

# 结合函数映射与循环一致性约束的模型簇 对应关系计算

杨军\*, 雷鸣

兰州交通大学电子与信息工程学院, 甘肃 兰州 730070

**摘要** 基于 DFPS(Dijkstra Farthest Point Sampling)算法,得到三维模型簇的初始采样点;利用函数映射理论,计算得到两个模型间的映射关系;利用循环一致性约束,将两两模型的映射关系转化为三维模型簇的多路对应关系。实验结果表明,本算法在一定程度上减小了三维模型间对应关系的等距误差,不仅可以实现两个模型间的对应关系计算,还适用于计算等距或近似等距的三维模型簇的对应关系。

**关键词** 机器视觉; 模型簇对应关系; Dijkstra 最远点采样算法; 函数映射; 循环一致性约束

中图分类号 TP391.41

文献标识码 A

doi: 10.3788/LOP56.081005

## Correspondence Calculation of Model Cluster by Functional Mapping Combined with Cycle-Consistency Constraints

Yang Jun\*, Lei Ming

School of Electronic and Information Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou, Gansu 730070, China

**Abstract** Based on by the Dijkstra farthest point sampling (DFPS) algorithm, the initial sampling points of the three-dimensional (3D) model cluster are obtained. The correspondence between two models is obtained by the calculation based on the functional mapping theory. The matching between two models is transformed into the multi-way correspondence of a 3D model cluster by use of the cycle-consistency constraints. The experimental results show that the proposed algorithm can reduce the isometric errors of the correspondence among 3D models to a certain extent. Moreover, this algorithm is not only capable of the correspondence calculation of two models, but also the correspondence calculation of an isometric or approximately isometric 3D model cluster.

**Key words** machine vision; model cluster correspondence; Dijkstra farthest point sampling algorithm; functional maps; cycle-consistency constraints

**OCIS codes** 100.6890; 150.1135; 110.6880

## 1 引言

三维模型对应关系的计算是计算机视觉与计算机图形学的一个重要的研究问题,在三维模型的变形、分割、检索、配准等方面有着诸多应用<sup>[1]</sup>。目前对两个模型间对应关系的研究已经日渐成熟,而对于模型簇对应关系的研究还处于理论探索阶段。因此,在三维模型簇中计算一致的对应关系成为近几年一个广泛关注的研究方向。模型簇的对应关系计

算问题是指构建一个集合中所有模型间的点到点映射关系,对于多个模型间的映射需达到“循环一致性”的准则,即集合中所有模型间的点到点映射要达到全连通或半连通,且每一组单路映射具有一致相似性<sup>[2]</sup>。在理论上,可以通过计算模型簇中所有模型间的对应关系来解决此问题,然而在实际研究中,还需要考虑如何将两两模型的对应关系转化为模型簇的对应关系,以实现模型簇中各模型间的“一一映射”。此外,当同时匹配模型簇中各个模型时,计算

收稿日期: 2018-10-17; 修回日期: 2018-10-30; 录用日期: 2018-11-13

基金项目: 国家自然科学基金(61862039)

\* E-mail: yangj@mail.lzjtu.cn

模型簇对应关系的时间、空间复杂度会随着模型数量以及采样点数量的增加呈线性增长,因此还需考虑如何在不增加时间与空间开销的情况下,保证模型簇对应关系的正确率<sup>[3]</sup>。

现有对三维模型的对应关系的研究主要聚焦在两个等距模型间的匹配上,主要研究方法有点到点的映射、基于热核签名与波核签名的映射以及函数映射(Functional Maps)等。其中函数映射是近几年出现的计算三维模型对应关系的新方法,具有较高的匹配准确率,计算效率也比点到点映射以及基于热核、波核签名的映射等方法高。因此,该方法也受到了研究者的广泛关注。函数映射是将源模型与目标模型上的特征点与特征描述符联系起来,通过构建线性函数的方法计算源模型与目标模型之间的函数映射矩阵,将计算源模型与目标模型间对应关系的问题转化为计算模型间的函数映射矩阵问题。如果将函数映射方法构建的对应关系转换为点到点映射关系,相比于单纯计算点到点映射能够获得更为准确的对应关系<sup>[4]</sup>。然而,单纯利用函数映射理论计算两个模型间的对应关系时,对于发生大尺度形变或是拓扑结构发生改变的模型,由于其结构特征和语义信息已发生大幅度的变化,构建的对应关系并不理想,在源模型与目标模型上会产生映射关系分布不一致的情况。之后,Eynard等<sup>[5]</sup>在函数映射的基础上,利用能量最小化理论对函数映射进行约束,在两个非等距模型上得到较为准确的对应关系。然而,该算法无法准确计算出三维模型簇的对应关系,模型集合中各模型的对应关系难以施加循环一致性约束;此外,该方法依然无法有效地解决因模型自身对称性而影响对应关系计算的问题。综上所述,三维模型簇的一致对应关系计算依然处在理论研究的初步探索阶段,是目前模型对应关系研究的重点和难点。为此,本文利用 DFPS(Dijkstra Farthest Point Sampling)采样方法提供了良好的特征输入,并结合函数映射理论与循环一致性约束构建了模型簇的点到点映射关系。

## 2 相关工作

由于模型间对应关系的应用十分广泛,因此计算三维模型间准确的对应关系成为国内外的研究热点。现有的研究方法中,无论是最初的标记模型特征点的方法<sup>[6]</sup>,还是之后的基于谱植入<sup>[7]</sup>的方法以及基于热核、波核签名<sup>[9]</sup>的方法,大多数方法在计算对应关系时都会受到模型自身对称性的影响。函数

映射是最近提出的一种新方法,与已有算法相比,能计算得出更为准确的三维模型间对应关系。

Ovsjanikov等<sup>[10]</sup>首次提出函数映射(Functional Maps, FM)的方法,该方法将构建模型间对应关系的问题转化为模型间函数映射的问题,能够得到较为准确的模型间对应关系。该方法对发生非刚性形变的等距模型有着较好的映射效果,而对于非等距模型,由于模型间的语义信息已发生改变,无法计算得到准确的函数映射矩阵,故而无法构建出理想的对应关系。Corman等<sup>[11]</sup>在函数映射理论的基础上,引入了监督式学习来训练特征描述符,利用训练完成的特征描述符计算函数映射矩阵,得到了两个模型间理想的对应关系。然而,该方法的网络训练成本相对较高,因此需要寻找更为有效的优化策略来降低训练成本。此外,对于带有孔洞或缺损部件的三维模型,该方法无法识别模型所有的特征描述符,进而无法计算出准确的对应关系。熊风光等<sup>[12]</sup>对于匹配两模型所产生的错误对应关系,提出了一种过滤模型错误匹配的方法。该方法在获取模型特征点时,剔除了边缘特征点,以避免因边缘特征点表面信息不全所产生的错误匹配。使用 $k$ -均值聚类( $k$ 表示初始聚类中心的个数)保留匹配对数最大的聚类,剔除部分错误匹配,该方法可以有效地过滤模型初始对应关系中的错误匹配,从而得到两个模型间准确的对应关系。然而,该算法存在剔除过量匹配的问题,部分正确的对应关系会被剔除;此外,该算法剔除了边缘特征点,因此无法建立模型间全面的对应关系。Maron等<sup>[13]</sup>首先利用函数映射方法建立两个模型间的映射关系,然后引入了半正定松弛规划(Semi-Definite Programming Relaxation)对模型间映射的凸问题进行优化,获得了两个模型间对应关系的全局最优解。然而该算法对于非等距模型以及发生大尺度形变的模型无法得到分布一致的函数映射关系,映射关系的优化受限于半正定松弛规划,因此无法得到准确的映射结果。Nogneng等<sup>[14]</sup>利用函数空间的代数运算,将傅里叶基函数植入到函数映射中,通过扩展基函数的积运算,可以有效提高函数映射的重构性和匹配结果,同时保持了原始函数映射的线性级运算量。但是该算法对基函数只进行逐点积运算,对于等距模型间的匹配具有良好的正确率,而对于非等距模型,由于模型间的基函数发生大尺度的变化,单纯利用积运算无法提高模型间对应关系的准确率,还需对映射函数进行优化,使用合适的映射函数才能得到更加精

准的对应关系。

针对两个模型间对应关系的计算,已经形成了较完善的理论方法,这为研究三维模型簇的对应关系计算打下了坚实的理论基础,所以,近几年模型间对应关系的研究侧重点也从两个模型间的匹配逐步转变为模型簇中各模型间的协同一致匹配。文献[15]首先利用函数映射来计算两个模型间的对应关系,然后用循环一致性约束将多个已建立的两个模型间的对应关系转变为模型簇的对应关系。该算法可以通过循环一致性约束过滤掉模型簇中的错误映射关系,提高模型簇对应关系计算的正确率。该方法需要给出两个模型间初始对应关系,而对缺少部件或表面带有孔洞的部分(或残缺)模型,因其缺失了大量的语义信息,故该算法无法获得准确的部分模型间的对应关系。此外,该算法中映射函数的选取影响着模型簇的映射结果,因此如何构建一个有意义的函数空间并对原始函数映射进行优化是该算法的难点问题。针对此问题,Sahillioglu等<sup>[16]</sup>提出了基于动态规划的模型簇对应关系优化计算方法。其核心思想是利用动态规划算法将模型簇中各模型间的等距误差函数最小化,并利用循环一致性理论作为模型簇准确一致匹配的约束条件,以构建模型簇的一致性映射关系。该方法在等距模型簇中可以建立理想的对应关系,并且对于模型簇的非均匀采样点或有噪声点的情况,该算法都可以获得理想的对应关系。然而,该算法仅适用于四足等距模型,对于非等距模型或者当模型发生大尺度形变时,模型簇的对应关系计算结果不是很理想。此外,该算法仅能处理完整模型间的对应关系,而对于部分模型或带有孔洞的模型无法计算得出准确的对应关系。Cosmo等<sup>[17]</sup>将一组映射关系作为输入,将模型簇的对应关系计算问题定义为寻找模型簇的最小失真对应(Minimum Distortion Correspondence)问题,并对模型簇中所有模型的对应关系集合进行循环一致性约束。该算法在函数空间中优化了失真度量函数,从而得到正确的对应关系。然而,该算法仍然存在两个不足:1)由于该算法依赖测地距离度量作为匹配标准,因此当模型簇出现拓扑噪声时,如模型缺失部分部件或表面出现孔洞等,所构建的模型簇的一致对应关系的准确率会极大地下降;2)该算法建立的相似性标准在模型簇的匹配中起着全局性作用,但是该标准需要手动设置参数且不易控制它的阈值。

综上所述,已有的研究工作在刚性变换和等距(或近似等距)的非刚性变换的两个模型间(源模型

和目标模型)取得了较好的对应关系模型,然而当一簇拓扑结构相似而姿态不同的模型(尤其是发生了大尺度非等距变换的模型),或是不同类型的模型(异质模型簇)之间进行变形迁移时,对应关系的协同计算变得非常困难,主要难点表现在无法构建模型间的函数映射方程(即目标函数),无法同时完成模型簇中各模型间对应关系的协同一致计算,无法构建理想的点到点对应关系。本文提出了一种基于函数映射理论与循环一致性约束的三维模型簇的对应关系计算方法。主要创新点和贡献有:1)提出了结合迪杰斯特拉(Dijkstra)算法的最远点采样方法(Farthest Point Sampling, FPS),即 DFPS 采样算法,对模型进行特征点采样,可以获得更具代表性的特征点,并且采样点分布更加全面,采样点的选取不会受到模型形变的影响,且为后期进行对应关系的计算提供了良好的输入;2)引入函数映射与  $K$ -近邻搜索( $K$  为最相似特征点的个数)对源模型与目标模型建立映射关系,提高了对应关系的准确率;3)引入更为完善的循环一致性约束,将多组两两模型的映射转化为模型簇的映射,并且通过循环一致性的约束条件过滤模型簇的错误映射,保证了多路对应关系的正确率。

### 3 DFPS 采样

三维模型一般是由三角网格或点云数据构成,如果对源模型与目标模型间所有的顶点进行逐个匹配,时间复杂度与空间复杂度都是非常巨大的。因此,在建立源模型与目标模型的对应关系时,选取合适数目的特征点非常重要,并且所选取的采样点应该具有代表性的顶点,包含模型的主要表面特征信息,如尖端特征点等。因此,良好的采样算法对模型间对应关系的正确率起着重要的作用。

#### 3.1 最远点采样算法

最远点采样(FPS)是一种常用的特征点采样算法<sup>[18]</sup>。在选取稀疏特征点时,利用最远点采样算法可得到分布均匀的采样点,图 1(a)给出猩猩模型采样点数为 10 的 FPS 稀疏采样结果,这些稀疏采样点大多分布在人体模型的尖端位置,可以表征模型的突出特征。然而,由于最远点采样算法建立在选取高斯曲率值最大的顶点上,因此,在计算稠密对应关系时,该算法优先选择高斯曲率值大的顶点。在模型发生非刚性形变的区域或是尖端点以及尖端点周围顶点的采样概率会明显高于平滑区域的采样概率,如图 1(b)所示,当采样点数目增至 200 后,会导

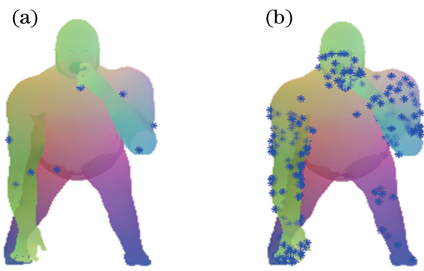


图1 不同采点数目下的FPS采样结果。(a)稀疏点采样;  
(b)稠密点采样

Fig. 1 FPS sampling results under different numbers of sampling points. (a) Sparse point sampling;  
(b) dense point sampling

致FPS算法出现分布不均匀、采样点集中的现象,这样会影响稠密对应关系的计算。

### 3.2 DFPS 采样算法

Dijkstra算法基于贪心算法原理,是目前公认的求解最短路径的最好方法之一<sup>[19]</sup>。该算法主要通过每次新扩展一个距离最短的点,更新与其相邻点的距离来达到寻找最短路径的目的。使用Dijkstra算法计算出来的最短Dijkstra距离近似于测地距离,当对模型进行稠密点采样时,所计算出的Dijkstra距离不会产生变化,有利于采样出分布一致的特征点,在模型尖端点位置也没有出现大量的重复采样,从而可以提高对应关系的正确率。

通过DFPS采样算法对源模型与目标模型进行特征点的采样,可以获取分布均匀且特征信息更加明显的采样点,对后续进行源模型与目标模型的点对点映射的转换提供了具有丰富表面特征信息的采

样点,使点对点映射更加准确。该算法具体步骤如下:

Step1 定义三维网格模型上任意顶点 $x$ 的高斯曲率为: $k(x) = 2\pi - \sum_i \theta_i$ ,其中 $\theta_i$ 表示顶点 $x$ 位于所在三角网格构成的夹角,顶点数为 $i = 1, 2, \dots$ 。分别计算源模型 $M$ 与目标模型 $N$ 上所有点的高斯曲率值 $k$ ,并将高斯曲率值 $k$ 按从小到大进行排序。

Step2 从中选取源模型 $M$ 与目标模型 $N$ 中高斯曲率值最大的点分别作为第一个采样点 $m_1$ 与 $n_1$ 。

Step3 利用Dijkstra算法分别计算采样点 $m_1$ 与 $n_1$ 到其所在模型上其余各采样点的Dijkstra距离。

Step4 选取距起始采样点 $m_1$ 与 $n_1$ 最远Dijkstra距离的顶点作为下一个采样点。

Step5 依次迭代采样,直至达到所需的采点数目 $I$ ,得到源模型 $M$ 与目标模型 $N$ 的采样点集 $I_M$ 与 $I_N$ ,该算法结束。

图2、3为不同姿态模型的采样点分布,图中标记点为获取的采样点。图2为采样点数目为10的稀疏采样点分布情况,图2(a)为文献[20]中利用FPS采样算法获取的采样点,图2(b)为所提算法DFPS获取的采样点。可以看出,FPS算法得到的采样点出现分布不均匀的情况,在图2(a)中第1个模型胳膊肘和第2个模型手指尖的位置,都产生了密集的采样点;而所提算法所获取的采样点分布较为均匀,大多分布在尖端特征点位置,并且在源模型与目标模型上采样点的分布大体一致,有利于后续建立模型间的对应关系。

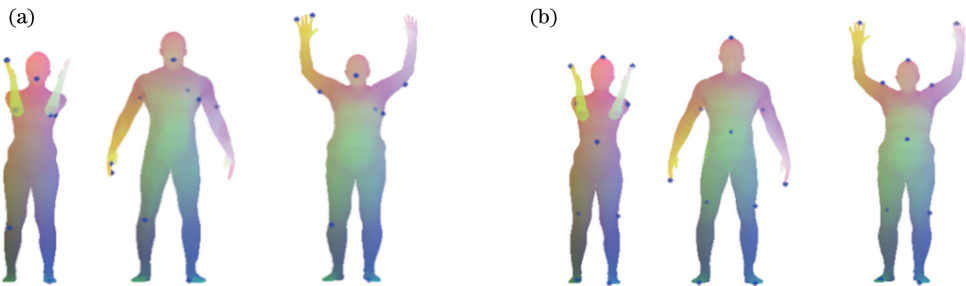


图2 采样点数为10的稀疏采样结果。(a)文献[20]的FPS算法;(b)所提算法

Fig. 2 Sparse sampling results for 10 sampling points. (a) FPS algorithm in Ref. [20]; (b) proposed algorithm

图3为采样点数目为1000,模型簇个数为5的稠密采样点分布情况。图3(a)给出文献[20]中FPS算法的采样点分布,当目标模型发生大尺度形变时,采样点发生偏移,不仅分布不均匀,而且在眼窝、指尖和脚尖等尖端点位置采样点聚集或严重重复。如图3(a)中的第3个人体模型的手臂位置采

样点全部集中到了手臂背部位置,这意味着该模型与另外4个模型构建对应关系时,手臂上必然会出现“一部分采样点存在一对多的映射关系,而一部分采样点无法匹配”的情形,这极大地降低了模型簇对应关系的正确率。图3(b)为所提算法DFPS的采样结果,可以看出,所提采样算法所获取的采样点分

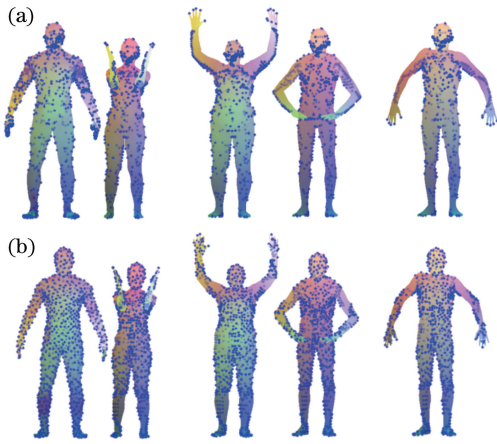


图3 采样点数为1000的稠密采样结果。

(a)文献[20]的FPS算法;(b)所提算法

Fig. 3 Dense sampling results for 1000 sampling points.

(a) FPS algorithm in Ref. [20]; (b) proposed algorithm

布更加均匀,覆盖面更加全面,并且在手指尖、脚尖等尖端位置采样点分布合理,这为模型簇的一致对应关系计算提供了准确的输入。

## 4 计算两两模型间函数映射关系

在引入函数映射方法<sup>[20-21]</sup>的基础上,利用最小二乘法求解得出最优函数映射矩阵,进而计算两两模型间的映射关系,为建立两两模型间的点到点映射与模型簇中各模型间一致对应关系提供必要准备。

给定两个三维网格模型  $M$  和  $N$ , 它们之间所建立的映射关系可以表示为源模型  $M$  与目标模型  $N$  的双向映射问题  $T: M \rightarrow N$ 。定义源模型  $M$  的标量函数  $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ , 通过映射  $T$  的复合变换函数  $g = f \circ T^{-1}$  可以在目标模型  $N$  上得到相应的标量函数  $g: N \rightarrow \mathbf{R}$ 。定义这一函数变换过程为  $T_F: F(M, \mathbf{R}) \rightarrow F(N, \mathbf{R})$ , 其中  $F(M, \mathbf{R})$  与  $F(N, \mathbf{R})$  分别表示源模型  $M$  和目标模型  $N$  的函数空间,  $T_F$  称为映射  $T$  的函数表示。

源模型  $M$  与目标模型  $N$  的初始映射关系  $T$  可以由映射函数  $T_F$  计算得出。对于目标模型  $N$  上的任意顶点  $y$ , 满足  $g(y) = f[T(y)]$ , 可以得出映射  $T$  是可逆的。因此, 对于任意点与点之间的映射  $T: M \rightarrow N$ , 映射函数  $T_F$  在函数空间中都是可以线性表示的。假设  $\{\boldsymbol{\varphi}_{r_M}\}$  是函数空间中源模型  $M$  的基函数, 其中  $\{\boldsymbol{\varphi}_{r_M}\}$  为源模型  $M$  的第  $r$  个特征向量, 使得源模型  $M$  的标量函数  $f: M \rightarrow \mathbf{R}$  满足基函数  $\{\boldsymbol{\varphi}_{r_M}\}$  下的线性函数集为  $f = \sum_r a_r T_F(\boldsymbol{\varphi}_{r_M})$ , 其中  $a_r$  表示第  $r$  个特征向量的特征系数, 则映射函数

$T_F(f)$  可以线性表示为

$$T_F(f) = T_F\left(\sum_r a_r \boldsymbol{\varphi}_{r_M}\right) = \sum_r a_r T_F(\boldsymbol{\varphi}_{r_M}). \quad (1)$$

若目标模型  $N$  存在一组含  $q$  个特征向量的基函数  $\{\boldsymbol{\varphi}_{q_N}\}$ , 那么对于函数映射矩阵  $C$  满足  $T_F\{\boldsymbol{\varphi}_{r_M}\} = \sum_q c_{rq} \{\boldsymbol{\varphi}_{q_N}\}$ , 其中  $c_{rq}$  为矩阵  $C$  的矩阵元。假设基函数  $\boldsymbol{\varphi}_{r_M}$  与  $\boldsymbol{\varphi}_{q_N}$  是正交的, 则  $c_{rq} = \langle T_F \boldsymbol{\varphi}_{r_M}, \boldsymbol{\varphi}_{q_N} \rangle$ 。如果源模型  $M$  的标量函数  $f$  可表示为一个系数向量  $\mathbf{e} = (e_0, e_1, \dots, e_r, \dots)$ , 则映射  $T_F$  就可以转化为映射矩阵  $C$ , 即

$$T_F(\mathbf{e}) = \mathbf{e}C. \quad (2)$$

因此, 通过映射矩阵  $C$  就能构建原始的映射关系  $T$ 。函数映射方法将复杂的模型间对应关系计算转化为函数映射矩阵  $C$  的计算, 通过优化映射矩阵  $C$  就可以获得精确的模型间对应关系。

通过最小二乘法获得最优的函数映射矩阵, 即  $C_{\text{opt}} = \underset{C}{\text{argmin}} \|\mathbf{C}\mathbf{F} - \mathbf{G}\|^2 + \lambda \|\mathbf{\Delta}_N \mathbf{C} - \mathbf{C}\mathbf{\Delta}_M\|^2$ , (3)

式中: 矩阵  $\mathbf{F}$ 、 $\mathbf{G}$  是以源模型  $M$  与目标模型  $N$  的基函数为列向量的基矩阵;  $\mathbf{\Delta}_M$  与  $\mathbf{\Delta}_N$  是源模型  $M$  与目标模型  $N$  的 Laplace-Beltrami 算子的对角矩阵;  $\lambda$  是权重值。

图4~6为所提算法与文献[21]算法分别对 FAUST 模型库中的人体模型, TOSCA 模型库中的马模型、狗模型所构建的映射关系结果。图4(a)显示了文献[21]利用函数映射方法建立一组马模型的函数映射结果, 可以明显地看出该组马模型在不同的区域有着相似的特征分布, 如在马腿上, 其映射分布过于相似, 对于后续建立点到点对应关系会产生错误的匹配。由于文献[21]单纯使用函数映射对模型建立对应关系, 因此需要大量的信息描述符来构建函数映射的基函数; 此外, 带有噪声的特征描述符会影响大尺度形变的模型间的映射关系。而图4(b)通过所提算法中的最小二乘法建立了最优映射矩阵, 所建立的映射关系结果明显优于文献[21]算法, 同一特征函数在该组模型上得到相同的特征分布, 不同部位有不同的映射结果与之区分, 这也为后续建立点到点对应关系提供了精准的映射关系。

同样地, 从图5(a)、6(a)可以看出, 由于模型自身对称性的影响, 文献[21]算法在模型的左右对称部件上产生了相似的映射结果, 如图5(a)中狗模型后爪爪尖、图6(a)中人体模型脚尖的位置等, 映射

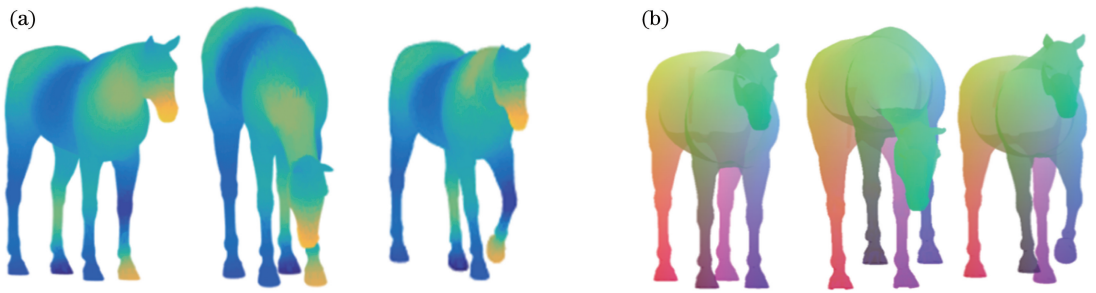


图 4 马模型集合的函数映射关系比较。(a)文献[21]的算法;(b)所提算法

Fig. 4 Comparison of function mapping relationships for horse model cluster. (a) Algorithm in Ref. [21]; (b) proposed algorithm

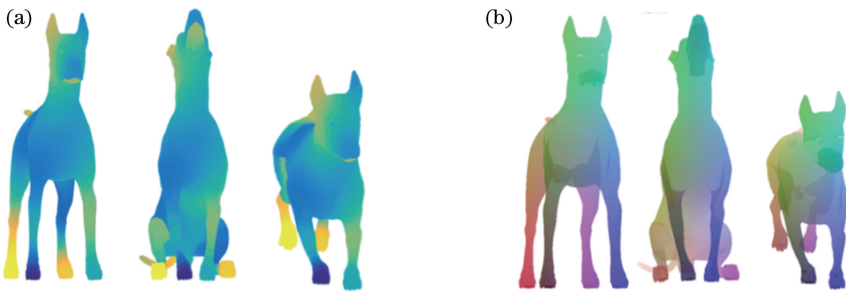


图 5 狗模型集合的函数映射关系比较。(a)文献[21]的算法;(b)所提算法

Fig. 5 Comparison of function mapping relationships for dog model cluster. (a) Algorithm in Ref. [21]; (b) proposed algorithm

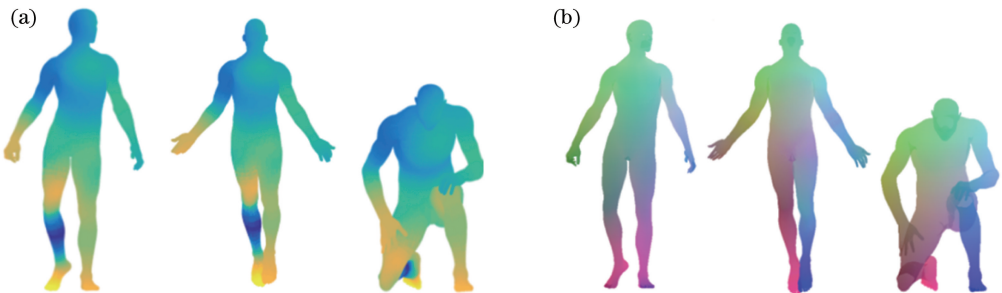


图 6 人体模型集合的函数映射关系比较。(a)文献[21]的算法;(b)所提算法

Fig. 6 Comparison of function mapping relationships for human model cluster. (a) Algorithm in Ref. [21]; (b) proposed algorithm

分布过于相似,对后续的点点对应将产生错误的映射结果。而所提算法得到了较好的映射结果,如图 5(b)的狗模型的两只前爪、图 6(b)的人体模型的双脚等部件都有着不同的映射分布,对后续构建点到点的对应关系预先过滤了一部分因模型对称性而产生的错误匹配。

## 5 构建两两模型间点到点的初始对应关系

为了更加直观地显示出两两模型间的对应关系,基于第 4 节建立的源模型与目标模型间的函数

映射关系,结合  $K$  近邻搜索算法,构建源模型与目标模型间点到点的初始对应关系,为计算模型簇中各模型间的一致对应关系提供准确的输入数据。

对源模型  $M$  和目标模型  $N$  进行了特征点采样后,获得源模型  $M$  的采样点集  $I_M$ ,利用该采样点集中每一个顶点的特征函数,在目标模型  $N$  的所有顶点中遍历搜寻以计算出最优的匹配点与之对应。因此,点到点匹配问题实际是一个  $K$  近邻搜索的问题,以寻找特征空间中  $K$  个最相似特征点。由于  $K$  近邻搜索算法是一种可以分类搜索数据的算法,主要应用于多维空间数据的搜索与分类,因此本文引入了  $K$  近邻算法寻找最佳匹配采样点。该方法的

具体步骤如下:

Step1 假设源模型  $M$  与目标模型  $N$  的基矩阵分别为  $\mathbf{A}_M$  和  $\mathbf{B}_N$ 。对源模型  $M$  进行 DFPS 算法采样得到采样点集  $I_M$ , 再根据采样点数目构建基矩阵  $\mathbf{A}_M$  的子矩阵  $\mathbf{E}_1$ , 其中每行中的元素表示采样点集  $I_M$  中的采样点, 每个列向量的元素表示每一顶点的特征向量。

Step2 利用第 4 节函数映射理论的(3)式计算源模型  $M$  与目标模型  $N$  的函数映射矩阵  $\mathbf{C}$ 。

Step3 利用目标模型  $N$  的基矩阵  $\mathbf{B}_N$  与函数映射矩阵  $\mathbf{C}$  构建一个搜索数据集  $\mathbf{V} = \mathbf{B}_N \mathbf{C}$ , 并在数据集  $\mathbf{V}$  中通过最临近搜索函数(knnsearch)搜寻子基矩阵  $\mathbf{E}_1$  中每个顶点的最佳匹配点, 即

$$\mathbf{R}_{\text{opt}} = \text{knnsearch}_{\text{closepoint}}(\mathbf{V}, \mathbf{E}_1)。 \quad (4)$$

Step4 利用  $\mathbf{R}_{\text{opt}}$  中获得的点集构建目标模型  $N$  基矩阵  $\mathbf{B}_N$  的子矩阵  $\mathbf{E}_2$ , 其中每个列向量表示每一对应点的特征向量, 其数目和给定的采样点集  $I_M$  中的采样点数目一致。

Step5 如果满足  $\|\mathbf{E}_2^T / \mathbf{E}_1^T\| < 1$ , 则  $\mathbf{R}_{\text{opt}}$  中的点为最佳匹配点, 否则重复 Step2, 继续寻找匹配点。

因此, 通过函数映射与  $K$  近邻搜索算法可以获得两两模型间初始的点到点对应关系。

## 6 模型簇的一致对应关系计算

为了将多组两两模型间的点到点映射转化成模型簇的点到点一致映射, 采用循环一致性约束来计算模型簇中各模型间的一致对应关系。

定义模型簇是由  $n$  个三维模型组成的集合  $S = \{S_1, S_2, \dots, S_w, \dots, S_n\}$ , 其中  $S_w$  为第  $w$  个模型; 两两模型间的第  $v$  条多路对应关系为  $\gamma_v$ 。对该集合作笛卡尔积运算  $S \times S$ , 得到集合  $S$  中所有存在的多路对应关系组合, 用  $\Gamma$  表示, 其中  $\gamma_v \in \Gamma$ , 则  $n$  个模型间的多路对应关系应满足以下循环一致性约束条件:

1) 对于源模型与目标模型, 存在不相似部件间的匹配(例如模型簇中人体模型与半人马模型存在不相似的部件);

2) 对于每一个模型  $S_w \in S$  和每一个顶点  $p \in S_w$ , 至少存在一个多路对应关系  $\gamma_v \in \Gamma$ , 使得  $p \in \gamma_v$ 。

3) 对于集合  $S = \{S_w\}_{w=1}^n$ , 有任意顶点  $p_{j,k,l}$ , 其中  $j, k, l$  为顶点数。模型簇的多路对应关系  $\Gamma$  满足循环一致性, 即当  $\Gamma$  满足从  $p_j \in S_j$  到  $p_k \in S_k$  的对应匹配, 又满足从  $p_k \in S_k$  到  $p_l \in S_l$  的对应匹

配时, 则  $\Gamma$  也满足  $p_j$  到  $p_l$  的对应匹配。

4) 如果点  $p \in \gamma_m$  且  $p \in \gamma_n$ , 则定义多路对应关系不相容。

通过循环一致性约束可以将多个两两模型的点到点映射关系转化为模型簇中各模型间的点到点一致映射关系, 并且通过约束条件可以过滤错误对应关系, 提高了构建模型簇的多路对应关系的准确率。

## 7 实验结果与分析

本算法采用 Microsoft Visual Studio 2012 与 Matlab2016a 混合编程实现, 实验中选择 FAUST、TOSCA 和 SCAPE 三个模型库中的不同三维模型来验证本算法的稳健性, 并与文献[20]的算法进行比较, 图中实线表示正确的对应关系, 虚线表示错误的对应关系。另外, Laplace-Beltrami 算子的特征向量的数量取值为 100, 特征点的采样个数取值分别为 10, 200, 1000, 建立模型簇由稀疏到稠密的对应关系。

图 7、图 8 为采样点数目为 10 的模型稀疏对应关系的结果对比。文献[20]采用 FPS 采样算法获取特征采样点, 由于该算法主要基于高斯曲率来获取特征采样点, 故在模型的尖端位置产生了采样重叠的情况, 导致模型簇对应关系的计算出现了一对多的错误映射, 如图 7(a)所示, 源模型的猫左爪位置出现了一对多的错误映射。而从图 7(b)可以看出, 所提算法利用 DFPS 算法获取的特征采样点更为全面, 减少了由重叠采样而产生的错误映射, 并结合函数映射与  $K$  近邻搜索算法, 更加有效地解决了模型自身对称性影响对应关系计算的问题, 而且使用了循环一致性约束, 有助于模型簇的匹配, 可以计算得到正确的稀疏对应关系。如图 8(a)所示, 狗模型的点到点映射结果可以看出文献[20]算法中第二只狗模型的左后腿位置上出现了函数映射分布不一致的情况, 由于该算法缺少了对模型簇对应关系的一致约束条件, 因此无法过滤从后爪尖到第一只狗模型的嘴巴和第二只狗模型的后大腿上的错误映射, 而所提算法在函数映射的基础上, 结合  $K$  近邻搜索算法, 构建了两两模型间的点到点映射, 并在循环一致性约束条件下得到了多个模型间的多路一致对应关系。映射关系不仅分布较为均匀, 而且正确率高。图 9 是包括 4 个不同姿态马模型的集合的一致对应关系比较, 采样点数目为 200。文献[20]的匹配出现一对多错误匹配, 如图 9(a)所示, 第一个马模型的左前腿, 在同一点出现了两条映射路线, 一

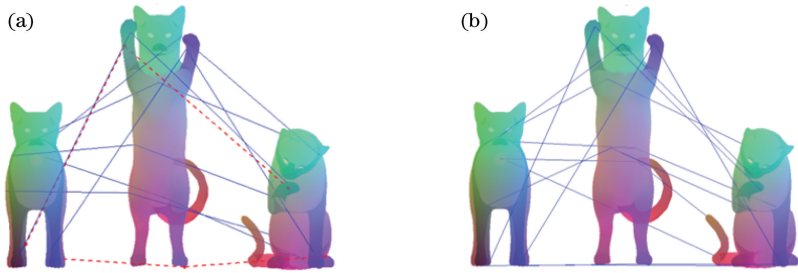


图 7 猫模型集合的稀疏对应关系比较。(a)文献[20]的算法;(b)所提算法

Fig. 7 Comparison of sparse correspondences for cat model cluster. (a) Algorithm in Ref. [20]; (b) proposed algorithm

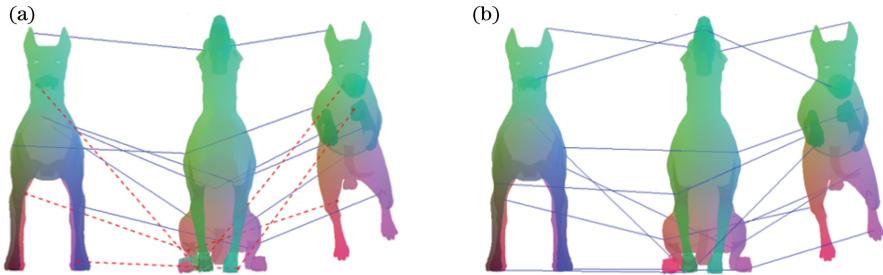


图 8 狗模型集合的稀疏对应关系比较。(a)文献[20]的算法;(b)所提算法

Fig. 8 Comparison of sparse correspondences for dog model cluster. (a) Algorithm in Ref. [20]; (b) proposed algorithm

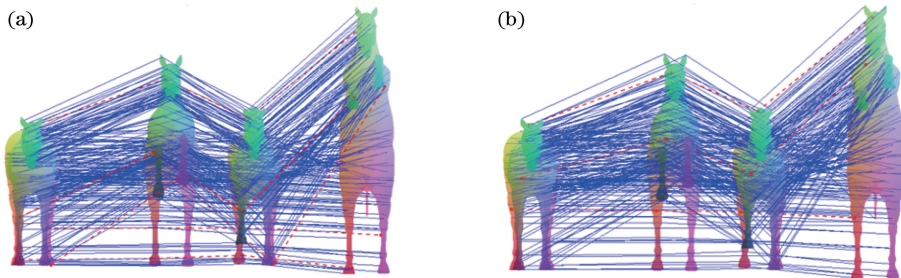


图 9 马模型集合的稠密对应关系比较。(a)文献[20]的算法;(b)所提算法

Fig. 9 Comparison of dense correspondences for horse model cluster. (a) Algorithm in Ref. [20]; (b) proposed algorithm

条是正确的映射,用实线标注,另一条是错误的映射,用虚线标注。所提算法通过函数映射与循环一致性约束所建立的多路一致对应关系,可以极大地减少一对多的错误映射,结果明显优于文献[20]算法。图 10 为 5 个人体模型的集合所建立的稠密对应关系比较,每个模型的采样点数目为 1000。文献[20]算法在人体模型的手指尖位置,存在严重的一对多错误映射,此外,在模型的面部位置也存在错误的映射关系,如图 10(a)所示。而所提算法构建的多路点到点一致对应关系的分布更为均匀,并且通过循环一致性约束,可以过滤大量一对多的错误映射,如图 10(b)所示。

表 1 为所提算法与文献[20]算法在计算对应关系时的测地错误对比,测地错误越小,表示模型集合的一致对应关系的正确率越高。可以明显看出,对于不同数据库中的模型集合,所提算法都能有效降

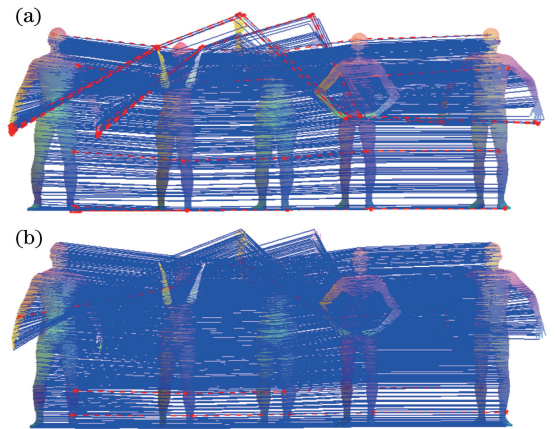


图 10 人体模型集合的稠密对应关系比较。

(a)文献[20]的算法;(b)所提算法

Fig. 10 Comparison of dense correspondences for human model cluster. (a) Algorithm in Ref. [20]; (b) proposed algorithm



表 1 模型间对应关系的测地错误比较

Table 1 Comparison of geodesic errors for correspondence between models

Types of three-dimensional model	Sparse correspondence (100 vertices)		Dense correspondence (1000 vertices)	
	Proposed algorithm	Algorithm of Ref. [20]	Proposed algorithm	Algorithm of Ref. [20]
Horse	0.015	0.026	0.024	0.426
Human (FAUST)	0.016	0.028	0.015	0.028
Dog	0.020	0.024	0.027	0.306
Human (TOSCA)	0.011	0.015	0.040	0.386
Cat	0.016	0.018	0.060	0.482
Gorilla	0.013	0.016	0.015	0.203
Human (SCAPE)	0.009	0.015	0.090	0.101

低对应关系的测地错误率。在计算稀疏对应关系时,所提算法与文献[20]算法都存在较小的测地错误率;而在计算稠密对应关系时,所提算法可以过滤大多数一对多的错误映射,有效地降低了测地错误率,效果明显优于文献[20]算法。

表 2 为所提算法与文献[20]算法的执行时间比较。在硬件条件(ThinkPad E420)与软件条件(Matlab R2016b、VS 2012)相同的情况下,由表 2 可以看出,对于不同数据库中的模型集合,所提算法耗费的时间均小于文献[20]。

表 2 算法执行时间比较

Table 2 Comparison of execution time for algorithms

Type of three-dimensional model	Sparse correspondence (100 vertices)		Dense correspondence (1000 vertices)	
	Proposed algorithm	Algorithm in Ref. [20]	Proposed algorithm	Algorithm in Ref. [20]
Horse	36.156	37.232	43.603	46.130
Human (FAUST)	41.547	42.475	58.980	59.128
Dog	24.341	24.453	47.359	48.128
Human (TOSCA)	38.468	38.503	49.345	51.342
Cat	26.680	28.895	44.396	46.987
Gorilla	21.395	22.670	39.587	41.245
Human (SCAPE)	32.654	34.923	58.432	61.361

图 11 为利用所提算法构建的残缺模型簇的对应关系。可以看出所提算法所建立的映射关系分布相对一致,所建立的一致对应关系较为准确,说明本文结合函数映射理论与循环一致性约束的三维模型

簇对应关系计算方法有着良好的适用性。但是,由于残缺模型缺失了很多表面信息,在残缺边缘位置源模型与目标模型的映射关系分布出现了差异,存在不正确的对应关系。

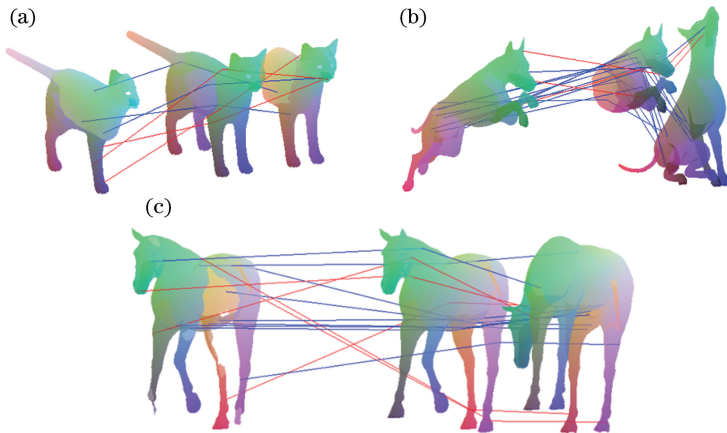


图 11 残缺模型簇的对应关系比较。(a)猫模型;(b)狗模型;(c)马模型

Fig. 11 Comparison of correspondences for incomplete model clusters.

(a) Cat model; (b) dog model; (c) horse model

## 8 结 论

基于 DFPS 采样算法、函数映射理论与循环一致性约束,提出计算三维模型簇对应关系的新方法。利用 DFPS 采样算法对模型簇进行特征点采样,结合函数映射理论与  $K$  近邻搜索算法建立两个模型间的点到点映射,通过循环一致性约束建立模型簇的多路一致对应关系。实验结果表明,所提算法与文献[20]算法相比,在基本没有增加时间开销的基础上,有效降低了模型簇对应关系的测地错误率,提高了三维模型簇一致对应关系的正确率。然而,所提算法也存在一些不足之处。一方面,计算函数映射矩阵时要手动调节参数,需要对其进行进一步优化,希望可以达到自适应获取参数的目的;另一方面,对于存在残缺部件或表面孔洞的三维模型簇,所提算法所构建的一致对应关系正确率不高。以上这些问题也是今后需要继续研究与改进的方面。

## 参 考 文 献

- [1] Li R Z, Liu Y Y, Yang M, *et al.* Three-dimensional point cloud segmentation algorithm based on improved region growing [J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2018, 55(5): 051502.  
李仁忠, 刘阳阳, 杨曼, 等. 基于改进的区域生长三维点云分割[J]. *激光与光电子学进展*, 2018, 55(5): 051502.
- [2] Huang Q X, Guibas L. Consistent shape maps via semidefinite programming [J]. *Computer Graphics Forum*, 2013, 32(5): 177-186.
- [3] Pachauri D, Kondor R, Singh V. Solving the multi-way matching problem by permutation synchronization[J]. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 2013: 1860-1868.
- [4] Ovsjanikov M, Corman E, Bronstein M, *et al.* Computing and processing correspondences with functional maps[C]//SIGGRAPH Asia, [S. l. : S. n.], 2016: 9-71.
- [5] Eynard D, Rodola E, Glashoff K, *et al.* Coupled functional maps [C] // 2016 Fourth International Conference on 3D Vision (3DV), October 25-28, 2016, Stanford, CA, USA. New York: IEEE, 2016: 399-407.
- [6] Zhang Z, Xu H L, Yin H. A fast point cloud registration algorithm based on key point selection [J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2017, 54(12): 121002.

- 张哲, 许宏丽, 尹辉. 一种基于关键点选择的快速点云配准算法[J]. *激光与光电子学进展*, 2017, 54(12): 121002.
- [7] Aflalo Y, Dubrovina A, Kimmel R. Spectral generalized multi-dimensional scaling [J]. *International Journal of Computer Vision*, 2016, 118(3): 380-392.
- [8] Ovsjanikov M, Mérigot Q, Mémoli F, *et al.* One point isometric matching with the heat kernel [J]. *Computer Graphics Forum*, 2010, 29(5): 1555-1564.
- [9] Vestner M, Litman R, Rodolà E, *et al.* Product manifold filter: Non-rigid shape correspondence via kernel density estimation in the product space[C]//2017 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), July 21-26, 2017, Honolulu, HI, USA. New York: IEEE, 2017: 6681-6690.
- [10] Ovsjanikov M, Ben-Chen M, Solomon J, *et al.* Functional maps: A flexible representation of maps between shapes[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2012, 31(4): 1-11.
- [11] Corman É, Ovsjanikov M, Chambolle A. Supervised descriptor learning for non-rigid shape matching [C]//Corman É, Ovsjanikov M, Chambolle A. eds. *Computer Vision - ECCV 2014 Workshops*. Cham: Springer International Publishing, 2015: 283-298.
- [12] Xiong F G, Huo W, Han X, *et al.* Removal method of mismatching keypoints in 3D point cloud[J]. *Acta Optica Sinica*, 2018, 38(2): 0210003.  
熊风光, 霍旺, 韩燮, 等. 三维点云中关键点误匹配剔除方法[J]. *光学学报*, 2018, 38(2): 0210003.
- [13] Maron H, Dym N, Kezurer I, *et al.* Point registration via efficient convex relaxation[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2016, 35(4): 73-85.
- [14] Nogneng D, Melzi S, Rodolà E, *et al.* Improved functional mappings via product preservation [J]. *Computer Graphics Forum*, 2018, 37(2): 179-190.
- [15] Huang Q X, Wang F, Guibas L. Functional map networks for analyzing and exploring large shape collections [J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2014, 33(4): 1-11.
- [16] Sahillioglu Y, Yemez Y. Multiple shape correspondence by dynamic programming [J]. *Computer Graphics Forum*, 2014, 33(7): 121-130.
- [17] Cosmo L, Rodolà E, Albarelli A, *et al.* Consistent partial matching of shape collections via sparse modeling[J]. *Computer Graphics Forum*, 2017, 36

- (1): 209-221.
- [18] Kamousi P, Lazard S, Maheshwari A, *et al.* Analysis of farthest point sampling for approximating geodesics in a graph[J]. Computational Geometry, 2016, 57: 1-7.
- [19] Dijkstra E W. A note on two problems in connexion with graphs[J]. Numerische Mathematik, 1959, 1 (1): 269-271.
- [20] Rodolà E, Moeller M, Cremers D. Regularized pointwise map recovery from functional correspondence [EB/OL]. (2015-06-18) [2018-10-01]. <https://arxiv.org/abs/1506.05603v1>.
- [21] Nogneng D, Ovsjanikov M. Informative descriptor preservation via commutativity for shape matching [J]. Computer Graphics Forum, 2017, 36(2): 259-267.