

非线性薛定谔方程的呼吸子解及其怪波极限

杜志峰, 宋丽军*, 王艳

山西大学物理电子工程学院, 山西 太原 030006

摘要 采用达布变换法得到了标准非线性薛定谔方程的一阶呼吸子解及其怪波极限, 研究了一阶呼吸子解的动力学特性。借助达布变换的递推关系得到了非线性薛定谔方程的高阶呼吸子解, 并分别研究了碰撞叠加、分离、简并和并行传输模式。当各呼吸子的频率趋于零时, 得到非线性薛定谔方程怪波极限。研究结果表明, 怪波幅值、凸起数以及怪波分裂后中心波峰的阶数和周围的波峰个数均与怪波阶数有关。

关键词 光纤光学; 非线性光学; 怪波; 达布变换; 呼吸子; 简并; 并行传输

中图分类号 O437 **文献标识码** A

doi: 10.3788/LOP56.050601

Breather Solutions and Their Rouge Wave Limits of Nonlinear Schrödinger Equation

Du Zhifeng, Song Lijun*, Wang Yan

College of Physics & Electronics Engineering, Shanxi University, Taiyuan, Shanxi 030006, China

Abstract Based on the standard nonlinear Schrödinger equation, the first-order breather solution and its rouge wave limit are obtained with Darboux transform method, and the dynamic characteristics of first-order breather solution are studied. High-order breather solutions of nonlinear Schrödinger equation are obtained by means of recurrence relation of Darboux transformation. And their collision superposition, separation, degeneracy and parallel transmission modes are studied, respectively. Nonlinear Schrödinger equation's rouge wave limit can be obtained when each breather frequency tends to zero. Research results show that the rouge wave's amplitude, number of bumps, order of center peaks and number of surrounding peaks after splitting are related to rouge wave's order.

Key words fiber optics; nonlinear fiber optics; rouge wave; Darboux transformation; breather; degeneracy; parallel transmission

OCIS codes 060.2310; 060.2330; 060.2630; 060.4370

1 引言

在现代科学与技术的发展过程中, 系统的非线性特性一直受到广泛关注, 非线性特性是理解很多自然现象的基础, 在流体力学、化学、生物和非线性光学等领域均可以观察到, 其重要性不容置疑。一般情况下, 非线性现象利用线性和非线性效应的非线性演化方程进行建模, 标准非线性薛定谔方程(NLSE)就是描述非线性现象的核心模型之一^[1-2]。

自 20 世纪 60 年代以来, 非线性薛定谔方程已成为广泛研究的偏微分方程, 一维自聚焦的非线性

薛定谔方程被认为是描述海洋波的动力学模型^[3-10]。非线性薛定谔方程之所以被广泛研究, 是因为其在海洋动力学之外的其他物理学分支中均有重要应用, 如非线性光学^[11-12]、Bose-Einstein 凝聚^[13]以及其他非线性物理学领域。NLSE 的精确解包括孤子^[1]、Peregrine 怪波 (RW)^[14-15]、Akhmediev 呼吸子 (AB)^[16-17]、Kuznetsov-Ma 孤子 (KMS)^[18-19] 以及这些解的不同组合^[20]。

目前, 非线性薛定谔方程的呼吸子解被认为是在海洋以及其他物理领域中怪波的潜在原型^[21-23], 当呼吸子周期趋于无穷大时, 呼吸子解将成为有理

收稿日期: 2018-07-16; 修回日期: 2018-08-23; 录用日期: 2018-09-12

基金项目: 国家自然科学基金青年基金(11705108)

* E-mail: 593705149@qq.com

分式的怪波解,因此,有关呼吸子的结果也将为怪波研究提供理论参考。1991年,呼吸子解首次被 Kichenassamy^[24]求得;随后几十年,呼吸子解分别在非线性薛定谔方程^[25]、Korteweg-de Vries 方程^[26-27]、二维 Fermi-Pasta-Ulam 晶格^[28]、向列相液晶盒^[29]和掺杂光纤^[14]等系统中获得;呼吸子由调制不稳定性(MI)^[14,30-31]导致的周期性扰动所产生,这些扰动通常是混沌的,可能在频谱中包含多个频率成份,因此,如何构建高阶解成为研究者非常关心的问题,Akhmediev 小组认为高阶解可以是几个低阶解的非线性叠加^[32-33]。

在自然界中,怪波是一种突然出现但短时间内又突然消失并具有极强破坏力的波^[34],然而这种破坏性至今无法完全解释,航海家们一致认为线性理论无法解释怪波^[35],只有非线性理论才能解释这种能量集中且峰值幅度通常为有效波高两倍以上现象。在最近的研究中,除 NLSE 方程之外,Hirota 方程^[36]、Fokas-Leneels 方程^[37]、Hirota Maxwell-Bloch(MB)方程^[38]、Sasa-Satsuma 方程^[39]以及耗散系统^[40]中均已证明怪波的存在。经过研究,科学家们一致认为调制不稳定性是形成怪波最根本的动力学原因^[41],而高阶怪波是由具有相同或特定频率的多个呼吸子之间的相互作用形成^[42],即当两个或多个呼吸子碰撞时,会产生时空均局域且幅值较大的怪波^[43]。另外,对怪波形成机制的理解非常有用,在海洋中可以有效预防怪波的产生,从而避免造成危害;在光学领域的光纤系统中产生怪波,可以用于产生高能脉冲。

本文基于标准非线性薛定谔方程,采用达布变换方法推导其一阶和高阶呼吸子的精确表达形式,

并详细讨论怪波极限及其他动力学特性。

2 NLSE 的一呼吸子解及其怪波极限

标准的无量纲 NLSE 的表达式为

$$i \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + |\psi|^2 \psi = 0, \quad (1)$$

式中 $|\psi(x, t)|$ 为脉冲包络,在光纤光学中^[21], x 为沿光纤的传输距离, t 为延迟时间。采用达布变换可以将 NLSE 的各阶呼吸解的递推表达式写成^[44]

$$\psi_n = \psi_{n-1} + 2(l_n^* - l_n) s_{n1} r_{n1}^* / (|r_{n1}|^2 + |s_{n1}|^2), \quad (2)$$

式中 n 代表呼吸子解的阶数, l_n 为复特征值, r_{n1} 和 s_{n1} 为线性变化。

当 $n=1$ 时,一阶呼吸子解为

$$\psi_1 = \psi_0 + 2(l_1^* - l_1) s_{11} r_{11}^* / (|r_{11}|^2 + |s_{11}|^2), \quad (3)$$

式中 $\psi_0 = \exp(ix)$ 为种子解,复特征值 $l_1 = a_1 + ib_1$, a_1 为实部, b_1 为虚部,调制频率与特征值的关系为 $\kappa_j = 2\sqrt{1+l_j^2} = \kappa_{jr} + i\kappa_{ji}$,下标 r 和 i 分别代表参数的实部与虚部,下标 j 表示 n 阶方程中第 j 个参数分量($1 \leq j \leq n$)。线性变化 r_{11} 、 s_{11} 的表达式见文献^[44-45]附录。当 $a_1 \neq 0$ 且 $b_1 \neq 0$ 时,一呼吸子解如图 1 所示。特征值 l_1 的实部 a_1 控制呼吸子解的速度,虚部 b_1 控制呼吸子解的周期,当 $a_1 = -0.5$, $b_1 = 0.8$ 时,呼吸子的传输方向与 t 轴正向的夹角为锐角,在坐标平面内存在 5 个基本呼吸子周期,如图 1(a)所示;当 $a_1 = 0.5$, $b_1 = 1$ 时,呼吸子与 t 轴正向的夹角为钝角,且呼吸子的周期比图 1(a)小,如图 1(b)所示,图中色度条表示脉冲幅值 $|\psi|$ 的大小(下文不再赘述)。

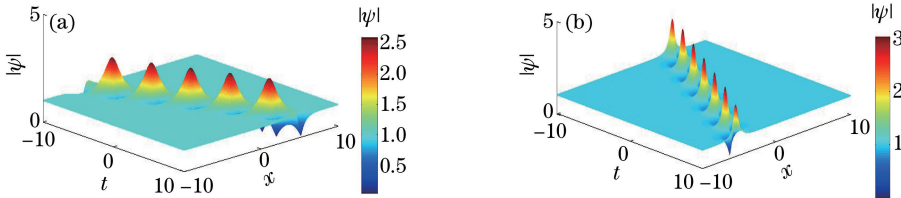


图 1 NLSE 方程一呼吸子解。(a) $a_1 = -0.5, b_1 = 0.8$; (b) $a_1 = 0.5, b_1 = 1$

Fig. 1 One-breather solution of NLSE. (a) $a_1 = -0.5, b_1 = 0.8$; (b) $a_1 = 0.5, b_1 = 1$

为了在坐标平面内得到时间和空间上都局域的波——Peregrine 怪波,NLSE 方程的一阶呼吸子解的周期应趋于无穷,即当 $a_1 = 0, b_1 \rightarrow 1$ 时, $\kappa_1 \approx 0$ 。分析可知,当 $a_1 = 0$ 时,波峰的山脊方向与 x 轴平

行,即没有速度,如图 2 所示。图 2(a)、图 2(b)分别给出了坐标偏移量 $x_1 = 0, t_1 = 0$ 时中心位置位于 $(0, 0)$ 和 $x_1 = 3, t_1 = 3$ 时中心位置位于 $(3, 3)$ 处的 Peregrine 怪波解。

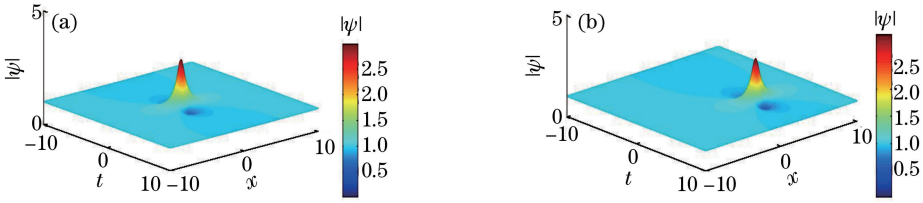


图2 Peregrine 孤子解。(a) $x_1=0, t_1=0$; (b) $x_1=3, t_1=3$

Fig. 2 Peregrine soliton solution. (a) $x_1=0, t_1=0$; (b) $x_1=3, t_1=3$

3 NLSE 的双呼吸子解及其怪波极限

为了得到 NLSE 方程的双呼吸子解,需要两个复特征值,即 $l_j = a_j + ib_j, j=1,2$,基于 NLSE 方程的一阶呼吸子解,当 $n=2$ 时,由(2)式可得 NLSE

方程的双呼吸子解为

$$\psi_2 = \psi_1 + 2(l_2^* - l_2) s_{21} r_{21}^* / (|r_{21}|^2 + |s_{21}|^2). \quad (4)$$

当 $n>1$ 时, NLSE 方程的呼吸子解需要更高阶次的 r 和 s , 此时

$$\begin{cases} r_{np} = [(l_{n-1}^* - l_{n-1}) s_{n-1,1}^* r_{n-1,1} s_{n-1,p+1} + (l_{p+n-1} - l_{n-1}) \\ |r_{n-1,1}|^2 r_{n-1,p+1} + (l_{p+n-1} - l_{n-1}^*) |s_{n-1,1}|^2 r_{n-1,p+1}] / (|r_{n-1,1}|^2 + |s_{n-1,1}|^2), \\ s_{np} = [(l_{n-1}^* - l_{n-1}) r_{n-1,1}^* s_{n-1,1} r_{n-1,p+1} + (l_{p+n-1} - l_{n-1}) \\ |s_{n-1,1}|^2 s_{n-1,p+1} + (l_{p+n-1} - l_{n-1}^*) |r_{n-1,1}|^2 s_{n-1,p+1}] / (|r_{n-1,1}|^2 + |s_{n-1,1}|^2) \end{cases}, \quad (5)$$

式中下标 p 仅用于列举,并无特定物理意义,当 $n=2, p=1$ 时, NLSE 的双呼吸子传输如图 3 所示。

由图 3(a)可知,当 $l_1 = 0.1 + 0.8i, l_2 = -0.1 + 0.8i, x_1 = x_2 = t_1 = t_2 = 0$ 时,两列呼吸子在平面内传输,并在坐标原点发生碰撞,产生一个幅值较高的二阶怪波,其幅值如色度条所示;碰撞之后,两列呼吸子保持原来的速度、大小和方向向前传播。当 $b_j \rightarrow 1$ 时,即 $l_1 = 0.1 + 0.99i, l_2 = -0.1 + 0.99i$ 时,碰

撞产生的二阶怪波幅值与阶数 n 之间的关系为 $|\psi| = 2n + 1$, 如图 3(b)所示。二阶怪波的幅值 $|\psi| = 5$, 对比图 3(a)与图 3(b)可知,当特征值虚部增大时,二阶怪波的幅值也逐渐增大;当 $l_1 = 0.1 + 0.9i, l_2 = -0.1 + 0.9i$, 且 $x_1 = t_1 = -1, x_2 = t_2 = 1$ 时,两列呼吸子没有发生碰撞,有效避免了二阶怪波的产生,如图 3(c)所示。

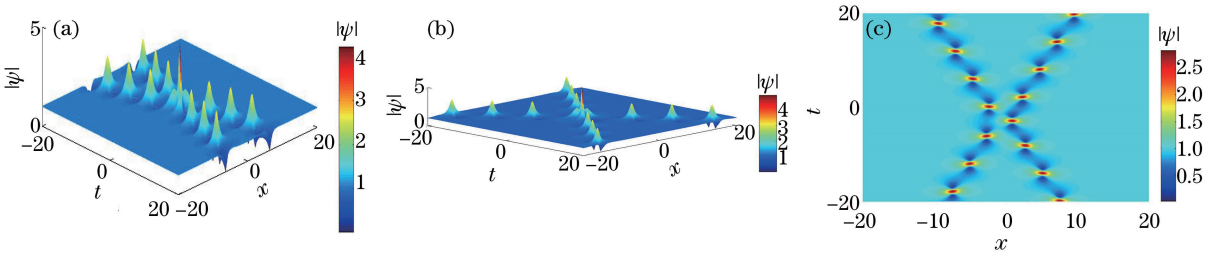


图3 双呼吸子的碰撞。(a) $b_1=0.8$; (b) $b_1 \rightarrow 1$; (c) 双呼吸子碰撞的避免

Fig. 3 Collision of double breather. (a) $b_1=0.8$; (b) $b_1 \rightarrow 1$; (c) avoid the collision of double breather

当 $a_j=0$, 坐标偏移量取不同值时,得到特殊双呼吸子的碰撞与分离,如图 4 所示。由图 4(a)可知,当 $b_j < 1$ 时, κ_j 为实数,此时呼吸子表现为纵向局域横向周期呼吸的 Akhmediev 呼吸子,即当 $l_1 = 0.95i, l_2 = 0.8i$, 且 $x_1 = x_2 = t_1 = t_2 = 0$ 时,两列 AB 呼吸子在坐标平面内发生碰撞,在坐标平面的中心位置产生一个幅值较高的二阶怪波;当 l_1, l_2 不变,

$x_1=3, x_2=-3$ 时,两列碰撞的 AB 呼吸子在平面内发生分离,未产生二阶怪波,如图 4(b)所示;当 $b_j > 1$ 时, κ_j 为虚数,此时呼吸子表现为横向局域纵向周期性呼吸的 Kuznetsov-Ma 孤子,即当 $l_1 = 0.9i, l_2 = 1.2i$ 时, κ_1 为实数, κ_2 为虚数, AB 呼吸子与 KM 孤子在平面内发生碰撞,产生一个幅值较高的二阶怪波,如图 4(c)所示。

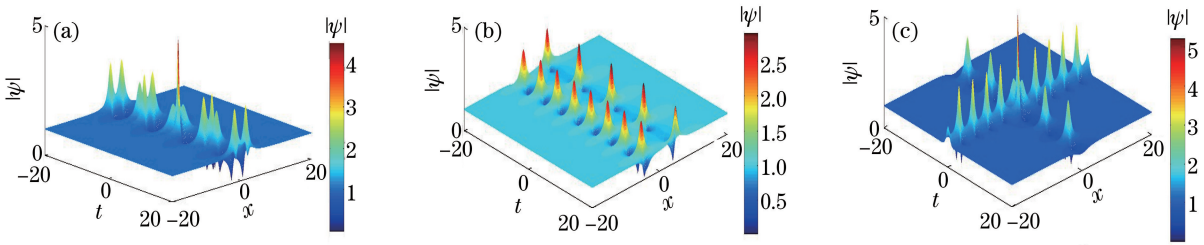


图 4 呼吸子的碰撞与分离。(a) 双 AB 碰撞; (b) 双 AB 分离; (c) AB 与 KM 孤子碰撞

Fig. 4 Collision and separation of breathers. (a) Double Akhmediev breather collision; (b) double Akhmediev breather separation; (c) collision between Akhmediev breather and Kuznetsov-Ma soliton

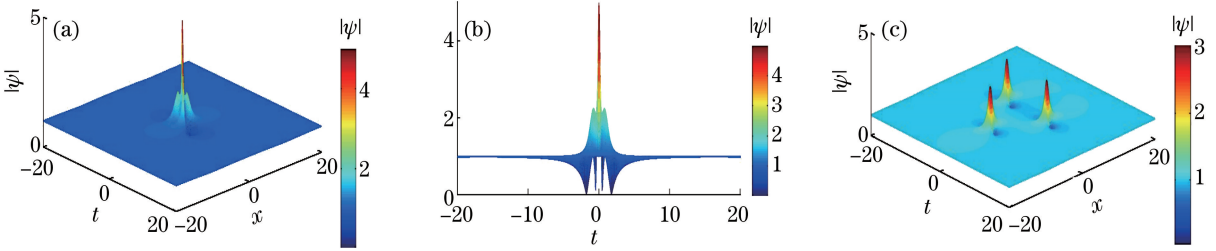


图 5 二阶怪波的产生与分裂。(a) 二阶怪波; (b) 二维图; (c) 分裂

Fig. 5 Generation and separation of second-order rogue waves. (a) Second-order rogue waves; (b) two-dimensional diagram; (c) separation

当 $a_j=0, b_j \rightarrow 1$ 时, 坐标偏移量取不同值时, 可分别获得 Peregrine 孤子的叠加和二阶怪波的分离, 如图 5 所示。由图 5(a) 可知, 当 $l_1=0.99i, l_2=0.9901i$ 时, (4) 式变为二阶有理怪波解, 在坐标平面内产生一个具有唯一最大值的二阶怪波; 以视线垂直 $(x, |\psi|)$ 平面方向为三维图的主视图方向, 图 5 (b) 为侧视图, 则二阶怪波的幅值接近 5, 即当 $n=2$ 时, $|\psi|=5$; 当偏移量不为零, 且 $x_1=0.01, x_2=-0.01$ 时, 一个二阶怪波分裂为三个一阶怪波, 如图 5(c) 所示, 且三个怪波的中心位置在 $x-t$ 平面内呈等边三角形分布。

由于 κ_j 与呼吸子周期有关, 当 κ_1 与 κ_2 同比值不同时, 将会得到不同的碰撞模式。令 $a_j=0$, 图 6 分别给出了当 $\kappa_1:\kappa_2=2\kappa:\kappa, \kappa_1:\kappa_2=3\kappa:2\kappa, \kappa_1:\kappa_2=4\kappa:3\kappa$ 时, 双呼吸子的几种碰撞模式, 其中常数 $\kappa=0.4$ 。由图 6(a) 可知, 当 $\kappa_1:\kappa_2=2\kappa:\kappa$ 时, 在坐标平面中心位置处沿 t 轴方向产生一个周期的二阶怪波; 当 $\kappa_1:\kappa_2=3\kappa:2\kappa$ 时, 在坐标平面的中心位置处产生二阶怪波, 且二阶怪波与呼吸子对交替出现, 除中心位置的二阶怪波外, 其他位置二阶怪波的能量都衰减, 如图 6(b) 所示; 当 $\kappa_1:\kappa_2=4\kappa:3\kappa$ 时, 二阶怪波和两对呼吸子对形成一个周期, 如图 6(c) 所示。

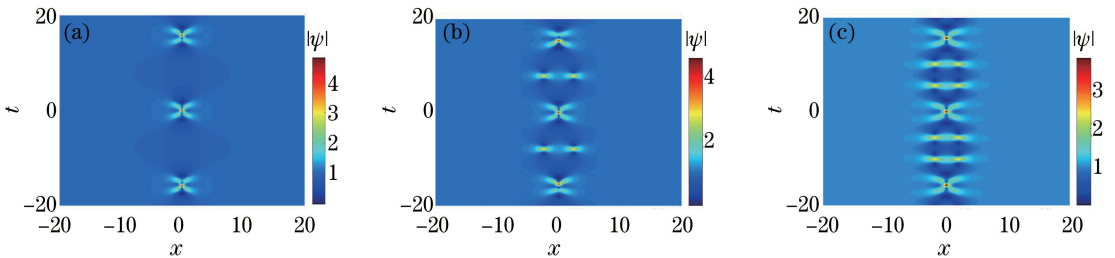


图 6 双呼吸子碰撞。(a) $\kappa_1:\kappa_2=2\kappa:\kappa$; (b) $\kappa_1:\kappa_2=3\kappa:2\kappa$; (c) $\kappa_1:\kappa_2=4\kappa:3\kappa$

Fig. 6 Double breather collision. (a) $\kappa_1:\kappa_2=2\kappa:\kappa$; (b) $\kappa_1:\kappa_2=3\kappa:2\kappa$; (c) $\kappa_1:\kappa_2=4\kappa:3\kappa$

从图 6 中可观察到一个有趣的现象: 在每个周期序列中, 一阶怪波分量按照特定规则进行组织。首先, 调制频率 κ_1, κ_2 比值的整数定义了每个周期中一阶怪波的总数, 即 $\kappa_1:\kappa_2=2\kappa:\kappa$ 时, 怪波的总数

为 3; 其次, 三个一阶怪波分量总是合并形成如图 5 (a) 所示的一个二阶怪波, 其余怪波关于 $x=0$ 对称。在图 6(b) 中, $\kappa_1:\kappa_2=3\kappa:2\kappa$, 即在一个周期中, 一阶怪波的总数为 5, 其中三个一阶怪波组合成一

个二阶怪波, 剩余两个一阶怪波关于 $x=0$ 对称。

双呼吸子的碰撞特性具有极强的丰富性, 本文只讨论几种具有代表性的碰撞关系。已经讨论了一般的双呼吸子的碰撞, 接下来讨论双呼吸子碰撞的另一种特殊情况, 即两个呼吸子并行传播时的碰撞特性^[46]。在并行传输模式下, 双呼吸子传播需要满足条件:

$$V_{H1}/\kappa_{1i} = V_{H2}/\kappa_{2i} \quad (6)$$

根据文献[47]中对各参数的定义可以得到:

$$\begin{cases} V_{H1} = (a_1\kappa_{1i} - b_1\kappa_{1r})/2 \\ V_{H2} = (a_2\kappa_{2i} - b_2\kappa_{2r})/2 \end{cases} \quad (7)$$

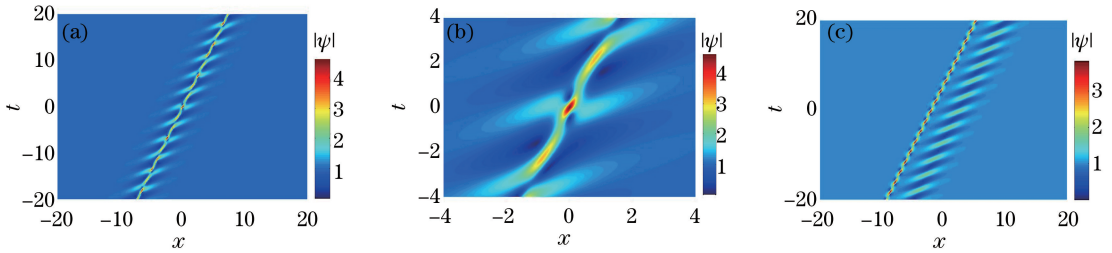


图 7 $l_1 = -1.1705 + 1.4i, l_2 = -0.5 + 0.4i$ 时双呼吸子的并行叠加。(a) $x_1 = 0, x_2 = 0$; (b) 局部放大图; (c) $x_1 = -2, x_2 = 2$

Fig. 7 Two breathers parallel superimposed with $l_1 = -1.1705 + 1.4i$ and $l_2 = -0.5 + 0.4i$. (a) $x_1 = 0, x_2 = 0$; (b) partial enlargement; (c) $x_1 = -2, x_2 = 2$

4 NLSE 方程的三阶呼吸子解及其怪波极限

由(2)式可知, 当 $n=3$ 时, NLSE 方程的三阶呼吸子解为

$$\psi_3 = \psi_2 + 2(l_3^* - l_3) s_{31} r_{31}^* / |r_{31}|^2 + |s_{31}|^2 \quad (8)$$

式中 $l_j = a_j + ib_j (j=1, 2, 3)$ 为三个复特征值, 参数 s_{31}, r_{31} 由(5)式给出。当特征值分别取不同值时, 可以得到呼吸子的双重碰撞、三重碰撞和简并态等, 如图 8 所示。从图 8(a)中可以看出, 当 $l_1 = 0.5 + 0.98i, x_1 = 0, t_1 = 10, l_2 = 1.2i, x_2 = 0, t_2 = -10, l_3 = -0.5 + 0.98i, x_3 = 0, t_3 = 10$ 时, 三阶呼吸子解在坐标平面内发生两两相互碰撞, 且碰撞点分布呈三角形, 当选取不同的特征值时, 双重碰撞所呈现的图形也不相同; 当 $l_1 = 0.5 + 0.95i, l_2 = 0.95i, l_3 = -0.5 + 0.95i$, 且 $x_j = t_j = 0$ 时, 三阶呼吸子在坐标平面内相交于一点, 在碰撞点处产生一个幅值较大的三阶怪波, 如图 8(b)所示; 仔细比较图 8(a)与(b)可知, 合理选取参数可以有效避免高阶怪波的产生, 一般地, 各特征值不能相等, 否则解析解将没有意义, 为了克服该难题, 可以考虑 $l_j \rightarrow l$ 的情况, 即特征值近似相等的情况, 令 $l = 0.95i$, 特征值分别为

式中 V_{Hj} 控制脉冲在 x 方向上的位置, 且 V_{Hj}/κ_{ji} 与 NLSE 方程中孤子解的群速度相对应, 此时(6)式没有解析解, 但可以计算得到数值解。假设 l_2 已知, 令 $l_2 = -0.5 + 0.4i$, 当(6)式成立时, 可解得 $l_1 = -1.1705 + 1.4i$, 此时双呼吸子的并行传输如图 7 所示。从图 7(a)可以看出, 当 $x_1 = 0, x_2 = 0$ 时, 两列呼吸子周期性并行传输, 且在传输过程中碰撞叠加, 图 7(b)为图 7(a)的局部放大图; 当 $x_1 = -2, x_2 = 2$ 时, 并行传输的呼吸子序列分离为两列平行传输的呼吸子序列, 并保持各自的周期并行传输, 在坐标平面内不会发生碰撞叠加。

$l_1 = 0.9501i, l_2 = 0.9502i, l_3 = 0.9503i$ 时, 三阶呼吸子的传输如图 8(c)所示, 三阶呼吸子解表现为简并模式, 三列呼吸子先保持近似平行的向前传播, 在坐标原点处发生碰撞叠加, 产生三阶怪波, 碰撞之后, 三列呼吸子继续维持各自的速度、振幅和方向向前传播, 且传播过程中方向仍保持近似平行。

当 $a_j = 0, b_j \rightarrow 1$ 时, $\kappa_j \approx 0$, 呼吸子的周期趋于无穷, 三阶呼吸子解转变为三阶有理怪波解, 如图 9 所示。由图 9(a)可知, 当 $l_1 = 0.99i, l_2 = 0.9901i, l_3 = 0.9902i$, 且 $x_j = t_j = 0$ 时, 在坐标原点处产生一个孤立的三阶怪波, 幅值接近 7, 即幅值与阶数仍满足 $|\psi| = 2n + 1$ 的关系; 图 9(b)为图 9(a)的等高图, 颜色相同表示次峰的幅值相同, 曲线从外到内颜色越明亮表示脉冲幅值越大, 若从峰值功率最大点出发垂直于 x 轴做一条分界线, 将三阶怪波分为左右两部分, 假定每一部分最外层的次峰为一级次峰, 级数由外向内逐渐递增, 如左侧最外层的一级次峰为三瓣结构, 而内层的二级次峰为双瓣结构, 此时三阶怪波每一部分的次峰个数 N 均为 5, 即 $N = [n(n+1)/2] - 1$; 当 l_j 保持不变, 坐标偏移不全为零, 如 $x_1 = x_3 = 10^{-5}, x_2 = 0$ 时, 此时三阶怪波发生分裂, 分裂后的三阶怪波在坐标平面内呈五边形分布, 且位于中心位置处怪波的阶数为 $n - 2$, 即中心

位置处为一阶 Peregrine 孤子,而包围中心位置处怪波的旁峰数目 M 与阶数 n 的关系为 $M=2n-1$,旁峰的个数为 5,如图 9(c)所示。

同样地,当 $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ 比值不同时,将会得到不

同的三阶呼吸子的叠加模式。为简单起见,令 $a_j = 0$,图 10 给出了 $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ 满足不同比值时,三阶呼吸子的相互作用。

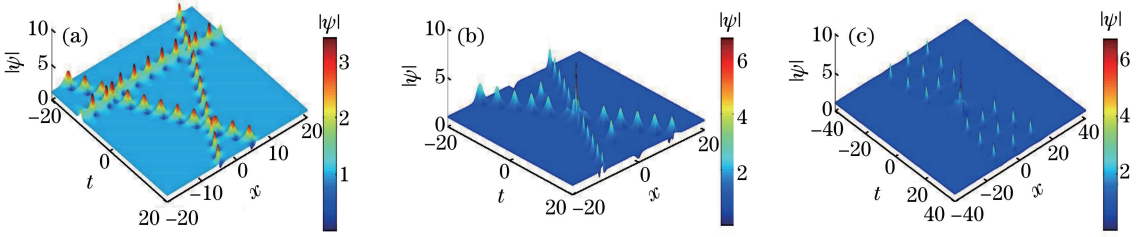


图 8 三阶呼吸子的碰撞。(a)双重碰撞;(b)三重碰撞;(c)简并态

Fig. 8 Collisions of third-order breathers. (a) Double collision; (b) triple collision; (c) degeneration

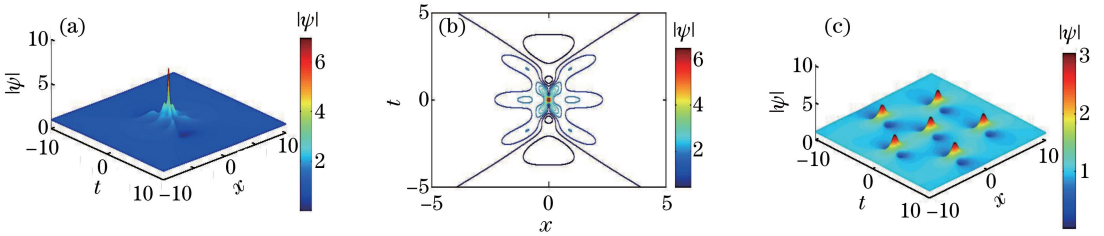


图 9 三阶怪波的产生与分裂。(a)三阶怪波;(b)等高图;(c)分裂

Fig. 9 Generation and separation of third-order rogue waves. (a) Third-order rogue waves; (b) contours; (c) separation

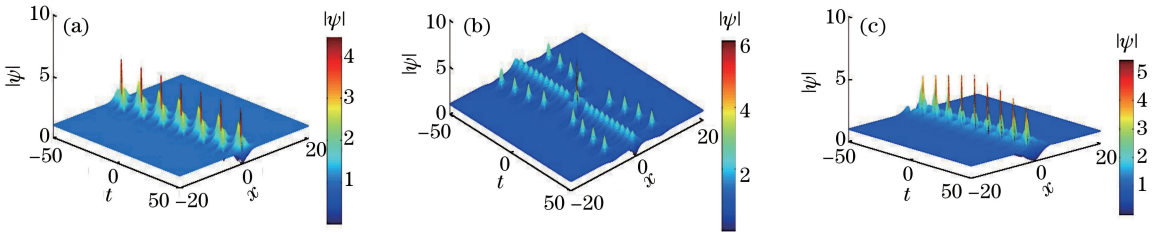


图 10 三阶呼吸子的碰撞。(a) $\kappa_1:\kappa_2:\kappa_3=2:3:5$ 且 $\kappa_1=0.8$;(b) $\kappa_1:\kappa_2:\kappa_3=2:3:5$ 且 $\kappa_1=0.6$;(c) $\kappa_1:\kappa_2:\kappa_3=3:2:1$ 且 $\kappa_1=1.8$

Fig. 10 Third-order breather collision. (a) $\kappa_1:\kappa_2:\kappa_3=2:3:5$ and $\kappa_1=0.8$; (b) $\kappa_1:\kappa_2:\kappa_3=2:3:5$ and $\kappa_1=0.6$; (c) $\kappa_1:\kappa_2:\kappa_3=3:2:1$ and $\kappa_1=1.8$

由图 10(a)可知,当 $\kappa_1:\kappa_2:\kappa_3=2:3:5$,且 $\kappa_1=0.8$ 时,三阶呼吸子相互叠加,在坐标平面内呈现怪波与呼吸子交替出现的周期性结构;当 $\kappa_1:\kappa_2:\kappa_3=2:3:5$,但 $\kappa_1=0.6$ 时,三阶呼吸子的叠加模式发生改变,即在坐标原点处产生一个高阶怪波,碰撞前后三个呼吸子均保持各自的传播特性,不具有周期性,如图 10(b)所示;当 $\kappa_1:\kappa_2:\kappa_3=3:2:1$ 且 $\kappa_1=1.8$ 时,此时三阶呼吸子在 $x=0$ 处产生怪波序列,怪波的幅度变化趋势呈现抛物线形,在 $t=0$ 时峰值达到最大,如图 10(c)所示。

由二阶呼吸子解及怪波极限的分析可知,三阶呼吸子并行传输需要满足条件:

$$V_{H1}/\kappa_{11}=V_{H2}/\kappa_{21}=V_{H3}/\kappa_{31} \quad (9)$$

假设 l_2 已知,令 $l_2=0.3+0.7i$,当(9)式成立时,其数值解为 $l_1=0.1935+0.7982i, l_3=1.0046+1.2018i$,此时三阶呼吸子的传输特性如图 11 所示。由图 11(a)可知,当三阶呼吸子特征值满足(9)式,且偏移量均为零时,传输模式为并行传输模式,三列呼吸子先沿同一方向向前传输,传输一定距离后,在坐标平面内发生碰撞并形成三阶怪波,在坐标原点处三阶怪波的峰值功率大于其他碰撞位置的峰值功率,此时三阶呼吸子的并行传输具有周期性;图 11(b)为图 11(a)的局部放大图;当三列呼吸子的坐标偏移量不为零时,三列呼吸子的并行传输发生分离,如图 11(c)所示,分离后三列呼吸子的传输方向平行,在传输过程中不会发生碰撞或叠加。

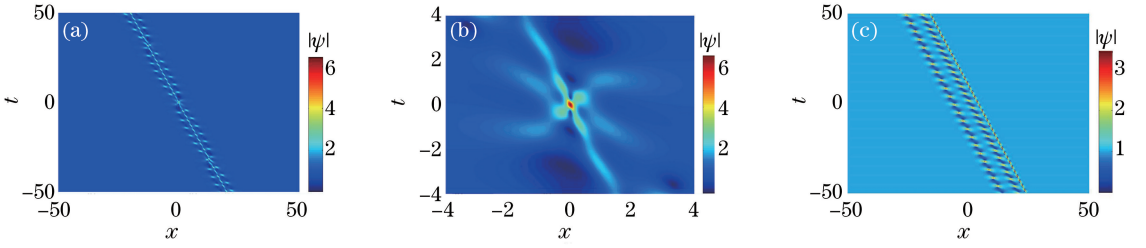


图 11 三阶呼吸子的并行传输。(a) $x_1=0, x_2=0, x_3=0$; (b) 局部放大图; (c) $x_1=-4, x_2=0, x_3=4$

Fig. 11 Third-order breather parallel transmission. (a) $x_1=0, x_2=0, x_3=0$;

(b) partial enlargement; (c) $x_1=-4, x_2=0, x_3=4$

5 NLSE 的四阶呼吸子解及其怪波极限

由(2)式可知,当 $n=4$ 时,NLSE 方程的四阶呼吸子解为

$$\psi_4 = \psi_3 + 2(l_4^* - l_4) s_{41} r_{41}^* / |r_{41}|^2 + |s_{41}|^2, \quad (10)$$

式中 s_{41}, r_{41} 由(5)式可得。当特征值取不同值时,四阶呼吸子解的传输特性如图 12 所示。由图 12

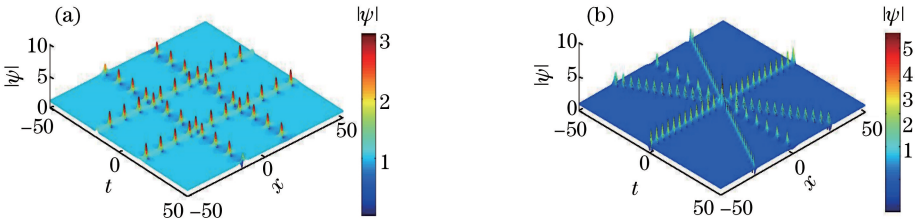


图 12 四阶呼吸子的相互作用。(a) 双重碰撞; (b) 四重碰撞

Fig. 12 Fourth-order breather interaction. (a) Double collision; (b) fourfold collision

特别地,当 $l_1=0.95i, l_2=0.9501i$ 时,特征频率 κ_1, κ_2 为实数,且 $x_j = t_j = 0$ 时,可以获得 AB 呼吸子的简并模式,两列 AB 呼吸子在坐标原点处发生碰撞,产生一个二阶怪波;当 $l_3=1.05i, l_4=1.0501i$ 时,特征频率 κ_3, κ_4 为虚数,可以获得双 KM 孤子的简并模式,两列 KM 孤子在坐标原点处发生碰撞,产生一个二阶怪波。当双 AB 呼吸子的简并模式与双 KM 孤子的简并模式在坐标原点位置发生碰撞时,会产生一个四阶怪波,其幅值为 9,如图 13(a) 所示;当 $l_1=0.95i, l_2=0.9501i, l_3=0.9502i, l_4=0.9503i$, 且 $x_j = t_j = 0$ 时,呼吸子的传输模式为四阶 AB 呼吸子的简并模式,即四列 AB 呼吸子以近似平行的方式传播,并在坐标原点碰撞产生一个四阶怪波,其幅值小于图 13(a) 中的幅值,碰撞后仍近似平行向前传播,如图 13(b) 所示。

当 $a_j=0, b_j \rightarrow 1, \kappa_j \rightarrow 0$ 时,呼吸子的周期趋于无穷,四阶呼吸子解转变为四阶怪波解。当 $l_1 =$

(a) 可知,当特征值分别为 $l_1=0.95i, l_2=0.9501i, l_3=1.05i, l_4=1.0501i, x_1=-2, x_2=2, t_3=-4, t_4=4$ 时,四阶呼吸子呈井字型分布,且在传输过程中没有发生碰撞叠加,即未产生高阶怪波;由图 12 (b) 可知,当 $l_1=0.9i, l_2=1.2i, l_3=-0.5+0.95i, l_4=0.5+0.95i$, 且坐标偏移量均为零时,呼吸子在坐标原点处发生四重碰撞,产生四阶怪波,碰撞后,每列呼吸子仍保持其原有的速度、方向和大小向前传播,呼吸子呈米字型分布。

$0.99i, l_2=0.991i, l_3=0.992i, l_4=0.993i$, 且 $x_j = t_j = 0$ 时,在坐标平面内形成四阶怪波,如图 14 (a) 所示;四阶怪波的幅度 $|\psi|=9$, 与阶数 n 的关系满足 $|\psi|=2n+1$, 如图 14(b) 所示;图 14(c) 为图 14 (a) 的等高图,分界线左侧一级次峰为四瓣结构,二级次峰为三瓣结构,三级次峰为双瓣结构,即分界线左侧的次峰总数 $N=9$, 与阶数 n 的关系满足 $N = [n(n+1)/2] - 1$ 。

当四阶怪波解具有较小的坐标偏移时,四阶怪波将发生分裂,为了方便分析,将特征频率以及坐标偏移量分别改写为

$$\kappa_j = j\kappa, x_j = X_{jn}\kappa^{2(n-1)}, t_j = T_{jn}\kappa^{2(n-1)}, \quad (11)$$

式中参数 κ, X_{jn}, T_{jn} 均为常数,适当取值使得坐标偏移量分别为 $x_1=0.5^6, x_2=x_3=x_4=0$ 时,四阶怪波的分裂情况如图 15(a) 所示。可以看出,四阶怪波在一次分裂后产生一个圆形的怪波集群,其中心为一个二阶怪波,即中心怪波的阶数为 $n-2$, 分裂

后外层旁峰的数目 M 与阶数 n 满足 $M=2n-1$, 即 $M=7$ (图中可见 7 个旁峰)。特别地, 当 $x_1=x_2=0.5^6, x_3=x_4=0$ 时, 四阶怪波发生两次分裂, 即在

一次分裂的基础上, 中心二阶怪波再次分裂, 产生三个一阶 Peregrine 怪波, 四阶怪波最多只能进行两次分裂, 如图 15(b) 所示。

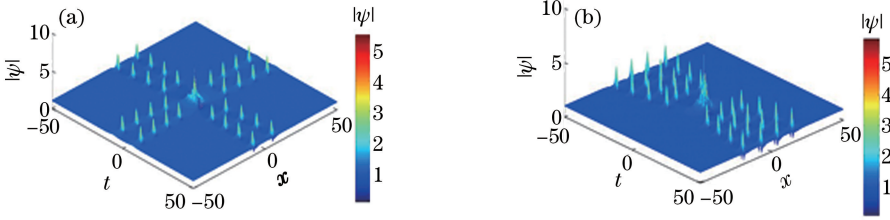


图 13 呼吸子的简并。(a) AB 简并与 KM 孤子简并叠加; (b) AB 的简并

Fig. 13 Degenerate breather. (a) Superposition of Akhmediev breather and Kuznetsov-Ma soliton degenerate state; (b) degenerate Akhmediev breather

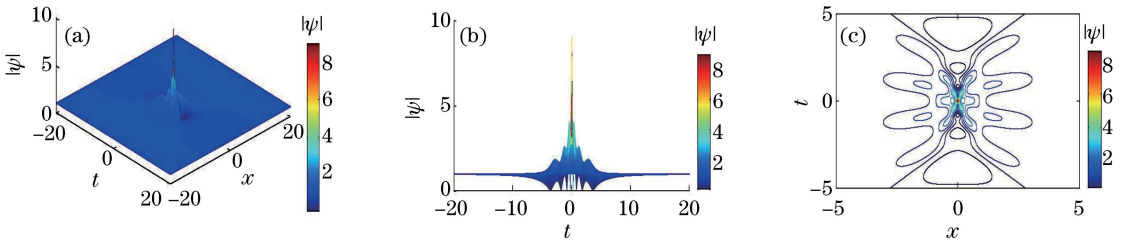


图 14 四阶怪波的产生。(a) 四阶怪波; (b) 二维图; (c) 等高图

Fig. 14 Generation of fourth-order rogue wave. (a) Fourth-order rogue waves; (b) two-dimensional diagram; (c) contour map

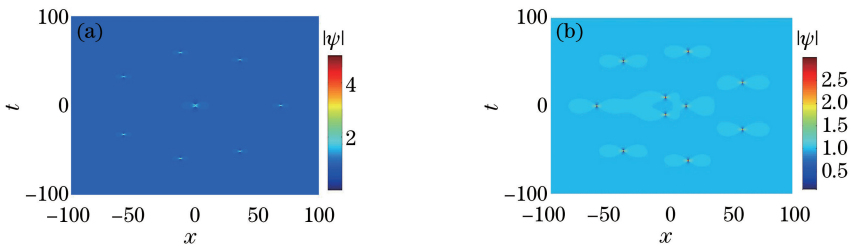


图 15 四阶怪波的分裂。(a) 一次分裂; (b) 两次分裂

Fig. 15 Separation of fourth-order rogue wave. (a) Once separation; (b) twice separation

同样地, 由于 κ_j 对呼吸子周期具有较大影响, 当 κ_j 满足不同比值时, 将会得到不同的四阶呼吸子叠加模式。为简单起见, 令 $a_j=0$ 。图 16 给出了 $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4$ 满足不同比值时, 四阶呼吸子的相互作用。当 $\kappa_1:\kappa_2:\kappa_3:\kappa_4=1:3:5:7$ 且 $\kappa_1=0.2$ 和 $\kappa_1:\kappa_2:\kappa_3:\kappa_4=2:4:6:8$ 且 $\kappa_1=0.4$ 时, 四阶呼吸子在中心位置处会叠加产生四阶怪波, 其他位置表现为完全不同的呼吸子叠加行为, 但脉冲的分布均关于 $t=0$ 和 $x=0$ 对称, 等高图中曲线颜色越明亮说明脉冲幅值越大。

式成立时, 其数值解为 $l_1=0.1935+0.7982i, l_3=1.0046+1.2018i, l_4=0.5991+0.5468i$, 此时四阶呼吸子的并行传输如图 17 所示。

由图 17(a) 可知, 当四阶呼吸子的特征值满足 (12) 式, 且坐标偏移均为零时, 四阶呼吸子呈周期性并行传输。但在图 17(a) 中, 只能观察到三列明显的呼吸子序列, 这是因为其中两列呼吸子传输方向完全重合, 形成一条传输方向不变的中心呼吸子序列, 该序列幅度高于两侧呼吸子序列。在坐标原点, 四阶呼吸子相互碰撞产生四阶怪波, 图 17(b) 为图 17(a) 的局部放大图; 当坐标偏移量不为零时, 四阶呼吸子的并行传输发生分离, 表现为四列相互平行的呼吸子序列, 呼吸子在传输过程中不会产生叠加, 如图 17(c) 所示。

四阶呼吸子并行传输需要满足条件:

$$V_{H1}/\kappa_{1i}=V_{H2}/\kappa_{2i}=V_{H3}/\kappa_{3i}=V_{H4}/\kappa_{4i} \quad (12)$$

同样地, 假设 l_2 已知, 令 $l_2=0.3+0.7i$, 当 (12)

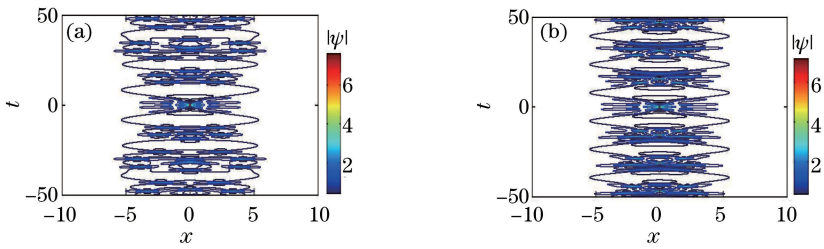


图 16 四阶呼吸子相互作用的等高图。(a) $\kappa_1:\kappa_2:\kappa_3:\kappa_4=1:3:5:7$; (b) $\kappa_1:\kappa_2:\kappa_3:\kappa_4=2:4:6:8$

Fig. 16 Contour map of fourth-order breather interaction. (a) $\kappa_1:\kappa_2:\kappa_3:\kappa_4=1:3:5:7$; (b) $\kappa_1:\kappa_2:\kappa_3:\kappa_4=2:4:6:8$

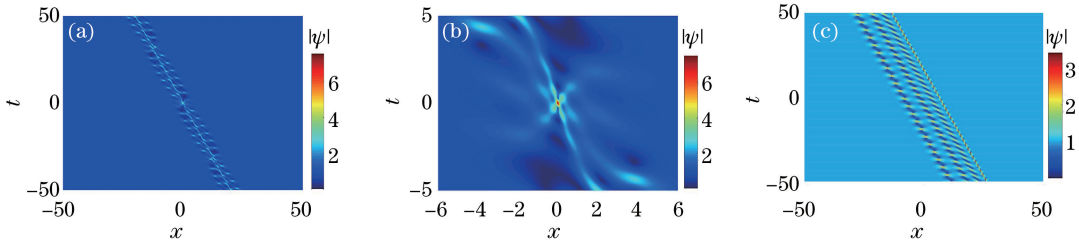


图 17 四阶呼吸子的并行传输。(a) $x_1=0, x_2=0, x_3=0, x_4=0$; (b)局部放大图; (c) $x_1=-6, x_2=-2, x_3=2, x_4=6$

Fig. 17 Third-order breather parallel transmission. (a) $x_1=0, x_2=0, x_3=0, x_4=0$; (b) partial enlargement; (c) $x_1=-6, x_2=-2, x_3=2, x_4=6$

6 结 论

基于标准无量纲的非线性薛定谔方程,采用达布变换方法得到了 NLSE 方程各阶呼吸子解的一般表达形式,并详细研究了怪波极限及其他动力学特性。当呼吸子在坐标平面内发生有效碰撞或周期趋于无穷时,会产生一个对应阶数的怪波。

然而,高能量脉冲在光纤光学中,海洋中高能脉冲具有极强的破坏力,应当有效预防和避免。研究表明,合理设定参数既可以有效控制高阶怪波的产生,还可以选择怪波出现的位置。此外,还研究了高阶呼吸子的并行传输模式和频率比对传输特性的影响,以及高阶怪波的特性和一次分裂、二次分裂。本文只研究了标准的 NLSE 方程,后续工作将针对其他 NLSE 方程进行,期望详尽了解呼吸子以及怪波的动力学特性。

参 考 文 献

[1] Zakharov V E, Shabat A B. Exact theory of two-dimensional self-focussing and one-dimensional self-modulating waves in nonlinear media[J]. Journal of Mathematical Physics, 2015, 34(15): 62-69.
 [2] Akhmediev N, Ankiewicz A. Solitons: nonlinear pulses and beams[M]. London: Chapman and Hall, 1997.
 [3] Kharif C, Pelinovsky E. Physical mechanisms of the

rogue wave phenomenon [J]. European Journal of Mechanics, 2003, 22(6): 603-634.

[4] Janssen P A E M. Nonlinear four-wave interactions and freak waves [J]. Journal of Physical Oceanography, 2003, 33(4): 863-884.
 [5] Onorato M, Osborne A R, Serio M, et al. Freak waves in random oceanic sea states [J]. Physical Review Letters, 2001, 86(25): 5831-5834.
 [6] Dyachenko A I, Zakharov V E. Spatial equation for water waves[J]. JETP Letters, 2016, 103(3): 181-184.
 [7] Shrira V I, Geogjaev V V. What makes the Peregrine soliton so special as a prototype of freak waves? [J]. Journal of Engineering Mathematics, 2010, 67(1/2): 11-22.
 [8] Osborne A R, Onorato M, Serio M. The nonlinear dynamics of rogue waves and holes in deep-water gravity wave trains[J]. Physics Letters A, 2000, 275(5/6): 386-393.
 [9] Osborne A R. The random and deterministic dynamics of 'rogue waves' in unidirectional, deep-water wave trains[J]. Marine Structures, 2001, 14(3): 275-293.
 [10] Perrie W. Nonlinear ocean waves [M]. Southampton: Computational Mechanics Publications, 2006.
 [11] Hasegawa A, Tappert F. Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers.

- I. Anomalous dispersion [J]. Applied Physics Letters, 1973, 23(3): 142-144.
- [12] Agrawal G P. Nonlinear fiber optics [M]. 4th ed. Amsterdam: Elsevier, 2006.
- [13] Andreev P A. First principles derivation of NLS equation for BEC with cubic and quintic nonlinearities at nonzero temperature: dispersion of linear waves [J]. International Journal of Modern Physics B, 2013, 27(6): 1350017.
- [14] Slunyaev A V. A high-order nonlinear envelope equation for gravity waves in finite-depth water [J]. Journal of Experimental and Theoretical Physics, 2005, 101(5): 926-941.
- [15] Wu D, Wang J F, Shi J, *et al.* Generation and transmission of Peregrine solitons in doped fiber [J]. Acta Optica Sinica, 2017, 37(4): 0406002.
武达, 王娟芬, 石佳, 等. 掺杂光纤中 Peregrine 孤子的产生和传输 [J]. 光学学报, 2017, 37(4): 0406002.
- [16] Vishnu P N, Senthilvelan M, Lakshmanan M. Akhmediev breathers, Ma solitons, and general breathers from rogue waves: a case study in the Manakov system [J]. Physical Review E, 2013, 88(2): 022918.
- [17] Frisquet B, Kibler B, Millot G. Collision of akhmediev breathers in nonlinear fiber optics [J]. Physical Review X, 2013, 3(4): 041032.
- [18] Kedziora D J, Ankiewicz A, Akhmediev N. Second-order nonlinear Schrödinger equation breather solutions in the degenerate and rogue wave limits [J]. Physical Review E, 2012, 85(6): 066601.
- [19] Yang G Y, Li L, Tian J P. Study on Transformation of Kuznetsov-Ma soliton to quasi-fundamental soliton based on spectral-filtering method [J]. Acta Optica Sinica, 2016, 36(6): 0619002.
杨光晔, 李禄, 田晋平. 基于谱过滤方法的 Kuznetsov-Ma 孤子向准基态孤子转化研究 [J]. 光学学报, 2016, 36(6): 0619002.
- [20] Bergé L. Wave collapse in physics: principles and applications to light and plasma waves [J]. Physics Reports, 1998, 303(5/6): 259-370.
- [21] Efimov V B, Ganshin A N, Kolmakov G V, *et al.* Rogue waves in superfluid helium [J]. The European Physical Journal Special Topics, 2010, 185(1): 181-193.
- [22] Shats M, Punzmann H, Xia H. Capillary rogue waves [J]. Physical Review Letters, 2010, 104(10): 104503.
- [23] Kibler B, Fatome J, Finot C, *et al.* The Peregrine soliton in nonlinear fibre optics [J]. Nature Physics, 2010, 6(10): 790-795.
- [24] Kichenassamy S. Breather solutions of the nonlinear wave equation [J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1991, 44(7): 789-818.
- [25] Tajiri M, Watanabe Y. Breather solutions to the focusing nonlinear Schrödinger equation [J]. Physical Review E, 1998, 57(3): 3510-3519.
- [26] Kovalyov M. Modulating properties of harmonic breather solutions of KdV [J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1998, 31(22): 5117-5128.
- [27] Wang C J, Dai Z D, Lin S Q, *et al.* Breather-type soliton and two-soliton solutions for modified Korteweg-de Vries equation [J]. Applied Mathematics and Computation, 2010, 216(1): 341-343.
- [28] Sarkar R, Dey B. Exact compact breather-like solutions of two-dimensional Fermi-Pasta-Ulam lattice [J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 2006, 39(4): L99-L104.
- [29] Zhu Y Q, Hu W. Propagation of breathers in the nematic liquid crystal cell without bias voltage [J]. Acta Optica Sinica, 2015, 35(9): 0919001.
朱叶青, 胡巍. 无外置偏压的向列相液晶盒中的呼吸子传输 [J]. 光学学报, 2015, 35(9): 0919001.
- [30] Benjamin T B, Feir J E. The disintegration of wave trains on deep water. Part 1. Theory [J]. Journal of Fluid Mechanics, 1967, 27(3): 417-430.
- [31] Lu X, Wang D S. Modulation instability in dispersion managed soliton systems [J]. Laser Technology, 2012, 36(4): 557-561.
卢洵, 王东升. 色散管理孤子系统的调制不稳定性 [J]. 激光技术, 2012, 36(4): 557-561.
- [32] Akhmediev N N, Korneeve V I, Mitskevich N V. Modulation instability in an optical fiber induced by cross-phase modulation [J]. Radiophysics and Quantum Electronics, 1991, 34(1): 73-77.
- [33] Akhmediev N, Soto-Crespo J M, Ankiewicz A. Extreme waves that appear from nowhere: on the nature of rogue waves [J]. Physics Letters A, 2009, 373(25): 2137-2145.
- [34] Akhmediev N, Ankiewicz A, Taki M. Waves that appear from nowhere and disappear without a trace [J]. Physics Letters A, 2009, 373(6): 675-678.
- [35] Shukla P K, Kourakis I, Eliasson B, *et al.* Instability and evolution of nonlinearly interacting

- water waves[J]. *Physical Review Letters*, 2006, 97(9): 094501.
- [36] Tao Y S, He J S. Multisolitons, breathers, and rogue waves for the Hirota equation generated by the Darboux transformation [J]. *Physical Review E*, 2012, 85(2): 026601.
- [37] He J S, Xu S W, Porsezian K. Rogue waves of the Fokas - Lenells equation[J]. *Journal of the Physical Society of Japan*, 2012, 81(12): 124007.
- [38] Li C, He J, Porsezian K, *et al.* Rogue waves of the Hirota and the Maxwell-Bloch equations[J]. *Physical Review E*, 2013, 87(1): 012913.
- [39] Bandelow U, Akhmediev N. Sasa-Satsuma equation: soliton on a background and its limiting cases [J]. *Physical Review E*, 2012, 86(2): 026606.
- [40] Soto-Crespo J M, Grelu P, Akhmediev N. Dissipative rogue waves: extreme pulses generated by passively mode-locked lasers[J]. *Physical Review E*, 2011, 84: 016604.
- [41] Bespalov V I, Talanov V I. Filamentary structure of light beams in nonlinear liquids [J]. *ZhETF Pisma Redaktsiiu*, 1966, 3(12): 471.
- [42] Voronovich V V, Shrira V I, Thomas G. Can bottom friction suppress 'freak wave' formation? [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2008, 604: 263-296.
- [43] He J S, Zhang H R, Wang L H, *et al.* Generating mechanism for higher-order rogue waves[J]. *Physical Review E*, 2013, 87(5): 052914.
- [44] Kedziora D J, Ankiewicz A, Akhmediev N. Circular rogue wave clusters[J]. *Physical Review E*, 2011, 84(5): 056611.
- [45] Kedziora D J, Ankiewicz A, Akhmediev N. Classifying the hierarchy of nonlinear-Schrödinger-equation rogue-wave solutions [J]. *Physical Review E*, 2013, 88: 013207.
- [46] Chowdury A, Kedziora D J, Ankiewicz A, *et al.* Breather solutions of the integrable quintic nonlinear Schrödinger equation and their interactions [J]. *Physical Review E*, 2015, 91(2): 022919.
- [47] Chowdury A, Krolikowski W. Breather-to-soliton transformation rules in the hierarchy of nonlinear Schrödinger equations[J]. *Physical Review E*, 2017, 95(6): 062226.