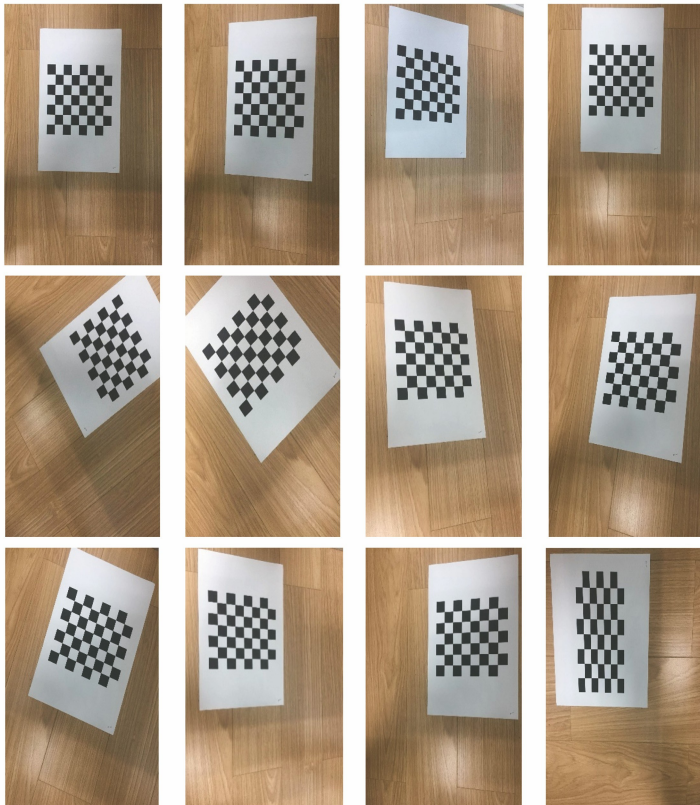


图4 不同角度拍摄的标定图像

Fig. 4 Calibration images taken from different angles

将图 4 中的图像导入 Camera Calibrator, 计算得到内参矩阵  $\mathbf{K}$  (3 阶方阵) 和畸变参数  $k_1$  和  $k_2$ , 对图像进行校正 (定位处理过程中只需对 QR 码的四个顶点进行校正), 具体步骤:  $u_i$  和  $v_i$  分别为校正后图像中对应的像素坐标,  $u'_i$  和  $v'_i$  分别为校正前的图像像素坐标, 可表示为<sup>[7]</sup>

$$\begin{aligned} u_i &= [u'_i + u_0(k_1 r + k_2 r^2)] / (k_1 r + k_2 r^2) \\ v_i &= [v'_i + v_0(k_1 r + k_2 r^2)] / (k_1 r + k_2 r^2), \end{aligned} \quad (7)$$

$$r = (u'_i - u_0)^2 / f_x^2 + (v'_i - v_0)^2 / f_y^2, \quad (8)$$

式中,  $f_x$  和  $f_y$  分别为相机标定后得到的  $\mathbf{K}$  对角线上第一个和第二个元素,  $k_1$  和  $k_2$  分别为相机标定得到的径向畸变参数, 都可由相机标定得到。  $u_0, v_0$  分别为中心像素坐标<sup>[8]</sup> (即  $\mathbf{K}$  中最后一列的第一行和第二行元素)。径向畸变系数  $k_1 = 0.1212, k_2 = -0.0828$ , 实验定位使用的四点像素坐标都是指校正后的坐标。

## 4 P4P 定位算法

设相机坐标系内参  $f$  (相机的有效焦距),  $a$  (相机图像的纵横比) 由相机标定得到, 则  $\mathbf{K}$  可表示为<sup>[9]</sup>

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & Tf & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

式中,  $T$  为像素比例因子, 设 QR 码的四个共面顶点所在图像坐标系的相应坐标为

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{X}_4 = \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

相机坐标系下对应像素的坐标为

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{R}\mathbf{X}_i + \mathbf{t}. \quad (11)$$

图像中特征点坐标和相机坐标系下的像素坐标与  $\mathbf{K}$  有关, 即

$$s \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{K}\mathbf{M}_i. \quad (12)$$

式中,  $s$  为定义的一个未知像素坐标常量, 结合 (9) 式、(11) 式、(12) 式, 可得

$$s \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{H} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$\text{令 } \mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & Tf & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{t}), \quad (14)$$

式中,  $\mathbf{r}_i$  为旋转矩阵  $\mathbf{R}$  的第  $i$  列, 由于参数  $T$  和  $f$  通过标定得到, 由 (14) 式, 可得

$$(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{t}) = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & Tf & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \mathbf{H} = s \begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & Tf & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \mathbf{U}\mathbf{Y}^H (\mathbf{Y}\mathbf{Y}^H)^{-1}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{U} &= \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (16)$$

式中, 上标 H 为矩阵的共轭转置矩阵, 由于  $\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$ , 根据外差计算公式可得到向量  $\mathbf{r}_3$ , 进而得到

$$\mathbf{R} = [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3] = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

利用 Gram-schmidt 正交化法对  $\mathbf{R}$  进行正交化得到新的  $\mathbf{R}$ , 提高  $\mathbf{R}$  的正交性, P4P 算法的输出  $\mathbf{R}$  和  $\mathbf{t}$  作为下述实验中算法的迭代初始值。

刚体在三维空间中有六个自由度, 也被称为刚体的位姿。包括固联坐标系原点在参考坐标系中的坐标和三个姿态角, 固联坐标系是固定连接在刚体上的坐标系, 与刚体的相对位置不发生改变。

采用 QR 码进行位姿估计, 主要利用 QR 码携带的四个共面顶点位置坐标和相机获取的 QR 码图像中的四个共面顶点的像素坐标进行定位。根据 QR 码坐标系和参考坐标系的关系 (已知), 得到相机相对参考坐标系的位姿, 最终计算出 AGV 在参考坐标系中的位姿<sup>[10]</sup>。

建立相机固联坐标系  $O-xyz$ , 其原点可在刚体或其延展部分任意选择。为便于计算, 选择一些特殊点即焦点为坐标原点, 在 QR 码中选择特征点。欧氏空间中的运动可分解为原点的平移和坐标系的转动<sup>[11]</sup>。若运动前刚体的坐标系与参考坐标系重合, 则刚体上任一点  $P$  在参考坐标系中的坐标变化为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \mathbf{t}. \quad (18)$$

以相机坐标系为参考坐标系, QR 码为刚体。则 QR 码坐标系上任意点的坐标与其投影在相机平面上的像素坐标的关系为

$$z' \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ 1' \end{pmatrix} = \mathbf{K} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \quad (19)$$

通过给定 QR 码平面上四个共面顶点的坐标, 对  $\mathbf{R}$  和  $t$  进行推算。在四个点固定时, 位姿有唯一解。可设立目标函数寻找合适的  $\mathbf{R}$  和  $t$  使函数  $F$  达到最小值, 表示为

$$F(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{2} f(\mathbf{R}, t)^T f(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |p_i - p'_i|^2, \quad (20)$$

或

$$F(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{2} f(\mathbf{R}, t)^T f(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{2} |z'_i p_i - z'_i p'_i|^2, \quad (21)$$

式中,  $f(\mathbf{R}, t)$  为误差向量函数,  $p_i = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix}$ ,  $p'_i = \begin{pmatrix} u'_i \\ v'_i \end{pmatrix}$  分别为特征点的实际像素坐标和由特征点在 QR 码平面上的坐标、 $\mathbf{R}$ 、 $t$  计算得到的投影像素坐标,  $n$  为特征点数目,  $z'_i$  和  $p'_i$  分别为  $\mathbf{R}$  和  $t$  的函数。特征点的实际像素坐标由图像处理方法得到, 可将

$$\text{相机参数矩阵表示为 } \mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}.$$

(20)式在寻优过程中, 需要对  $1/z'$  进行求导, 因其导数的形式使  $z'$  较大的区域收敛速度较慢, 且在三个方向上的收敛速度不一致。因此采用(21)式优化目标函数, 其特性是越远的特征点误差的比重越大, 由于(21)式是位姿的二次函数, 有全局最优解<sup>[12]</sup>。

为解决(21)式的优化问题, 需寻找  $\mathbf{R}$  的最优值。因三维正交矩阵的元素个数为 9 个, 且位于 9 维欧氏空间上, 三维正交矩阵的集合构成一个三维流形, 也是一个李群。解决该问题有三种方法: 1) 采用欧氏空间中的最小二乘寻优, 然后将其“迁移”到流形上某“合适的”点; 2) 采用带约束条件的欧氏空间最小二乘寻优, 约束条件为矩阵正交性; 3) 在流形上寻优。第一种方法是解决 PNP 问题的常用方法, 如 P4P 解析求法, 但其“迁移”过程没有合适的方法, 且精度较差。第二种方法难以解决带约束条件

的最优化问题, 因此实验采用第三种方法来寻优。在切空间的任何梯度方向, 参数值都在空间内, 即所求矩阵在流形上<sup>[13]</sup>。

与在欧氏空间中的寻优不同, 列文伯格-马夸尔特(L-M)算法将自变量映射到李代数上, 依赖于误差向量函数  $f(\mathbf{R}, t)$  和 Jacobi 矩阵。

在多变量微积分中, 将导数用矩阵表达, 第  $i$  行、第  $j$  列的元素对应向量函数的第  $i$  个分量对第  $j$  个自变量的导数, 用一串矩阵相乘表示求导链式法则, 乘积顺序与链式法则的写法相对应。将导数矩阵称为 Jacobi 矩阵, 实验中的 Jacobi 矩阵  $\mathbf{J}$  为  $2n \times 6$  的矩阵,  $n$  为特征点的数目。

$$\mathbf{J} = \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}'} \frac{\partial \mathbf{w}'}{\partial \xi}, \quad (22)$$

式中,  $\xi = \begin{pmatrix} \mathbf{S} \\ \rho \end{pmatrix}$  为自变量,  $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  为 QR 码图像顶点

位置坐标,  $\rho = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{pmatrix}$  为  $\mathbf{R}$  对应的李代数空间中的点,

$$\mathbf{w}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x'} & \frac{\partial f_1}{\partial y'} & \frac{\partial f_1}{\partial z'} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x'} & \frac{\partial f_2}{\partial y'} & \frac{\partial f_2}{\partial z'} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_{2n}}{\partial x'} & \frac{\partial f_{2n}}{\partial y'} & \frac{\partial f_{2n}}{\partial z'} \end{pmatrix}, \quad (23)$$

式中,

$$f_{2i-1} = z'_i u'_i - z'_i u_i, \quad (24)$$

$$f_{2i} = z'_i v'_i - z'_i v_i, \quad (25)$$

$$\frac{\partial f_{2i-1}}{\partial \mathbf{w}'} = (k_{1,1}, k_{1,2}, k_{1,3} - u_i), \quad (26)$$

$$\frac{\partial f_{2i}}{\partial \mathbf{w}'} = (k_{2,1}, k_{2,2}, k_{2,3} - v_i). \quad (27)$$

李代数至李群的映射为指数映射, 在优化过程中, 求解李代数的增量再映射回李群时, 由于三维正交矩阵的乘法不可交换, 且没有李代数的加法对应李群乘法的关系, 因此采用左乘扰动模型进行导数计算。导数矩阵的形式为

$$\frac{\partial \mathbf{w}'}{\partial \xi} = [\mathbf{I} - (\mathbf{R}\mathbf{S} + t)], \quad (28)$$

式中,  $\mathbf{I}$  为单位矩阵。令  $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}$ , 采用数值算法进行参数优化的过程中, 每次迭代都会给出参数增量。采用左乘模型进行运算时, 需要将李代数上的参数增量  $\Delta\xi = \begin{pmatrix} \Delta\mathbf{S} \\ \Delta\boldsymbol{\rho} \end{pmatrix}$  映射为矩阵  $\Delta\mathbf{T}$ , 与  $\mathbf{T}$  相乘, 得到更新的矩阵

$$\mathbf{T}' = \Delta\mathbf{T}\mathbf{T}, \quad (29)$$

$$\Delta\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \Delta\mathbf{R} & \mathbf{V}\Delta\mathbf{S} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}. \quad (30)$$

令  $\theta = |\Delta\boldsymbol{\rho}|$ , 则  $\Delta\boldsymbol{\rho} = \theta\mathbf{a}$ 。

$$\Delta\mathbf{R} = \mathbf{I}\cos\theta + (1 - \cos\theta)\mathbf{a}\mathbf{a}^T + \hat{\mathbf{a}}\sin\theta, \quad (31)$$

$$\mathbf{V} = \frac{\sin\theta}{\theta}\mathbf{I} + \left(1 - \frac{\sin\theta}{\theta}\right)\mathbf{a}\mathbf{a}^T + \left(1 - \frac{\cos\theta}{\theta}\right)\hat{\mathbf{a}}. \quad (32)$$

式中,  $\mathbf{a}$  为长度为 1 的方向向量,  $\hat{\mathbf{a}}$  为  $\mathbf{a}$  的反对称矩阵。上述算法实现了旋转矩阵  $\mathbf{R}$  和位移向量  $\mathbf{t}$  在流形上的数值寻优, 迭代得到较为精确的相机光心位置。

## 5 仿真实验验证

仿真主要是对内参矩阵做调整, 以查看定位性能的变化, 内参矩阵可表示为

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} f_x & 0 & u_0 \\ 0 & f_y & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

旋转矩阵只考虑与实际应用相似的场景, 即镜头只绕图像坐标系的  $z$  轴旋转, 可表示为 ( $\theta$  为旋转角)

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (34)$$

在仿真过程中, 在内参矩阵中加入噪声, 以模拟标定后所得的内参矩阵与实际内参矩阵存在的差异。像素中心  $u_0, v_0$ , 这个点的标定值与实际值之间的差异不会很大, 因此对这两个标定值的仿真可以在实际值上加入满足标准正态分布的随机噪声。

### 5.1 仿真 1

四个共面顶点的实际坐标为:  $A(0.03, 0.03)$ ,  $B(0.03, -0.03)$ ,  $C(-0.03, -0.03)$  和  $D(-0.03, 0.03)$ , 其对应的像素坐标为:  $A_{\text{-pixel}}(40, 123)$ ,  $B_{\text{-pixel}}(106, 86)$ ,  $C_{\text{-pixel}}(68, 20)$  和  $D_{\text{-pixel}}(2, 58)$ 。内参矩阵为

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1264 & 0 & 540 \\ 0 & 1260 & 720 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (35)$$

标定所得的内参矩阵与实际内参矩阵相同, 待估计点的实际坐标为  $P(-0.0400, 0.0300)$ , 旋转角度为  $60.0000^\circ$ 。由于实际的像素坐标不存在小数, 因此实验将四个点的像素都四舍五入取整, 从而引入定位运算的误差。仿真定位结果为  $P(-0.0398, 0.0298)$ , 误差为  $2.9386 \times 10^{-4}$  m, 角度估计误差为  $0.0252^\circ$ 。

### 5.2 仿真 2

四个已知点的实际坐标为  $A(0.03, 0.03)$ ,  $B(0.03, -0.03)$ ,  $C(-0.03, -0.03)$  和  $D(-0.03, 0.03)$ , 其对应的像素坐标为:  $A_{\text{-pixel}}(40, 123)$ ,  $B_{\text{-pixel}}(106, 86)$ ,  $C_{\text{-pixel}}(68, 20)$  和  $D_{\text{-pixel}}(2, 58)$ 。实际内参矩阵为

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1264 & 0 & 540 \\ 0 & 1260 & 720 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (36)$$

标定所得的内参矩阵为

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1264 + \omega_1 & 0 & 540 + \omega_2 \\ 0 & 1260 + \omega_1 & 720 + \omega_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (37)$$

式中,  $\omega_i$  为满足标准正态分布的噪声。做 10000 次随机实验, 结果如图 5 所示。可以看出, 该仿真状态下定位的平均误差为  $4.2454 \times 10^{-4}$  m, 角度估计的平均误差为  $0.0250^\circ$ 。

### 5.3 仿真 3

四个已知点的实际坐标为  $A(0.03, 0.03)$ ,  $B(0.03, -0.03)$ ,  $C(-0.03, -0.03)$  和  $D(-0.03, 0.03)$ , 其对应的像素坐标为:  $A_{\text{-pixel}}(40, 123)$ ,  $B_{\text{-pixel}}(106, 86)$ ,  $C_{\text{-pixel}}(68, 20)$  和  $D_{\text{-pixel}}(2, 58)$ 。实际内参矩阵为

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1264 & 0 & 540 \\ 0 & 1260 & 720 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (37)$$

标定所得的内参矩阵为

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1264 + 10\omega_1 & 0 & 540 + \omega_2 \\ 0 & 1260 + 10\omega_1 & 720 + \omega_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (38)$$

做 10000 次随机实验, 仿真结果如图 6 所示。可以看出在该仿真状态下定位的平均误差为  $3 \times 10^{-4}$  m, 角度估计的平均误差为  $0.0250^\circ$ 。

## 6 实验验证

通过相机标定方法得到标定后的内参矩阵和径

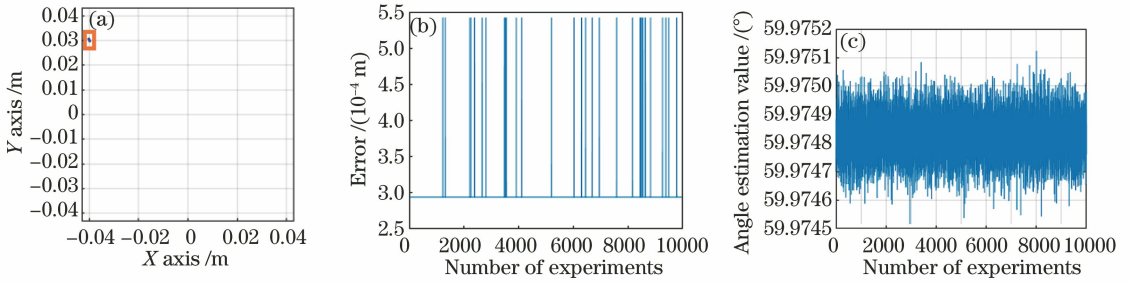


图 5 仿真实验 2。(a)位置估计效果图;(b)位置估计误差;(c)角度估计误差

Fig. 5 Simulation of experiment 2. (a) Position estimation effect diagram; (b) position estimation error; (c) angle estimation error

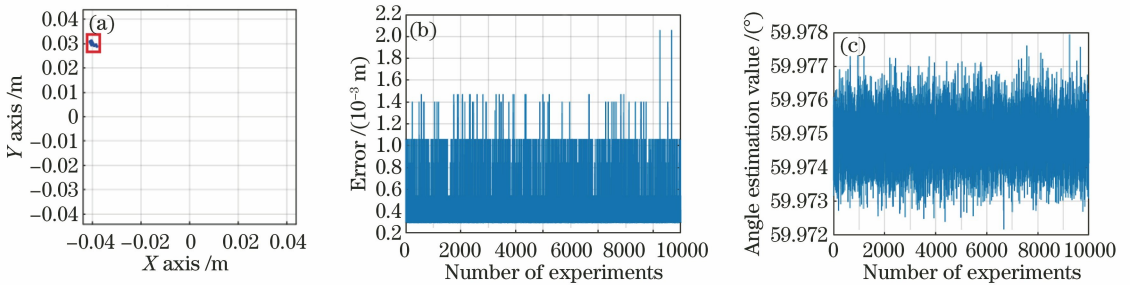


图 6 仿真实验 3。(a)位置估计效果图;(b)位置估计误差;(c)角度估计误差

Fig. 6 Simulation of experiment 3. (a) Position estimation effect diagram; (b) position estimation error; (c) angle estimation error

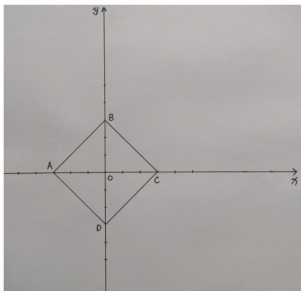


图 7  $x-y$  平面  
Fig. 7  $x-y$  plane

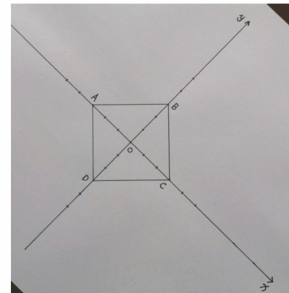


图 8 拍摄的图像  
Fig. 8 Captured image

向畸变系数  $k_1$  和  $k_2$ 。如图 7 中所示四边形  $ABCD$ ,假设图 7 中的  $x-y$  平面为地球坐标系中的  $X_w-Y_w$  平面, $O$  点为图像坐标系的原点。

将相机位于图 7 所示的平面上方,沿  $y$  轴旋转  $45^\circ$ (相机的抖动会导致一定的误差),拍摄效果如图 8 所示。

所拍摄的图像通过 Matlab 显示,可以得到  $A、B、C、D$  四个点的像素坐标信息,但这种方式得到的坐标信息不是绝对精确,存在一定的误差。通过上文所述的位置计算模型得到原点坐标的估计值及相机的旋转角度,如表 1 所示。

为验证本算法的性能,采用上述方法沿  $y$  轴每隔  $2^\circ$  旋转一次,在同一角度下改变待估计点实际坐

标(即  $x-y$  平面图像原点坐标实际坐标位置)共拍摄 900 幅  $x-y$  平面图像,所拍摄的图像通过 Matlab 显示,得到平面中  $A、B、C、D$  四个点的像素坐标信息,通过前述的位置计算模型得到原点坐标的估计值及相机旋转角度,最终统计结果表明,本算法计算得出的相机坐标位置误差在  $\pm 2\text{ mm}$  范围内,旋转角度误差在  $\pm 0.5^\circ$  范围内。

进行定位导航运动过程实验时,相机通过相机架安装在可移动的轮式移动机器人上以模拟移动状态的 QR 码定位,相机与轮式移动机器人固定联接,即可视相机与轮式移动机器人作为一个刚体,相机架可以调节相机的安装角度。由于 QR 码存储的信息是平面坐标系  $x-y$  的坐标,在实验地面上定义一

表1 仿真结果

Table 1 Simulation result

Actual coordinate /m	Estimated coordinate /m	Error /( $10^{-4}$ m)	Actual angle /( $^{\circ}$ )	Estimated angle /( $^{\circ}$ )
(-0.02,0.00)	(-0.2034,0.0001)	3.83	91	91.0439
(-0.04,0.04)	(-0.0406,0.0405)	9.85	91	91.0439
(0.01,-0.01)	(0.0102,-0.0095)	5.24	91	91.0439
(0.02,-0.01)	(0.0199,-0.0097)	5.10	91	91.0439
(-0.01,-0.01)	(-0.0097,-0.0102)	3.97	91	91.0439
(-0.01,0.00)	(-0.0100,0.00002)	2.63	-135	-134.6997
(0.01,0.01)	(0.0095,0.0099)	5.12	-135	-134.6997
(0.02,0.00)	(0.0202,0.0002)	3.39	-135	-134.6997
(0.04,-0.04)	(0.0406,-0.0394)	8.25	-135	-134.6997
(0,-0.04)	(0.00003,-0.0396)	4.43	-135	-134.6997
(0,0.01)	( $5.3391 \times 10^{-4}$ ,0.0101)	5.43	45	44.0700
(0.04,0.04)	(0.039,0.0405)	11.00	45	44.0700
(0.02,-0.02)	(0.01997,0.0191)	9.92	45	44.0700
(-0.04,-0.04)	(-0.0395,-0.0401)	5.50	45	44.0700
(-0.02,-0.01)	(-0.0208,-0.0095)	1.00	45	44.0700

个平面坐标系。实验中,QR码的张贴间距为1000 mm,测试速度分别为0.5,1.0,1.5,2.0,2.5 m/s,经过100次实验并统计得出相机坐标位置误差在 $\pm 2$  mm范围内,旋转角度误差在 $\pm 0.5^{\circ}$ 范围内,这表明本算法具有较高的定位精度及稳定性。

将本算法的定位精度,与相关文献进行对比。文献[1]采用基于DM(Data matrix)二维码AGV的导航方式,将位置信息存储到DM码中,利用存储在DM码中的位置信息和DM码显著特征L边进行定位和导航。在测试速度分别为1,1.5,2,2.5 m/s时得到AGV运行过程中的二维码位置信息,其最大角度误差均大于 $1^{\circ}$ ,最小角度误差为 $0.5^{\circ}$ ,最大位置误差接近20 mm,最小位置误差为2 mm,这表明本算法相比文献[1]中的导航算法具有较高的稳定性和定位精度。文献[3]所述算法在导航运行过程中,AGV的站点位置修正后的误差可控制在 $\pm 12$  mm以内,AGV的航向角修正后误差可控制在 $\pm 1^{\circ}$ 以内,其位置定位精度为本算法的 $1/6$ ,角度定位精度为本算法的 $1/2$ 。文献[4]在速度为1 m/s和地标间距为1.2 m时的侧向距离偏差均值为8 mm,方向偏差小于 $1^{\circ}$ 。

## 7 结 论

研究了基于QR码识别的P4P定位算法,提出利用QR码中存储的关于QR码四个共面顶点准确地理坐标和由相机获取的QR码图像解析出的像素坐标进行定位。在P4P定位算法中,利用四个共面顶点的位置坐标和像素坐标解算输出相机光心的位

置,将旋转矩阵和平移向量作为基于流形P4P算法的迭代初始值,最终求得精确的相机光心位置。在PNP算法中,借助李群和李代数之间的局部同构关系,将流形上的寻优转化为切空间中的寻优,利用熟知的线性空间中的最优化手段对目标值进行优化,即在切空间的任何梯度方向,参数值都在空间内,从而实现所求矩阵在流形上。由仿真验证和实验测试结果可知,本算法具有较高的定位精度和稳定性,可满足多种低成本、高精度及稳健定位场所的使用需求。

## 参 考 文 献

- [1] Zhang Y, Zhu Z W. Study on AGV control system with two-dimensional code navigation[J]. Journal of Shandong Agricultural University (Natural Science Edition), 2019, 50(3): 441-444.  
张艳, 朱振伟. 二维码导航AGV控制系统研究[J]. 山东农业大学学报(自然科学版), 2019, 50(3): 441-444.
- [2] Zhu F, Yu F S, Wu Y M, et al. Analysis of attitude calibration precision of P4P camera[J]. Acta Optica Sinica, 2018, 38(11): 1115005.  
朱帆, 于芳苏, 吴易明, 等. P4P法相机姿态标定精度分析[J]. 光学学报, 2018, 38(11): 1115005.
- [3] Xu Q, Xu Z W, Du X F. Vision navigation AGV system based on QR code [J]. Transducer and Microsystem Technologies, 2019, 38(2): 83-86, 90.  
徐庆, 徐志伟, 杜晓峰. 基于QR码的视觉导航AGV系统[J]. 传感器与微系统, 2019, 38(2): 83-



- 86, 90.
- [4] Wang J E, Xiao X Q. Mobile robot integrated navigation method based on QR code vision positioning [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2018, 39(8): 230-238.  
王家恩, 肖献强. 基于 QR 码视觉定位的机器人复合导航方法研究 [J]. 仪器仪表学报, 2018, 39(8): 230-238.
- [5] Wang Y, Yuan F, Jiang H, et al. High precision pose calculation of space target based on three linear array CCD [J]. Acta Optica Sinica, 2018, 38(5): 0515004.  
王艳, 袁峰, 姜宏, 等. 基于三线阵 CCD 空间目标的高精度位姿解算 [J]. 光学学报, 2018, 38(5): 0515004.
- [6] Zhou R, Zhang Z Y, Huang X H. Weighted orthogonal iteration algorithm for camera pose estimation [J]. Acta Optica Sinica, 2018, 38(5): 0515002.  
周润, 张征宇, 黄叙辉. 相机位姿估计的加权正交迭代算法 [J]. 光学学报, 2018, 38(5): 0515002.
- [7] Li L Y, Li W T, Xu H Y, et al. Camera pose estimation with uncertain reference point based on orthogonal iterative [J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2019, 56(1): 011503.  
李丽媛, 李文韬, 许海燕, 等. 基于正交迭代的参考点不确定相机位姿估计 [J]. 激光与光电子学进展, 2019, 56(1): 011503.
- [8] Wu Q H, Chen H, Zhu S S, et al. Fast calibration method of large dimension measurement system based on multi-camera array [J]. Acta Optica Sinica, 2018, 38(12): 1215002.  
吴庆华, 陈慧, 朱思斯, 等. 一种多相机阵列大尺寸测量系统快速标定方法 [J]. 光学学报, 2018, 38(12): 1215002.
- [9] Wong K H, Yu Y K, Fung H Y, et al. Robust and efficient pose tracking using perspective-four-point algorithm and Kalman filter [C] // 2017 International Conference on Mechanical, System and Control Engineering, May 19-21, 2017, St. Petersburg, Russia. New York: IEEE, 2017: 240-244.
- [10] Su J D, Qi X H, Duan X S. Plane pose measurement method based on monocular vision and checkerboard target [J]. Acta Optica Sinica, 2017, 37(8): 0815002.  
苏建东, 齐晓慧, 段修生. 基于单目视觉和棋盘靶标的平面姿态测量方法 [J]. 光学学报, 2017, 37(8): 0815002.
- [11] Gao X S, Li Y H, Zhang L Q, et al. Precise positioning technology for automatic guided vehicles based on SURF algorithm [J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2019, 56(10): 101203.  
高雪松, 李宇昊, 张立强, 等. 基于 SURF 算法的自动导引车精确定位技术 [J]. 激光与光电子学进展, 2019, 56(10): 101203.
- [12] Song R C, He X H, Wang Z Y. Complementary object tracking based on directional reliability [J]. Acta Optica Sinica, 2018, 38(10): 1015001.  
宋日成, 何小海, 王正勇. 基于方向可靠性的互补跟踪算法 [J]. 光学学报, 2018, 38(10): 1015001.
- [13] Wang H Y, Wang L, Yin W R, et al. Multi-scale correlation filtering visual tracking algorithm combined with target detection [J]. Acta Optica Sinica, 2019, 39(1): 0115004.  
王红雨, 汪梁, 尹午荣, 等. 结合目标检测的多尺度相关滤波视觉跟踪算法 [J]. 光学学报, 2019, 39(1): 0115004.
- [14] Gao X, Zhang T, et al. Visual SLAM 14 [M], Beijing: Electronic Industry Press, 2018: 71-72.  
高翔, 张涛, 等著. 视觉 SLAM 十四讲 [M]. 北京: 电子工业出版社, 2018: 71-72.