

振幅阻尼通道中两个三能级原子系统的可提纯性演化

黄江, 师文庆, 徐国保*

广东海洋大学电子与信息工程学院, 广东 湛江 524088

摘要 研究了振幅阻尼通道中两个三能级原子系统的可提纯性演化现象。结果表明,自由纠缠态保持时间比束缚纠缠态的更长,与以前的研究结果相比存在较大差异。自由纠缠态直接演化至可分离态,所提模型中未出现可提纯性猝死现象。

关键词 光通信; 可提纯性演化; 三能级原子; 凸线性组合; 振幅阻尼

中图分类号 O436 **文献标识码** A

doi: 10.3788/LOP56.070601

Distillability Evolution of Qutrit-Qutrit Systems in Amplitude Damping Channels

Huang Jiang, Shi Wenqing, Xu Guobao*

*College of Electronics and Information Engineering, Guangdong Ocean University,
Zhanjiang, Guangdong 524088, China*

Abstract The distillability evolution of qutrit-qutrit systems in an amplitude damping channel is investigated. The research results show that the lasting time of free entangled states is longer than that of bound entangled states, which is quite different from the former results. The free entangled states evolve to the separable states directly, and the sudden death phenomenon of distillability is not observed in the proposed model.

Key words optical communications; distillability evolution; qutrit; convex linear combination; amplitude damping

OCIS codes 060.5565; 060.4785; 060.2920; 060.5060

1 引言

量子纠缠^[1-2]作为一种承载量子信息的重要资源得到了研究者的广泛关注。众所周知,真实的量子系统均不可避免地与环境相互作用而导致退相干。因此,深入研究开放系统量子纠缠的动力学演化过程具有重要意义。Yu 等^[3-5]发现不同类型的退相干下,两量子比特系统中的纠缠会在有限时间内消失,此现象称为纠缠猝死。显然,纠缠猝死会严重影响纠缠态在量子信息处理中的应用。随后的研究表明,纠缠猝死现象在三能级原

子及四能级原子系统中亦会发生^[6-8],并在实验中得到了验证。最近,一些研究指出^[9-10],高维的两体纠缠态可以分为自由纠缠态和束缚纠缠态两类。自由纠缠态可以在局域操作和经典通信中提取出来,这在量子信息处理中很有应用前景。而束缚纠缠态无论通过何种局域操作都不可提取,故束缚纠缠态目前很难应用于量子信息处理。类似于纠缠猝死的定义,如果初始的自由纠缠态在退相干的影响下转变为束缚纠缠态,则称此过程为可提纯性猝死^[9]。目前已经有部分相关的研究工作,如 Song 等^[9]研究了在局域退相干噪声通道

收稿日期: 2018-09-01; **修回日期:** 2018-10-16; **录用日期:** 2018-10-22

基金项目: 广东省自然科学基金(2015A030310354)、广东海洋大学创新强校项目(GDOU2017052504、GDOU2015050207)、广东海洋大学优秀青年骨干教师项目(HDYQ2017005)、广东海洋大学南海青年学者项目、广东省高校特色创新项目(Q18267)

* **E-mail:** xuguobao@126.com

中两个三能级原子系统的可提纯性猝死,并提出了几种抑制可提纯性猝死的方案;Ali^[10-12]讨论了共同库中多局域退相位和振幅阻尼通道中的可提纯性猝死现象;Huang等^[13]研究了原子系统可提纯性的流向问题,得到了原子系统与环境系统可提纯性相互交换的结论;Khan等^[14]解决了去极化噪声通道中两个三能级原子系统的可提纯性演化问题。

在一段时间内,研究者们认为可提纯性现象只能在 Horodecki 态^[10,12,15-16]中出现。因此,目前对可提纯性的研究工作均建立在 Horodecki 态的基础上。本文研究发现在凸线性组合态^[14]中不仅会出现可提纯性问题,还会出现一些较为有趣的可提纯性演化现象。通过建立相应的模型,计算时间演化密度矩阵;详细讨论凸线性组合态的可提纯性演化特征,并与以前的研究工作进行对比,说明两者的异同。

2 在振幅阻尼通道中凸线性组合态的动力学演化

考虑在振幅阻尼通道中两个 V-型的三能级原子 A 和 B。假设 A 和 B 彼此相距甚远,两者之间没有相互作用,只与各自的独立库相互作用。V-型原子的结构图如图 1 所示。

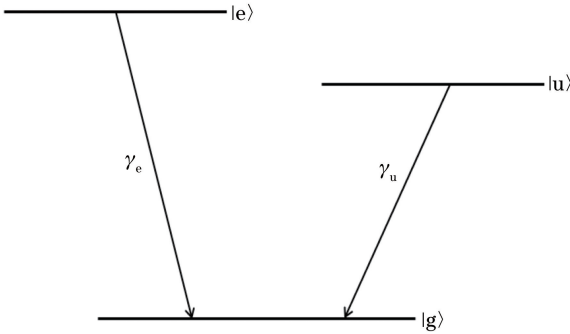


图 1 V-型三能级原子结构示意图

Fig. 1 Structural diagram of three-level atom with V-configuration

分别用 $|e\rangle$ 、 $|u\rangle$ 和 $|g\rangle$ 表示两个非简并的激发态和基态,其对应的跃迁频率分别为 ω_1 、 ω_2 。同时,两个激发态之间的跃迁是禁止的。系统的时间演化主方程可以表述为^[14,17]

$$\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} = (L_A + L_B)\boldsymbol{\rho}, \quad (1)$$

式中 $\boldsymbol{\rho}$ 为系统的密度矩阵; t 为演化时间; $L_A\boldsymbol{\rho}$ 和 $L_B\boldsymbol{\rho}$ 分别为

$$L_A\boldsymbol{\rho} = \frac{\gamma_e}{2}(2\sigma_{ge}^A\boldsymbol{\rho}\sigma_{eg}^A - \sigma_{ee}^A\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}\sigma_{ee}^A) + \frac{\gamma_u}{2}(2\sigma_{gu}^A\boldsymbol{\rho}\sigma_{ug}^A - \sigma_{uu}^A\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}\sigma_{uu}^A), \quad (2)$$

$$L_B\boldsymbol{\rho} = \frac{\gamma_e}{2}(2\sigma_{ge}^B\boldsymbol{\rho}\sigma_{eg}^B - \sigma_{ee}^B\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}\sigma_{ee}^B) + \frac{\gamma_u}{2}(2\sigma_{gu}^B\boldsymbol{\rho}\sigma_{ug}^B - \sigma_{uu}^B\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}\sigma_{uu}^B), \quad (3)$$

式中: g 、 e 、 u 分别表示原子的基态、第一激发态和第二激发态; γ_e 、 γ_u 分别为 A、B 原子从激发态 $|e\rangle$ 、 $|u\rangle$ 跃迁至 $|g\rangle$ 态的自发衰减率;原子的转移算符 $\sigma_{ij} = |i\rangle\langle j|$ 表示原子从 $|j\rangle$ 态转移至 $|i\rangle$ 态。用 $|2\rangle$ 、 $|1\rangle$ 和 $|0\rangle$ 分别表示三能级原子的第 2、1 激发态和基态,并且选择在如下基矢中展开 $\{|22\rangle, |21\rangle, |20\rangle, |12\rangle, |11\rangle, |10\rangle, |02\rangle, |01\rangle, |00\rangle\}$ 。利用 $\langle ij|\boldsymbol{\rho}|ij\rangle$ 操作计算任意初始密度矩阵元的时间演化情况。由于矩阵元项数较多,现只给出不为 0 的矩阵元为

$$\rho_{11}(t) = \rho_{11} \exp(-2\gamma_e t), \quad (4)$$

$$\rho_{15}(t) = \rho_{15} \exp[-(\gamma_e + \gamma_u)t], \quad (5)$$

$$\rho_{19}(t) = \rho_{19} \exp(-\gamma_e t), \quad (6)$$

$$\rho_{22}(t) = \rho_{22} \exp[-(\gamma_e + \gamma_u)t], \quad (7)$$

$$\rho_{28}(t) = \rho_{28} \exp[-\frac{1}{2}(\gamma_e + 2\gamma_u)t], \quad (8)$$

$$\rho_{33}(t) = [\rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{33}] \cdot \exp[-\gamma_e t] - \rho_{11}(t) - \rho_{22}(t), \quad (9)$$

$$\rho_{37}(t) = \rho_{37} \exp(-2\gamma_e t), \quad (10)$$

$$\rho_{44}(t) = \rho_{44} \exp[-(\gamma_e + \gamma_u)t], \quad (11)$$

$$\rho_{51}(t) = \rho_{51} \exp[-(\gamma_e + \gamma_u)t], \quad (12)$$

$$\rho_{55}(t) = \rho_{55} \exp(-2\gamma_u t), \quad (13)$$

$$\rho_{59}(t) = \rho_{59} \exp(-\gamma_u t), \quad (14)$$

$$\rho_{66}(t) = [\rho_{44} + \rho_{55} + \rho_{66}] \cdot \exp(-\gamma_u t) - \rho_{44}(t) - \rho_{55}(t), \quad (15)$$

$$\rho_{73}(t) = \rho_{73} \exp(-\gamma_e t), \quad (16)$$

$$\rho_{77}(t) = [\rho_{11} + \rho_{44} + \rho_{77}] \cdot \exp(-\gamma_e t) - \rho_{11}(t) - \rho_{44}(t), \quad (17)$$

$$\rho_{82}(t) = \rho_{82} \exp[-\frac{1}{2}(\gamma_e + 2\gamma_u)t], \quad (18)$$

$$\rho_{88}(t) = [\rho_{22} + \rho_{55} + \rho_{88}] \cdot \exp(-\gamma_u t) - \rho_{22}(t) - \rho_{55}(t), \quad (19)$$

$$\rho_{91}(t) = \rho_{91} \exp(-\gamma_e t), \quad (20)$$

$$\rho_{95}(t) = \rho_{95} \exp(-\gamma_u t), \quad (21)$$

$$\rho_{99}(t) = 1 + \rho_{55} \exp(-2\gamma_e t) + [Q_1(t) + Q_2(t) - Q_3(t) - Q_4(t)], \quad (22)$$

式中

$$Q_1(t) = \exp[-2(\gamma_e + \gamma_u)t] + \rho_{11} \exp(2\gamma_u t), \quad (23)$$

$$Q_2(t) = (\rho_{22} + \rho_{44}) \exp[(\gamma_e + \gamma_u)t], \quad (24)$$

$$Q_3(t) = (2\rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{33} + \rho_{44} + \rho_{77}) \exp[(\gamma_e + 2\gamma_u)t], \quad (25)$$

$$Q_4(t) = (\rho_{22} + \rho_{44} + 2\rho_{55} + \rho_{66} + \rho_{88}) \exp[(2\gamma_e + \gamma_u)t], \quad (26)$$

式中 t 为时间。

3 凸线性组合态的可提纯性演化

凸线性组合态^[14-15,18]由两类纠缠态通过线性组合得到,其中一个为 Horodecki 态,而另一个为具有相同维度的量子态。两者的组合权重分别为 p 和 $1-p$,其中 $p \in [0.5, 1]$ 。凸线性组合态的基本性质见文献[14,15,18]。考虑此类凸线性组合态为

$$\rho_p = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4p-2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4p-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4p-2 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4p-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

自由和束缚纠缠态的区分在文献[10,11]中已经有详细的讨论,因此不再赘述,直接应用其结论。由文献[18]知,除了 $p=0.5$ 外, ρ_p 均为自由纠缠态。通过以上矩阵元很容易地确定这些状态的时间演化。值得注意的是,需要适当的方法度量两个三能级原子系统的纠缠,其中较为成熟的方法是负度^[19],可将一个密度矩阵部分转置后求本征值。如果负度为 0,则认为自由纠缠态衰减完毕。同时,需要借助于重排定则^[10]: $\|\rho^R\| - 1$ 可协助判断在自由纠缠态演化期间是否存在束缚纠缠态,式中的 R 为重排操作。

对时间演化的密度矩阵 ρ_p 作部分转置,可以求得 3 个可能的负本征值。负度可以计算为

$$N[\rho_p(t)] = \max[0, -\lambda_1] + \max[0, -\lambda_2] + \max[0, -\lambda_3], \quad (28)$$

式中 $\lambda_i (i=1,2,3)$ 为可能的负本征值。然而,这些本征值的表达式过于复杂,并且彼此关联,因此不写其具体表达形式,只做数值计算。理论上, p 可以取 $[0.5, 1]$ 区间的任意值,而且得到的结果具有一致性。然而,在实际计算过程中,部分取值无法明显反映结论。当 $p=0.7$ 时,凸线性组合态的负度与重排定则的时间演化行为能够更加直观地在图像中显示,并且在图像的生成、处理及结果表述等方面较为便捷,故取 $p=0.7$ 。负度与重排定则的演化行为如图 2 所示。演化结果表明,在振幅阻尼通道中,重排

定则在时间衰减因子 $\gamma t = 1.078$ 时趋于 0,这意味着束缚纠缠态在此时刻衰减为分离态。然而,负度的演化行为显示在 $\gamma t = 6.652$ 时系统的自由纠缠态消失。由此可以得到自由纠缠态保持的时间较束缚纠缠态更加长久的结论,这表明在本文模型中自由纠缠态直接衰减至分离态。系统从可提纯态演化至不可提纯态,没有经历可提纯性猝死,而仅仅经历自由纠缠猝死。

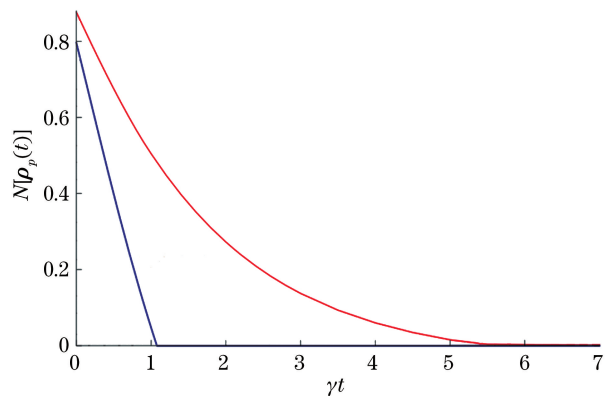


图 2 负度 $N[\rho_p(t)]$ 和重排定则 $\|\rho^R\| - 1$ 在 $p=0.7$ 时的演化曲线

Fig. 2 Evolution curves of negativity $N[\rho_p(t)]$ and realignment criterion $\|\rho^R\| - 1$ at $p=0.7$

所研究结果与文献[11]的结论有着较大不同,主要表现在:1) 文献[11]的结果表明,在 $\alpha = 4.2$ 时,初始的自由纠缠态演化为束缚纠缠态,系统出现

可提纯性猝死现象。而本文证明了初始的自由纠缠态直接衰减至分离态,系统不发生可提纯性猝死; 2) 本文中的参数 p 与文献[11]中的 α 所表示的物理意义一致,但 α 是一个敏感参数,对重排定则的影响较大^[11]。为了作进一步的对比,图 3 绘制了重排定则 $\|\rho^R\| - 1$ 与 p 的演化关系,其演化规律表明,对于不同的 p 而言,重排定则的值变化不大,为一个非敏感参数。

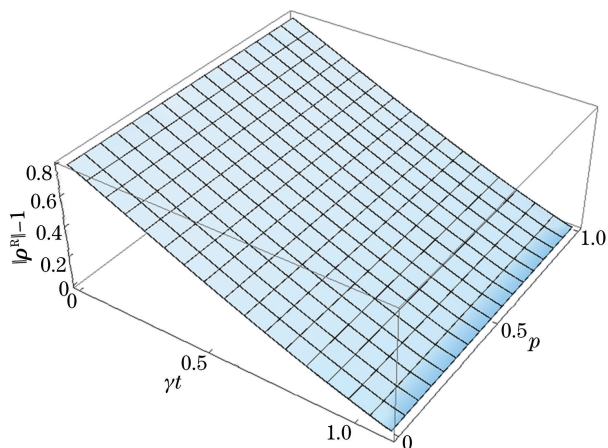


图 3 重排定则 $\|\rho^R\| - 1$ 与衰减参数 γt 及 p 的演化曲线
Fig. 3 Realignment criterion $\|\rho^R\| - 1$ versus decaying parameters γt and p

4 结 论

研究了凸线性组合态在振幅阻尼通道中的可提纯性纠缠演化。借助于负度和重排定则的度量方法,发现在凸线性组合态条件下,系统演化规律与以前工作有很大的不同。束缚纠缠态比自由纠缠态消失得更早些,因此不存在可提纯性猝死现象。自由纠缠态直接转变成为分离态,系统出现自由纠缠猝死现象。此外,通过讨论得知,在本模型中参数 p 为一个非敏感参数。在此,不仅证明了在凸线性组合系统中仍存在可提纯性纠缠,而且深入讨论了其演化特征。本文扩大了对可提纯性纠缠的研究,丰富了可提纯性纠缠理论,具有较为重要的理论意义。

参 考 文 献

[1] Horodecki R, Horodecki P, Horodecki M, *et al.* Quantum entanglement [J]. *Reviews of Modern Physics*, 2009, 81(2): 865-942.
[2] Gühne O, Tóth G. Entanglement detection [J]. *Physics Reports*, 2009, 474(1/2/3/4/5/6): 1-75.
[3] Yu T, Eberly J H. Phonon decoherence of quantum entanglement: robust and fragile states[J]. *Physical*

Review B, 2002, 66(19): 193306.

- [4] Yu T, Eberly J H. Qubit disentanglement and decoherence via dephasing [J]. *Physical Review B*, 2003, 68(16): 165322.
[5] Yu T, Eberly J H. Finite-time disentanglement via spontaneous emission [J]. *Physical Review Letters*, 2004, 93(14): 140404.
[6] Ali M, Alber G, Rau A R P. Manipulating entanglement sudden death of two-qubit X-states in zero- and finite-temperature reservoirs[J]. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 2008, 42(2): 025501.
[7] Ann K, Jaeger G. Local-dephasing-induced entanglement sudden death in two-component finite-dimensional systems[J]. *Physical Review A*, 2007, 76(4): 044101.
[8] Li P, Zhang Q, You J Q. Dividing two-qubit Hilbert space via abrupt and asymptotic disentanglement[J]. *Physical Review A*, 2009, 79(1): 014303.
[9] Song W, Chen L, Zhu S L. Sudden death of distillability in qutrit-qutrit systems [J]. *Physical Review A*, 2009, 80(1): 012331.
[10] Ali M. Distillability sudden death in qutrit-qutrit systems under global and multilocal dephasing [J]. *Physical Review A*, 2010, 81(4): 042303.
[11] Ali M. Distillability sudden death in qutrit-qutrit systems under amplitude damping [J]. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 2010, 43(4): 045504.
[12] Ali M. Comments on “distillability sudden death in qutrit: qutrit systems under thermal reservoirs” [J]. *Chinese Physics B*, 2014, 23(9): 090306.
[13] Huang J, Ali M. Distillability sudden birth of entanglement for qutrit-qutrit systems [J]. *Chinese Physics Letters*, 2014, 31(11): 110301.
[14] Khan S, Khan M K. Nondistillability of distillable qutrit-qutrit states under depolarising noise [J]. *Journal of Modern Optics*, 2011, 58(11): 918-923.
[15] Huang J. Distillability sudden death in qutrit-qutrit systems [J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2015, 52(6): 062701.
黄江. 两个三能级原子的可提纯性猝死 [J]. *激光与光电子学进展*, 2015, 52(6): 062701.
[16] Huang J, Xie Q, Zhou K W, *et al.* Sudden death and sudden birth of bound entanglement [J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2015, 52(4): 042701.
黄江, 谢钦, 周凯伟, 等. 束缚纠缠的猝死与复活 [J]. *激光与光电子学进展*, 2015, 52(4): 042701.

- [17] Zhang Z M. Quantum optics [M]. Beijing: Science Press, 2015.
张智明. 量子光学[M]. 北京: 科学出版社, 2015.
- [18] Cheng W, Xu F, Li H, *et al.* Entanglement and distillability in qutrit-qutrit systems by convex linear combination[J]. International Journal of Theoretical Physics, 2013, 52(4): 1061-1074.
- [19] Vidal G, Werner R F. Computable measure of entanglement[J]. Physical Review A, 2002, 65(3): 032314.