各向异性和自旋耦合参数对海森堡 XYZ 链量子纠缠的影响

慕琦雄[1,2], 杨晶[1,2], 罗丹丹[1], 单传家[1], 彭新华[1,3], 黄燕霞[1,2*]

[1]湖北师范大学物理与电子科学学院, 湖北 黄石 435002;

[2]中国科学院量子信息重点实验室, 安徽 合肥 230026;

[3]中国科学技术大学近代物理系, 安徽 合肥 230026

摘要 利用 concurrence 作为纠缠度量,研究了 z 方向非均匀磁场中双量子比特的海森堡 XYZ 模型及其基态纠缠在不同参数范围内的性质,通过计算得出了临界磁场值,讨论了平均磁场和临界磁场与量子相变的关系,分析了两个相邻量子位自旋 z 分量 J_z 的相互作用和各向异性参数 γ_B、γ_J 对海森堡模型热纠缠的影响,通过绘制图像说明了各向异性、自旋耦合参数 J_z 和热纠缠之间的关系。研究结果表明:在双量子比特系统中,对于有效的温度 T,当耦合参数 $J_z=0$ 时,随着 γ_J 的增加,临界磁场 B_c 减小,纠缠逐渐消失;但是当耦合参数 $J_z>0$ 时,对各向异性参数 γ_B、γ_J 取合适的值,随着 J_z 的增加,纠缠度达到最大值的磁场范围和温度范围都变大,且纠缠得到有效增强。

关键词 量子光学; 海森堡模型; 热纠缠; 各向异性; 自旋耦合参数

中图分类号 O431.2 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/LOP56.242701

Influences of Anisotropy and Spin Coupling Parameters on Quantum Entanglement of Heisenberg *XYZ* Chain

Mu Qixiong[1,2], Yang Jing[1,2], Luo Dandan[1], Shan Chuanjia[1], Peng Xinhua[1,3], Huang Yanxia[1,2*]

[1] *College of Physics and Electronic Science, Hubei Normal University, Huangshi, Hubei* 435002, *China*;

[2] *Key Laboratory of Quantum Information, Chinese Academy of Sciences, Hefei, Anhui* 230026, *China*;

[3] *Department of Modern Physics, University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui* 230026, *China*

Abstract Herein, we study the Heisenberg two-qubit XYZ chain in a z-directional non-uniform magnetic field by considering concurrence to be the entanglement metric. Further, we explore the properties of ground-state entanglement in different parameter ranges, calculate the critical magnetic field value, and discuss the relations between the average/critical magnetic fields and the quantum phase transition. We also analyze the interaction of the two adjacent qubits of the z-component J_z of the spin and investigate the influences of the anisotropy parameters γ_B and γ_J on the thermal entanglement of the Heisenberg model. The relations among the anisotropy, coupling parameter J_z, and thermal entanglement can be better illustrated by drawing images. The results denote that in a two-qubit system at an effective temperature T, the critical magnetic field B_c decreases and the entanglement gradually disappears as γ_J increases when the coupling parameter J_z is equal to 0. However, when the coupling parameter J_z is greater than 0, the ranges of magnetic field and temperature with the maximum degree of entanglement increase with increasing J_z for appropriate values of the anisotropy parameters γ_B and γ_J, effectively enhancing the entanglement.

Key words quantum optics; Heisenberg model; thermal entanglement; anisotropy; spin coupling parameter

OCIS codes 270.5565; 270.5580; 270.5585

收稿日期: 2019-05-08; **修回日期**: 2019-05-28; **录用日期**: 2019-06-06

基金项目: 湖北师范大学研究生创新科研基金项目(2018035)

* **E-mail**: huangyx617@163.com

1 引　　言

量子纠缠是量子通信和量子计算的重要资源。利用纠缠可以实现量子隐形传态、量子密钥共享、量子克隆、量子密码术等[1-6]。不同的量子系统，其量子纠缠的特性并不完全相同[7-8]。固体系统具有潜在的应用价值，其在量子通信与信息处理过程中的易集成性和可扩展性使其备受关注。海森堡模型作为一种简单的固态量子体系[9-16]，具有良好的纠缠特性、可观测性和可执行性，是量子信息的有效载体。对这样的体系研究具有一定的意义。

人们对各种双量子比特的海森堡模型及多量子比特的海森堡模型进行了很多深入的研究[17-24]。海森堡模型从相互作用的方向可以分为 XYZ 模型、XXZ 模型、XXX 模型、XY 模型及 Ising 模型等。Sun 等[25]研究了非均匀磁场中双量子比特海森堡 XY 链的热纠缠；Zhang 等[26]研究了双量子比特海森堡 XXZ 链中非均匀磁场对热纠缠的影响。Lagmago Kamta 等[27]研究了各项异性参数和磁场对海森堡 XY 链热纠缠的影响。研究表明：在双量子比特的海森堡 XY 链和双量子比特海森堡 XXZ 链中，利用温度或者外加磁场不能有效控制纠缠。本文研究了非均匀磁场下双量子比特海森堡 XYZ 链的基态纠缠和热纠缠，讨论了各向异性参数 γ_B、γ_J 和自旋耦合参数 J_z 对双量子比特海森堡 XYZ 链纠缠的影响，得到了一些有意义的结果。

2 理论模型和基态纠缠

2.1 理论模型

对于一个外加磁场中的双量子比特海森堡模型，它具有哈密顿量的一般形式，即

$$H_{XYZ}=B\left(\frac{1+\gamma_B}{2}\sigma_z^1+\frac{1-\gamma_B}{2}\sigma_z^2\right)+J\left(\frac{1+\gamma_J}{2}\sigma_x^1\sigma_x^2+\frac{1-\gamma_J}{2}\sigma_y^1\sigma_y^2\right)+J_z\sigma_z^1\sigma_z^2,\quad(1)$$

式中：σ_α^i 为第 i 个量子位的泡利算符，$i=1,2$，$\alpha=x,y,z$；B 为平均磁场；J 为任意两相邻比特在 xy 平面的自旋耦合参数，J_z 为任意两相邻比特在 z 方向的自旋耦合参数；各项异性参数 γ_B、γ_J 分别表征的是外部磁场的非均匀度和 xy 平面的非对称性。当 $J\neq0$，$\gamma_B\neq0$，$\gamma_J\neq0$ 时，$J\ \frac{1+\gamma_J}{2}\neq J\ \frac{1-\gamma_J}{2}\neq J_z\neq0$，则系统为非均匀外部磁场中双量子比特海森堡 XYZ 模型。系统 H_{XYZ} 的本征值为

$$\begin{cases}E_1=J_z+\eta_1\\E_2=J_z-\eta_1\\E_3=-J_z+\eta_2\\E_4=-J_z-\eta_2\end{cases},\quad(2)$$

式中：E_1，E_2，E_3，E_4 分别为海森堡 XYZ 哈密顿量的 4 个本征值；η_1，η_2 为参数，$\eta_1=\sqrt{B^2+(J\gamma_J)^2}$，$\eta_2=\sqrt{J^2+(B\gamma_B)^2}$。对应的本征态分别为

$$\begin{cases}|\varphi^+\rangle=\left[1/\sqrt{2\eta_1(\eta_1+B)}\right]\left[(\eta_1+B)|00\rangle+J\gamma_J|11\rangle\right]\\|\varphi^-\rangle=\left[1/\sqrt{2\eta_1(\eta_1-B)}\right]\left[(\eta_1-B)|00\rangle-J\gamma_J|11\rangle\right]\\|\psi^+\rangle=\left[1/\sqrt{2\eta_2(\eta_2+B\gamma_B)}\right]\left[(\eta_2+B\gamma_B)|01\rangle+J|10\rangle\right]\\|\psi^-\rangle=\left[1/\sqrt{2\eta_2(\eta_2-B\gamma_B)}\right]\left[(\eta_2-B\gamma_B)|01\rangle-J|10\rangle\right]\end{cases},\quad(3)$$

式中，φ^+，φ^-，ψ^+，ψ^- 分别为海森堡 XYZ 链哈密顿量的 4 个本征态。

2.2 基态纠缠

为了研究基态纠缠态所携带的纠缠量，采用 concurrence 度量纠缠。Wootters 等[28]引入两量子比特纠缠的 concurrrence(C)：

$$C(\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{AB}})=\max\{0,\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3-\lambda_4\},\quad(4)$$

式中：λ_1、λ_2、λ_3、λ_4 是算符 $\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{AB}}\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{AB}}^{\mathrm{T}}$ 本征值的平方根，$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\lambda_3\geqslant\lambda_4$；$\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{AB}}$ 为两量子比特系统的密度矩阵，$\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{AB}}^{\mathrm{T}}$ 为转置矩阵，$\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{AB}}^{\mathrm{T}}=(\sigma_y\otimes\sigma_y)\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{AB}}^{*}(\sigma_y\otimes\sigma_y)$，$\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{AB}}^{*}$ 是 $\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{AB}}$ 的复共轭。C 的取值范围是[0，1]。(1)式体系中所描写基态纠缠的 concurrence 为

$$C(T=0)=\begin{cases}|J\gamma_J|/\eta_1,\ B<-B_c,\ B>B_c\\|J|(|\gamma_J|/\eta_1-1/\eta_2)/2,\ B=\pm B_c,\\|J|/\eta_2,\ -B_c<B<B_c\end{cases}\quad(5)$$

式中：T 为临界温度，$\pm B_c$ 是基态纠缠发生突变的磁场值，即临界磁场值。从 H_{XYZ} 的本征态可以看出，基态纠缠随着参数 η_1、η_2 和 J_z 的变化而改变，H_{XYZ} 的基态在不同参数范围内对应着不同的本征态。在 $\eta_1+\eta_2<|2J_z|$ 的范围内，如果 $J_z>0$，其基态波函数为 $|\psi^-\rangle$，如果 $J_z<0$，基态波函数为 $|\varphi^-\rangle$，

随着磁场 B 的变化，基态的纠缠是一个平滑的函数。在 $\eta_1+\eta_2>|2J_z|$ 的范围内，如果 $\eta_1-\eta_2<2J_z$，其基态波函数为 $|\psi^-\rangle$，如果 $\eta_1-\eta_2>2J_z$，基态波函数为 $|\varphi^-\rangle$，基态纠缠在磁场某个临界点发生突变。

从(5)式中可以看出，基态纠缠的 concurrence 与 J_z 没有直接的关系，但是本征能量中含有 J_z，故基态的选择受其影响。对于基态 $|\varphi^-\rangle$ 和 $|\psi^-\rangle$：当 $|B|>|B_c|$ 时，基态为 $|\varphi^-\rangle$，若 $\gamma_J=0$，concurrence 为 0；当 $|B|<|B_c|$ 时，基态为 $|\psi^-\rangle$，若 $\gamma_B=0$，concurrence 为 1；当磁场处在临界磁场 $|B|=|B_c|$ 时，发生量子相变，基态为 $|\varphi^-\rangle$ 和 $|\psi^-\rangle$ 的混合态。量子相变是指系统处在绝对零度时，基态纠缠在某个临界点发生急剧变化。$T=0$ 时，基态纠缠 concurrence 随外磁场 B 变化的相变图如图 1 所示。

由图 1 可以看出：当 $\gamma_J=0.33$ 时，在 $B=B_c$ 条件下，基态纠缠发生突变，然后随着磁场的增加逐渐减小；当 $\gamma_J>0.33$ 时，在 $B=B_c$ 条件下，基态纠缠也发生突然变化，但是在 $B\geqslant B_c$ 条件下，基态纠缠突然复活并逐渐减小；当 $\gamma_J=1.00$ 时，基态纠缠只是随着磁场 B 单调减小。通过求解方程 $\eta_1-\eta_2=2J_z$，可以求出临界磁场值 B_c，即

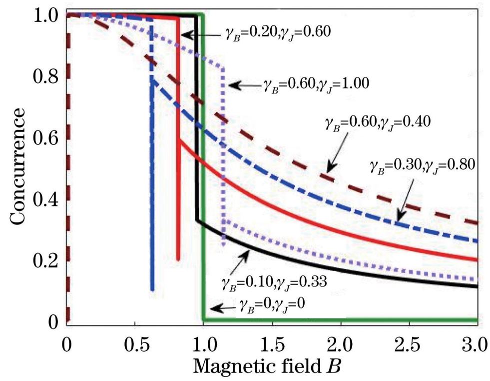

图 1 基态纠缠在不同各向异性参数 γ_B、γ_J 下随磁场变化的相变图

Fig. 1 Phase-transition diagram of ground-state entanglement with magnetic field under different anisotropic parameters γ_B and γ_J

$$B_c=\frac{\sqrt{J^2(1-\gamma_B^2)(1-\gamma_J^2)+4J_z^2(1+\gamma_B^2)+4J_z\sqrt{J^2(1-\gamma_B^2)(1-\gamma_B^2\gamma_J^2)+4\gamma_B^2J_z^2}}}{1-\gamma_B^2}。\tag{6}$$

当 $J_z=0$ 时，$B_c=\sqrt{J^2(1-\gamma_J^2)/(1-\gamma_B^2)}$，这是海森堡 XY 模型，可以看出，随着 γ_J 的增加，临界磁场值 B_c 减小。

临界磁场 B_c 随着各向异性参数 γ_B、γ_J 变化的三维图如图 2 所示。通过对比图 2(a)和图 2(b)可以看出，随着 J_z 的增加，临界磁场值也增加，两个相邻自旋 J_z 的 z 分量的正相互作用引起了相变位置的偏移，也就是说正 J_z 的存在增加了纠缠度达到最大值的磁场区域。更有趣的是，当 $B\geqslant B_c$ 时，通过求解 $|J\gamma_J|/\eta_1>|J|(|\gamma_J|/\eta_1-1/\eta_2)/2$，得出纠缠度复活的条件是 $\frac{\eta_1}{\eta_2}>|\gamma_J|>\frac{\eta_1}{3\eta_2}$。文献[25]指出，$J_z=0$ 时，纠缠的条件是 $\gamma_J>\frac{1}{3}$。

3 热纠缠

随着温度的升高，在 $|00\rangle$，$|01\rangle$，$|10\rangle$，$|11\rangle$ 基下，各自的密度矩阵可表示为

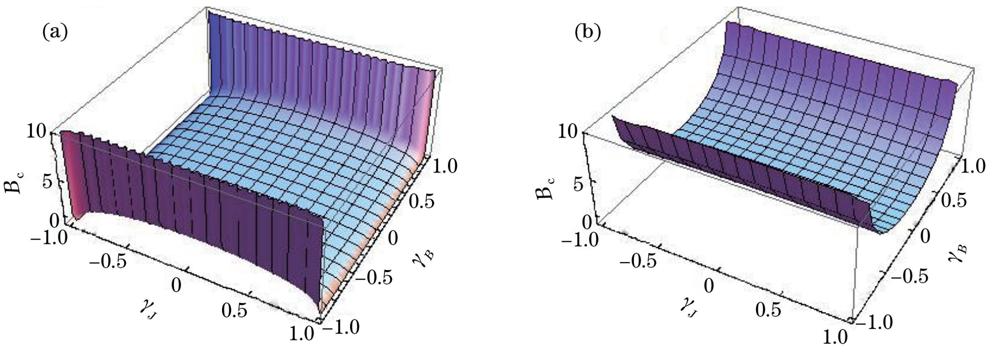

图 2 临界磁场 B_c 随着各向异性参数 γ_B 和 γ_J 的变化。(a) $J=1$，$J_z=0.1$；(b) $J=1$，$J_z=1.0$

Fig. 2 Critical magnetic field B_c as a function of anisotropy parameters γ_B and γ_J. (a) $J=1$, $J_z=0.1$; (b) $J=1$, $J_z=1.0$

$$
\begin{cases}
\rho_1=|\psi_1\rangle\langle\psi_1|=\dfrac{1}{2\eta_1(\eta_1+B)}\begin{pmatrix}(\eta_1+B)^2 & 0 & 0 & (\eta_1+B)J\gamma_J\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ (\eta_1+B)J\gamma_J & 0 & 0 & J^2\gamma_J^2\end{pmatrix}\\
\rho_2=|\psi_2\rangle\langle\psi_2|=\dfrac{1}{2\eta_1(\eta_1-B)}\begin{pmatrix}(\eta_1-B)^2 & 0 & 0 & -(\eta_1-B)J\gamma_J\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -(\eta_1-B)J\gamma_J & 0 & 0 & J^2\gamma_J^2\end{pmatrix}\\
\rho_3=|\psi_3\rangle\langle\psi_3|=\dfrac{1}{2\eta_2(\eta_2+B\gamma_B)}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & (\eta_2+B\gamma_B)^2 & J(\eta_2+B\gamma_B) & 0\\ 0 & J(\eta_2+B\gamma_B) & J^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\
\rho_4=|\psi_4\rangle\langle\psi_4|=\dfrac{1}{2\eta_2(\eta_2-B\gamma_B)}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & (\eta_2-B\gamma_B)^2 & -J(\eta_2-B\gamma_B) & 0\\ 0 & -J(\eta_2-B\gamma_B) & J^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}
\end{cases}, \tag{7}
$$

则系统的密度矩阵为

$$
\boldsymbol{\rho}=\sum\exp\left(-\frac{E_n}{KT}\right)\boldsymbol{\rho}_n=\frac{1}{Z}\begin{pmatrix}\mu_- & 0 & 0 & \nu\\ 0 & w_- & \varepsilon & 0\\ 0 & \varepsilon & w_+ & 0\\ \nu & 0 & 0 & \mu_+\end{pmatrix}, \tag{8}
$$

式中:E_n 为能量的本征值;K 为玻尔兹曼常数(取$K=1$);配分函数 $Z=2\exp(-J_z\beta)\times\cosh\eta_1\beta+2\exp(J_z\beta)\times\cosh\eta_2\beta$,这里 $\beta=\frac{1}{T}$;参数 $\mu_-=\exp(-J_z\beta)\left(\cosh\eta_1\beta-\frac{B}{\eta_1}\sinh\eta_1\beta\right)$, $\mu_+=\exp(-J_z\beta)\times\left(\cosh\eta_1\beta+\frac{B}{\eta_1}\sinh\eta_1\beta\right)$, $\nu=-\exp(-J_z\beta)\frac{J\gamma_J}{\eta_1}\times\sin\eta_1\beta$, $w_-=\exp(J_z\beta)\left(\cosh\eta_2\beta-\frac{B\gamma_B}{\eta_2}\sinh\eta_2\beta\right)$, $w_+=\exp(J_z\beta)\left(\cosh\eta_2\beta+\frac{B\gamma_B}{\eta_2}\sinh\eta_2\beta\right)$, $\varepsilon=-\exp(J_z\beta)\frac{J}{\eta_2}\sinh\eta_2\beta$。

有限温度下系统热纠缠的 concurrence 为

$$
C=\frac{2}{Z}\max\{0,|\varepsilon|\pm\sqrt{w_+w_-},|\nu|\pm\sqrt{\mu_+\mu_-}\}。 \tag{9}
$$

为了研究耦合系数 J_z 和各向异性 γ_J 对系统纠缠度的影响,研究了热纠缠在不同参数下随外磁场 B 和各向异性参数 γ_B 变化的三维图,如图 3 所示。比较图 3(a)和图 3(b)可知,在耦合参数 J_z 相同的情况下,系统的纠缠度随磁场很快减小为 0,但是之后又有了一个很小的复苏,并且随着各向异性参数 γ_J 的增加,复苏比较明显。比较图 3(a)和图 3(c),在各向异性参数 γ_J 相同的情况下,随着耦合参数 J_z 的增加,系统的热纠缠度明显增加,而且纠缠存在的磁场范围得到了扩展。

图 4 给出了热纠缠在不同耦合常数 J_z 下随磁场的变化。从图 4 中可以看出,各向异性参数 γ_J、γ_B 取一定的值,$J_z=0$ 时,系统的热纠缠的最大值很小,并且随磁场的增加逐渐减小为 0;随着 J_z 的增加,系统的热纠缠值明显增大,并且纠缠存在的磁场区域也逐渐扩展,在图 4(a)中可以看出 $J_z=0.9$ 时,纠缠有最大值 $C=1$。对比图 4(a)和 4(b),发现随着各向异性参数 γ_J 的增加,系统的热纠缠却明显降低;对比图 4(a)和(c),发现随着各向异性参数 γ_B 的增加,系统的热纠缠随磁场变化的区域略微增大,但纠缠度的大小不发生变化。因此,减少各向异性 γ_J 可以有效地增加系统的热纠缠。

图 5 给出了热纠缠在不同耦合常数 J_z 下随温度的变化。从图 5(a)可以看出,$J_z=0$ 时,在温度为 0 的时候并没有纠缠,而后随着温度的增加,系统的热纠缠随着温度的变化先增加后很快减小为 0,随着引入 z 分量 J_z 的正相互作用,系统的热纠

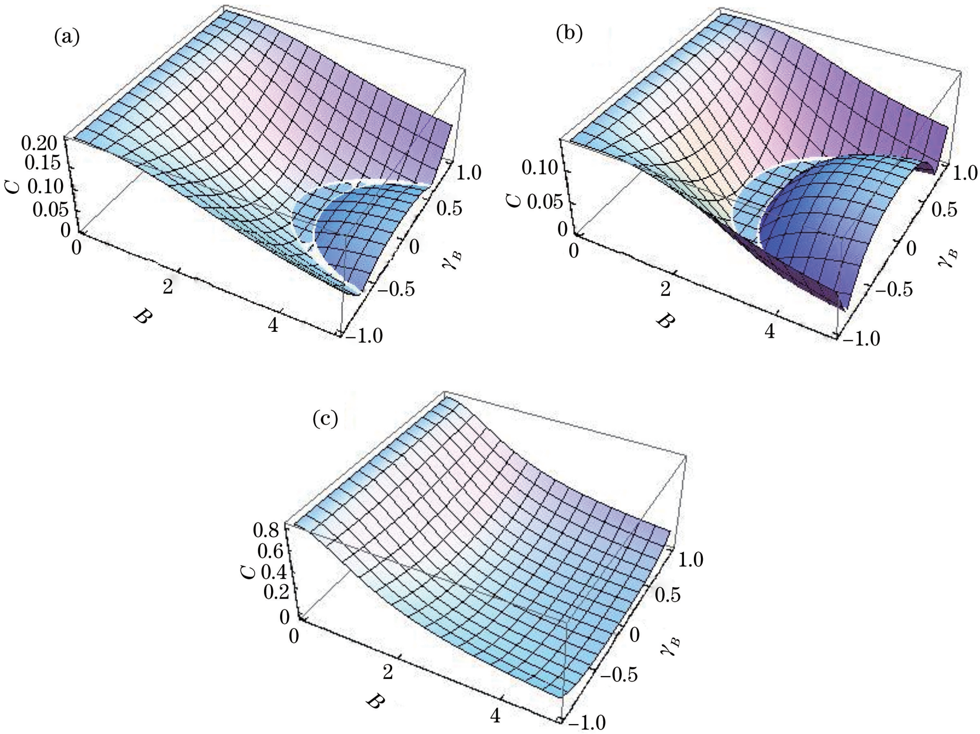

图 3 热纠缠随外磁场 B 和各向异性参数 γ_B 的变化。(a) $J=1,\gamma_J=0.3,T=0.9,J_z=0.1$;(b) $J=1,\gamma_J=0.6,T=0.9,J_z=0.1$;(c) $J=1$, $\gamma_J=0.3,T=0.9,J_z=0.8$

Fig. 3 Thermal entanglement as a function of external magnetic field B and anisotropy parameters γ_B. (a) $J=1$, $\gamma_J=0.3$, $T=0.9$, $J_z=0.1$; (b) $J=1$, $\gamma_J=0.6$, $T=0.9$, $J_z=0.1$; (c) $J=1$, $\gamma_J=0.3$, $T=0.9$, $J_z=0.8$

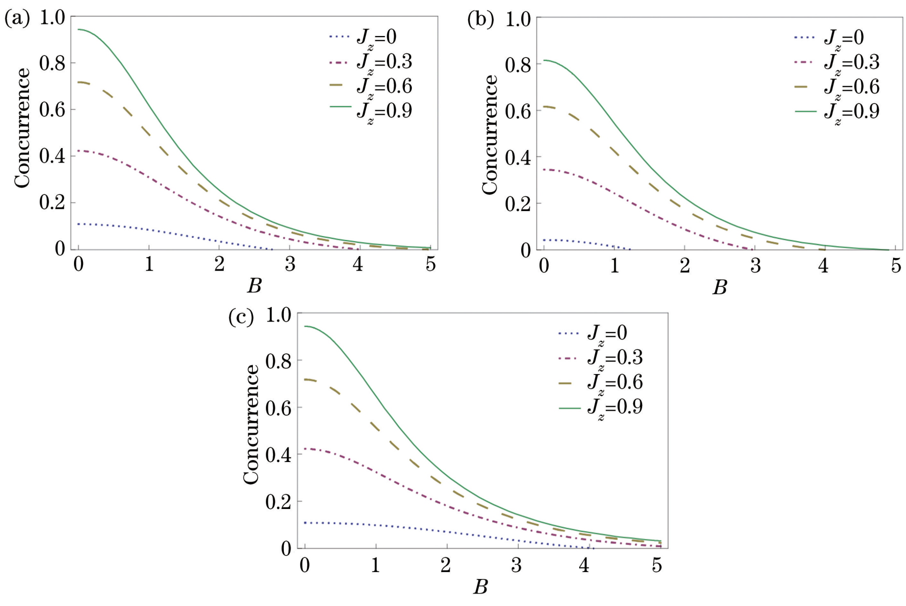

图 4 热纠缠在不同耦合常数 J_z 下随磁场 B 的变化。(a) $J=1$, $\gamma_J=0.3$, $\gamma_B=0.3$, $T=0.9$;(b) $J=1$, $\gamma_J=0.6$, $\gamma_B=0.3$, $T=0.9$;(c) $J=1$, $\gamma_J=0.3$, $\gamma_B=0.6$, $T=0.9$

Fig. 4 Thermal entanglement as a function of magnetic field B under different coupling constants J_z. (a) $J=1$, $\gamma_J=0.3$, $\gamma_B=0.3$, $T=0.9$; (b) $J=1$, $\gamma_J=0.6$, $\gamma_B=0.3$, $T=0.9$; (c) $J=1$, $\gamma_J=0.3$, $\gamma_B=0.6$, $T=0.9$

缠迅速变大然后随着温度的变化缓慢减小,纠缠存在的温度区域也逐渐扩展,并且临界温度值提高。对比图 5(a)和图 5(b),发现随着各向异性参数 γ_J 的增加,系统的热纠缠明显降低;对比图 5(a)和图 5(c),发现随着各向异性参数 γ_B 的增加,系统的热纠缠明显增加,临界温度值减小。

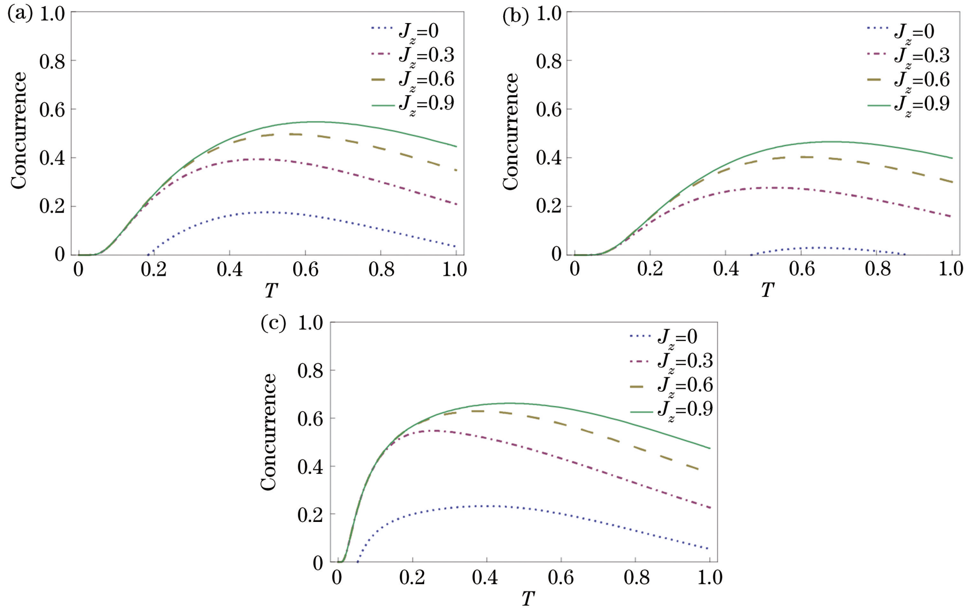

图 5 热纠缠在不同耦合常数 J_z 下随温度 T 的变化。(a) $J=1$, $\gamma_J=0.3$, $\gamma_B=0.3$, $B=1.3$; (b) $J=1$, $\gamma_J=0.6$, $\gamma_B=0.3$, $B=1.3$;(c) $J=1$, $\gamma_J=0.3$, $\gamma_B=0.6$, $B=1.3$

Fig. 5 Thermal entanglementas a function of temperature T under different coupling constants J_z. (a) $J=1$, $\gamma_J=0.3$, $\gamma_B=0.3$, $B=1.3$; (b) $J=1$, $\gamma_J=0.6$, $\gamma_B=0.3$, $B=1.3$; (c) $J=1$, $\gamma_J=0.3$, $\gamma_B=0.6$, $B=1.3$

4 结 论

在非均匀的磁场下,研究了两个量子位海森堡 XYZ 自旋链的量子纠缠。求出了基态纠缠在不同温度下的纠缠度 concurrence,分别讨论了各向异性参数 γ_J、γ_B 和耦合参数 J_z 对系统纠缠的影响。研究结果表明:在 $T=0$ 时,基态纠缠在临界磁场值 B_c 处发生了量子相变,当 $J_z=0$ 时,随着 γ_J 的增加,临界磁场值 B_c 减小,纠缠减小;当 $J_z>0$ 时,纠缠随着 J_z 的变大而增加,同时纠缠度达到最大值的磁场区域也增大。随着温度的增加,在各向异性参数 γ_B 和耦合参数 J_z 一定的情况下,随着各向异性参数 γ_J 的增加,系统的纠缠度明显减少;在各向异性参数 γ_J 和耦合参数 J_z 一定的情况下,随着各向异性参数 γ_B 的增加,纠缠存在的磁场范围和温度范围都得到了扩展,而且系统的热纠缠度增加;在各向异性参数 γ_J,γ_B 一定的情况下,随着自旋耦合参数 J_z 的增加,系统的热纠缠度明显增加,纠缠存在的温度和磁场范围也都得到了扩展,并且临界磁场和临界温度的值提高。因此,当各向异性参数 γ_J、γ_B 取合适的值,耦合参数 J_z 的增加可以有效地增强系统的热纠缠。这些结果为基于非对称系数、自旋粒子间耦合系数、磁场操纵系统纠缠提供了理论依据。

参 考 文 献

[1] Bennett C H, Brassard G, Crépeau C, *et al*. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels[J]. Physical Review Letters, 1993, 70(13): 1895-1899.

[2] DiVincenzo D P, Bacon D, Kempe J, *et al*. Universal quantum computation with the exchange interaction[J]. Nature, 2000, 408(6810): 339-342.

[3] Wang Z, Yao Z H, Gou L D, *et al*. Security analysis of three-state quantum key distribution protocol[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2017, 54(12): 122702.
王者, 姚治海, 苟立丹, 等. 三量子态量子密钥分发协议安全性分析[J]. 激光与光电子学进展, 2017, 54(12): 122702.

[4] Shor P W, Preskill J. Simple proof of security of the BB84 quantum key distribution protocol[J]. Physical Review Letters, 2000, 85(2): 441-444.

[5] Gisin N, Massar S. Optimal quantum cloning machines[J]. Physical Review Letters, 1997, 79(11): 2153-2156.

[6] Ekert A K. Quantum cryptography based on Bell's theorem[J]. Physical Review Letters, 1991, 67(6): 661-663.

[7] Yan L. Effect of interatomic distance in photonic band gap on entanglement evolution property among

three atoms[J]. Acta Optica Sinica, 2017, 37(8): 0827001.
闫丽. 光子禁带中原子间距对三原子间纠缠演化特性的影响[J]. 光学学报, 2017, 37(8): 0827001.

[8] Cong H L, Ren X Z. Exact solutions of energy spectrum and quantum entanglement in Tavis-Cummings model [J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2017, 54(9): 092701.
丛红璐, 任学藻. Tavis-Cummings 模型的能谱和量子纠缠的精确解[J]. 激光与光电子学进展, 2017, 54(9): 092701.

[9] Cheng L Y, Shao X Q, Zhang S, *et al*. Implementation of positive-operator-value measurements for single spin qubit via Heisenberg model[J]. Chinese Physics B, 2010, 19(9): 090311.

[10] Wang Y H, Xia Y J. Pairwise entanglement in three-qubit Heisenberg model with Dzyaloshinskii-Moriya interaction[J]. Acta Physica Sinica, 2009, 58(11): 7479-7485.
王彦辉, 夏云杰. 具有 Dzyaloshinskii-Moriya 相互作用的三量子比特海森伯模型中的对纠缠[J]. 物理学报, 2009, 58(11): 7479-7485.

[11] Wang H, Wu G X. A thermal entangled quantum refrigerator based on a two-qubit Heisenberg model with Dzyaloshinskii-Moriya interaction in an external magnetic field[J]. Chinese Physics B, 2013, 22(5): 050512.

[12] Wang Q, Liao J Q, Zeng H S. Quantum thermal discord in a two-spin-1/2 *XXZ* model[J]. Chinese Physics B, 2010, 19(10): 100311.

[13] Zheng R, Liu B G. Quantum Monte Carlo study on the phase transition for a generalized two-dimensional staggered dimerized Heisenberg model[J]. Chinese Physics B, 2012, 21(11): 116401.

[14] Burkard G, Loss D, DiVincenzo D P. Coupled quantum dots as quantum gates[J]. Physical Review B, 1999, 59(3): 2070-2078.

[15] Kane B E. A silicon-based nuclear spin quantum computer[J]. Nature, 1998, 393(6681): 133-137.

[16] Vrijen R, Yablonovitch E, Wang K, *et al*. Electron-spin-resonance transistors for quantum computing in silicon-germanium heterostructures [J]. Physical Review A, 2000, 62(1): 012306.

[17] Cao M, Zhu S Q. Thermal entanglement between alternate qubits of a four-qubit Heisenberg *XX* chain in a magnetic field[J]. Physical Review A, 2005, 71(3): 034311.

[18] Wang X G. Entanglement in the quantum Heisenberg *XY* model[J]. Physical Review A, 2001, 64(1): 012313.

[19] Zhang G F. Thermal entanglement and teleportation in a two-qubit Heisenberg chain with Dzyaloshinski-Moriya anisotropic antisymmetric interaction [J]. Physical Review A, 2007, 75(3): 034304.

[20] Yang J, Huang Y X. Tripartite and bipartite quantum correlations in the *XXZ* spin chain with three-site interaction [J]. Quantum Information Processing, 2017, 16(11): 281.

[21] Xi Y X, Cheng W W, Huang Y X. Entanglement and quantum teleportation in a three-qubit Heisenberg chain with three-site interactions [J]. Quantum Information Processing, 2015, 14(7): 2551-2562.

[22] Qin M, Ren Z Z, Zhang X. Monogamy quantum correlation near the quantum phase transitions in the two-dimensional *XY* spin systems [J]. Chinese Physics B, 2018, 27(6): 060301.

[23] Cong M Y, Yang J, Huang Y X. Effects of Dzyaloshinskii-Moriya interacton and decoherence on entanglement dynamics in Heisenberg spin chain system with different initial states[J]. Acta Physica Sinica, 2016, 65(17): 170301.
丛美艳, 杨晶, 黄燕霞. 在不同初态下 Dzyaloshinskii-Moriya 相互作用及内禀退相干对海森伯系统的量子纠缠的影响[J]. 物理学报, 2016, 65(17): 170301.

[24] Guo Z Y, Zhang X H, Xiao R H, *et al*. Dynamics of quantum entanglement in a two-qubit *XXZ* Heisenberg system[J]. Acta Optica Sinica, 2014, 34(7): 0727001.
郭战营, 张新海, 肖瑞华, 等. 两粒子 *XXZ* 海森堡系统中的量子纠缠动力学[J]. 光学学报, 2014, 34(7): 0727001.

[25] Sun Y, Chen Y G, Chen H. Thermal entanglement in the two-qubit Heisenberg *XY* model under a nonuniform external magnetic field [J]. Physical Review A, 2003, 68(4): 044301.

[26] Zhang G F, Li S S. Thermal entanglement in a two-qubit Heisenberg *XXZ* spin chain under an inhomogeneous magnetic field[J]. Physical Review A, 2005, 72(3): 034302.

[27] Lagmago Kamta G, Starace A F. Anisotropy and magnetic field effects on the entanglement of a two qubit Heisenberg *XY* chain [J]. Physical Review Letters, 2002, 88(10): 107901.

[28] Wootters W K. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits[J]. Physical Review Letters, 1998, 80(10): 2245-2248.