Λ 型三能级原子与 Pólya 态光场相互作用系统的量子纠缠特性

罗瑞桓[1 **], 萨楚尔夫[1,2 *]

[1]内蒙古师范大学物理与电子信息学院, 内蒙古 呼和浩特 010022;

[2]内蒙古师范大学图书馆, 内蒙古 呼和浩特 010022

摘要 运用量子熵理论,探讨了 Λ 型三能级原子与 Pólya 态光场相互作用时,光场分布参数、原子相对失谐量、最大光子数、光场概率参数和原子初态对系统量子纠缠特性的影响。结果表明:当 Λ 型三能级原子与 Pólya 态光场相互作用时,若初态为两能级等权叠加态,各参量取适当值时可得到最大纠缠度较小的、稳定的、周期性振荡的量子纠缠态,若初态为激发态或三能级等权叠加态,各参量取适当值时可得到最大纠缠度为 1.1 的、稳定的、周期性振荡的纠缠态。

关键词 量子光学; 量子通信; Pólya 态; 量子纠缠特性; Λ 型三能级原子

中图分类号 O431.2 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/LOP56.232701

Quantum Entanglement Characteristics in System Comprising Pólya-State Light Field Interacting with Λ-Type Three-Level Atom

Luo Ruihuan[1 **], Sachuerfu[1,2 *]

[1] *College of Physics and Electronic Information, Inner Mongolia Normal University, Hohhot, Inner Mongolia* 010022, *China*;

[2] *Library, Inner Mongolia Normal University, Hohhot, Inner Mongolia* 010022, *China*

Abstract The influences of light-field distribution parameters, atomic relative detuning, maximum photon number, light-field probability parameters, and initial atomic states on quantum entanglement characteristics of a system comprising a Pólya-state light field interacting with a Λ-type three-level atom are analyzed based on the quantum entropy theory. The results denote that when the Λ-type three-level atom interacts with the Pólya-state light field and the initial state is a two-lower-level energy-equal superposition state, a stable and periodically oscillating entangled state with a relatively small maximum entanglement degree can be obtained for appropriate parameter values. However, if the initial state is an excited state or a three-level equal-weight superposition state, a stable and periodically oscillating entangled state with a maximum entanglement degree of 1.1 can be obtained for appropriate parameter values.

Key words quantum optics; quantum communications; Pólya state; quantum entanglement characteristics; Λ-type three-level atom

OCIS codes 270.5565; 020.1335; 270.5568

1 引　　言

量子纠缠特性[1-2]是量子力学的独有特性之一,也是其有别于经典物理的显著特征,其在实际应用中对量子通信[3-4]、量子计算、量子编码及隐形传态[5-9]等发挥着重要作用。近些年来,量子纠缠领域取得了诸多新的重大突破与进展,如 2016 年我国自主研制的“墨子号”量子科学实验卫星首先实现了星

收稿日期: 2019-04-01; **修回日期**: 2019-05-21; **录用日期**: 2019-05-28

基金项目: 内蒙古自治区自然科学基金(2013MS0115)、内蒙古师范大学“十百千”人才基金(RCPY-2-2012-K-038)

* **E-mail**: Sacrf@imnu.edu.cn; ** **E-mail**: 631252899@qq.com

地百万米级的量子纠缠分发；2018 年芬兰和奥地利科学实验团队分别实现了肉眼可见的量子纠缠；同年，中国科技大学教授郭光灿领导的团队首次在实验上实现了量子纠缠态自检。

研究者们热衷于探讨的量子纠缠态常在量子信息传递[10]过程中作为信息载体出现，且常与各种各样的辐射场发生相互作用，产生各种影响[11-12]，因此辐射场对量子纠缠特性的影响是人们热衷于探讨的一个重要问题。

近些年来，研究者们提出了许多度量量子纠缠的方法，如 von Neumann 熵方法、共生纠缠度方法、部分转置负本征值方法[13-16]等。然而，人们的相关研究多集中在二能级原子在一些典型辐射场(相干态、热态或数态等)作用下的纠缠特性，但从实际出发，辐射场大多是以诸多典型辐射场作为其边界的各种构造态场，如 Pólya 态光场[17-19]、Glauber-Lanchs 态光场和 NCS 态光场[20-21]等。Pólya 态光场就是一种典型的构造态光场，通过调节某些参数，Pólya 态光场可以很方便地描述光场从二项式态[22]历经中间态再到负二项式态的变化过程，因而 Pólya 态光场的表达意义与应用场景将更为广泛。近些年来一些研究表明，三能级原子系统[23]在信息表达等方面相较于二能级原子系统有着更多优势。

文献[23]运用 von Neumann 熵方法探讨了压缩相干态光场与 Λ 型三能级原子相互作用时一些参数对系统纠缠特性的影响，而 Λ 型三能级原子在构造态光场——Pólya 态光场作用下系统的纠缠特性还未被涉及。本文将在文献[23]的基础上，进一步探讨 Λ 型三能级原子在 Pólya 态光场作用下，系统光场的最大光子数、分布参数、概率参数、原子相对失谐量及原子初态等因素对系统的纠缠特性的影响。在相关领域的量子通信、密匙发放及隐形穿态等方面，本文得到的结果均有潜在的应用前景。

2 理论模型与原子约化密度矩阵

图 1 为在两近简并下与能级失谐量为 Δ、频率为 ω 的单模光场相互作用的 Λ 型三能级原子的结构示意图，$|c\rangle$ 为上能级，下能级 $|a\rangle$、$|b\rangle$ 之间单光子跃迁禁戒。在偶极近似和旋波近似下，相互作用绘景下系统的 Hamiltonian 量可以写为

$$H_I = g(|c\rangle\langle b| + |c\rangle\langle a|)\hat{a} + g(|b\rangle\langle c| + |a\rangle\langle c|)\hat{a} + \Delta(|b\rangle\langle b| - |a\rangle\langle a|), \tag{1}$$

式中：$\hat{a}$、$\hat{a}$ 分别表示光场的湮灭与产生算符；g 表示原子-场耦合系数；$|j\rangle\langle k|$ $(j,k=a,b,c,j\neq k)$用来表示跃迁算符；$|k\rangle\langle k|$ $(k=a,b)$用来表示能级 k 的布居算符；$\hbar$ 为约化普朗克常数，$\hbar=1$。

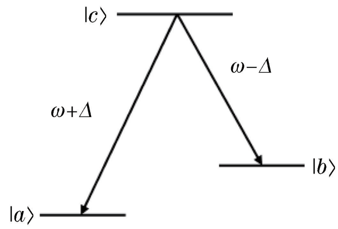

图 1 Λ 型三能级原子结构示意图

Fig. 1 Diagram of Λ-type three-level atomic structure

Pólya 态光场可表示为

$$|\phi_f(0)\rangle = |M,l,\eta\rangle = \sum_{n=0}^{M}[P_n^M(l,\eta)]^{1/2}|n\rangle, \tag{2}$$

其中，

$$P_n^M(l,\eta) = \left[\frac{M!}{n!\,(M-n)!}\right]\frac{\eta(\eta+l)\cdots[\eta+(n-1)l]\bar{\eta}(\bar{\eta}+l)\cdots[\bar{\eta}+(M-n-1)l]}{(1+l)(1+2l)\cdots[1+(M-1)l]}, \tag{3}$$

式中：$|\phi_f(0)\rangle$为 Pólya 态的态矢；$|n\rangle$为光子数态；n 为光子数；M 表示最大光子数，取值范围为正整数；l 表示光场分布参数，取值范围为正实常数；η 表示光场概率参数，且 $0<\eta<1$；$\bar{\eta}=1-\eta$。当 l 趋近于 0 时，光场约化为二项式态光场；而当 $M\to\infty$，$l\to 0$，$\eta\to 0$，$M\eta$ 为常数时，光场约化为负二项式态光场。初始时刻光场处于 Pólya 态，原子处于相干叠加态$C_a|a\rangle+C_b|b\rangle+C_c|c\rangle$，其中 C_a、C_b、C_c 均为概率振幅，系统的任意 t 时刻态矢表示为

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{M}[A_n(t)|a,n+1\rangle + B_n(t)|b,n+1\rangle + C_n(t)|c,n\rangle] + D(t)|a,0\rangle + E(t)|b,0\rangle。 \tag{4}$$

将(1)式和(4)式代入薛定谔方程中可得

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = H_I|\Psi(t)\rangle, \tag{5}$$

解薛定谔方程可得到如下系数：

$$
\begin{cases}
A_n(t)=\dfrac{1}{\Omega_{n+1}^2}\{\{[g^2(n+1)+\Delta^2]P_{n+1}^M(l,\eta)C_a+g^2(n+1)P_{n+1}^M(l,\eta)C_b- \\
\quad \Delta g P_n^M(l,\eta)\sqrt{n+1}C_c\}\cos\Omega_{n+1}t+g^2(n+1)(C_a-C_b)P_{n+1}^M(l,\eta)+ \\
\quad \Delta g P_n^M(l,\eta)\sqrt{n+1}C_c+\mathrm{i}\Omega_{n+1}[\Delta P_{n+1}^M(l,\eta)C_a-gP_n^M(l,\eta)\sqrt{n+1}C_c]\sin\Omega_{n+1}t\} \\
B_n(t)=\dfrac{1}{\Omega_{n+1}^2}\{\{g^2(n+1)P_{n+1}^M(l,\eta)C_a+[g^2(n+1)+\Delta^2]P_{n+1}^M(l,\eta)C_b+ \\
\quad \Delta g P_n^M(l,\eta)\sqrt{n+1}C_c\}\cos\Omega_{n+1}t+g^2(n+1)(C_b-C_a)P_{n+1}^M(l,\eta)-\Delta g P_n^M(l,\eta)\sqrt{n+1}C_c- \\
\quad \mathrm{i}\Omega_{n+1}[\Delta P_{n+1}^M(l,\eta)C_b+gP_n^M(l,\eta)\sqrt{n+1}C_c]\sin\Omega_{n+1}t\} \\
C_n(t)=\dfrac{1}{\Omega_{n+1}^2}\{[\Delta g\sqrt{n+1}P_{n+1}^M(l,\eta)(C_b-C_a)+2g^2(n+1)P_n^M(l,\eta)C_c]\cos\Omega_{n+1}t+ \\
\quad \Delta g P_{n+1}^M(l,\eta)\sqrt{n+1}(C_a-C_b)+\Delta^2P_n^M(l,\eta)C_c- \\
\quad \mathrm{i}g\sqrt{n+1}P_{n+1}^M(l,\eta)\Omega_{n+1}(C_a+C_b)\sin\Omega_{n+1}t\} \\
D(t)=\dfrac{1}{\Omega_1}[\Delta^2P_1^M(l,\eta)C_a\cos\Omega_1t+\mathrm{i}\Omega_1\Delta P_0^M(l,\eta)C_a\sin\Omega_1t] \\
E(t)=\dfrac{1}{\Omega_1}[\Delta^2P_1^M(l,\eta)C_b\cos\Omega_1t-\mathrm{i}\Omega_1\Delta P_0^M(l,\eta)C_b\sin\Omega_1t]
\end{cases}, \tag{6}
$$

$$
\Omega_{n+1}=\sqrt{2g^2(n+1)+\Delta^2}\,。 \tag{7}
$$

通过对光场自由度取迹,可得原子约化密度矩阵为

$$
\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{A}}(t)=\mathrm{Tr}_f(|\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|)=\begin{pmatrix}
\sum\limits_n|A_n(t)|^2 & \sum\limits_n A_n(t)B_n^*(t) & \sum\limits_n A_n(t)C_n^*(t) \\
\sum\limits_n B_n(t)A_n^*(t) & \sum\limits_n|B_n(t)|^2 & \sum\limits_n B_n(t)C_n^*(t) \\
\sum\limits_n C_n(t)A_n^*(t) & \sum\limits_n C_n(t)B_n^*(t) & \sum\limits_n|C_n(t)|^2
\end{pmatrix}, \tag{8}
$$

式中:$A_n^*(t)$,$B_n^*(t)$,$C_n^*(t)$均为其原函数的复共轭。再通过取迹可求得系统中原子(光场)的 von Neumann 熵为

$$
S_{\mathrm{F}}(t)=S_{\mathrm{A}}(t)=-\mathrm{Tr}[\rho_{\mathrm{A}}(t)\ln\rho_{\mathrm{A}}(t)]=-\sum_{x=1}^{3}\lambda_x(t)\ln\lambda_x(t), \tag{9}
$$

式中:$\lambda_x(t)$为密度矩阵的第 x 个本征值。通过 von Neumann 熵借助数值计算即可详细探讨各个参数对此相互作用系统的纠缠演化特性的影响。

3 数值计算与数据分析

3.1 原子初态为激发态

为了便于计算,定义了原子相对失谐量 $r=\Delta/g$。图 2 表示初态为激发态($C_a=C_b=0$,$C_c=1$)时,光场分布参数 l、原子相对失谐量 r、最大光子数 M 和光场概率参数 η 分别取单一变量来表现各参数对 $S_{\mathrm{A}}(t)$随时间演化规律的影响。图 2(a)~(c)表示当最大光子数 $M=50$,光场分布参数 $l=0.01$,相对失谐量 $r=1$ 时,光场概率参数 η 对系统量子纠缠演化的影响,易发现,当 η 取较小值,即 $\eta=0.1$ 时,系统量子纠缠图像呈现无规则振荡且最大纠缠度较大,随着概率参数 η 取值逐渐增大,最大纠缠度逐渐变小,振荡图像逐渐表现出波谷随时间演化逐渐增大且比较规则的类周期性振荡。图 2(c)~(e)表示当最大光子数$M=50$,光场概率参数 $\eta=0.9$,相对失谐量 $r=1$ 时,光场分布参数 l 对系统量子纠缠演化的影响,易发现,随着分布参数 l 取值的增大,系统最大纠缠度无明显变化,但平均纠缠度逐渐增大,且振荡图像逐渐表现出更多的无规则振荡。图 2(c)、(f)、(g)表示当最大光子数$M=50$,光场概率参数 $\eta=0.9$,光场分布参数 $l=0.01$ 时,相对失谐量 r 对系统量子纠缠演化的影响,可以发现,随着相对失谐量 r 取值的增大,系统最大纠缠度先增大后减小。如图 2(f)所示,在$r=7$时,最大纠缠度已经接近最大值

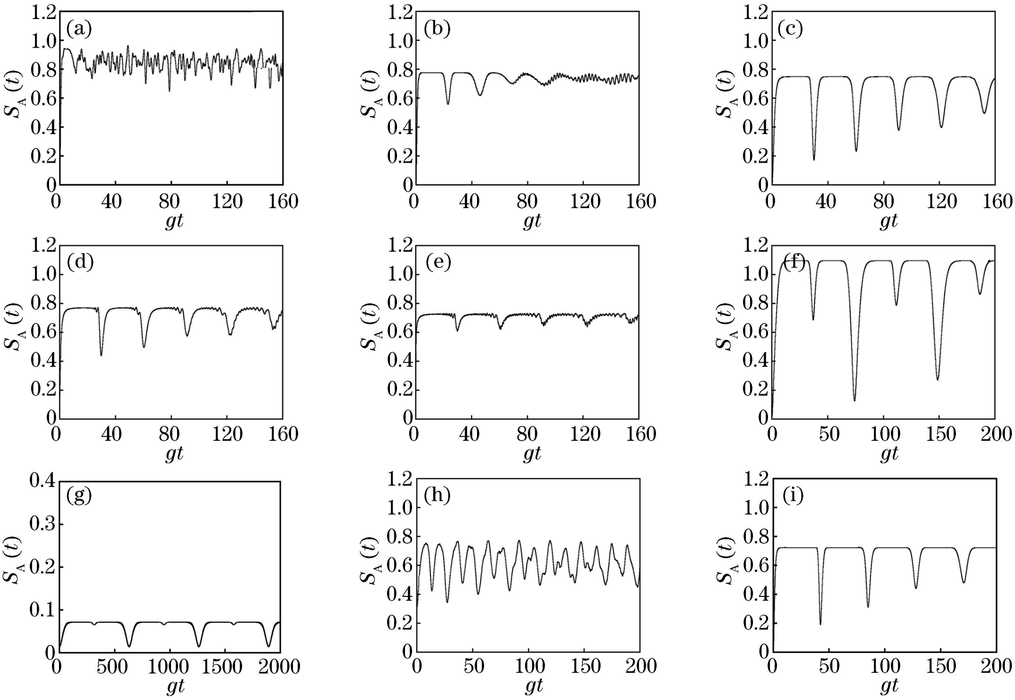

图 2 原子初态为激发态时原子熵随各参数变化的时间演化。(a) $\eta=0.1$,$M=50$,$l=0.01$,$r=1$;(b) $\eta=0.5$,$M=50$,$l=0.01$,$r=1$;(c) $\eta=0.9$,$M=50$,$l=0.01$,$r=1$;(d) $l=0.10$,$M=50$,$\eta=0.9$,$r=1$;(e) $l=0.5$,$M=50$,$\eta=0.9$,$r=1$;(f) $r=7$,$M=50$,$l=0.01$,$\eta=0.9$;(g) $r=100$,$M=50$,$l=0.01$,$\eta=0.9$;(h) $M=10$,$r=1$,$l=0.01$,$\eta=0.9$;(i) $M=100$,$r=50$,$l=0.01$,$\eta=0.9$

Fig. 2 Time evolution of atomic entropy with various parameters when initial state of atom is excited. (a) $\eta=0.1$, $M=50$, $l=0.01$, $r=1$; (b) $\eta=0.5$, $M=50$, $l=0.01$, $r=1$; (c) $\eta=0.9$, $M=50$, $l=0.01$, $r=1$; (d) $l=0.10$, $M=50$, $\eta=0.9$, $r=1$; (e) $l=0.5$, $M=50$, $\eta=0.9$, $r=1$; (f) $r=7$, $M=50$, $l=0.01$, $\eta=0.9$; (g) $r=100$, $M=50$, $l=0.01$, $\eta=0.9$; (h) $M=10$, $r=1$, $l=0.01$, $\eta=0.9$; (i) $M=100$, $r=50$, $l=0.01$, $\eta=0.9$

$S_A=\ln 3\approx 1.1$,但当相对失谐量 r 取值继续增大,最大纠缠度却开始逐渐减小,当 $r=100$ 时,系统已接近退纠缠,如图 2(g)所示,而振荡图像由 r 取较小值时的波谷随时间演化逐渐增大且较规则的类周期性振荡变为十分规则的周期性振荡,且振荡周期逐渐变长。如图 2(c)和图 2(h)~(i)所示,当相对失谐量$r=1$,光场概率参数 $\eta=0.9$,光场分布参数$l=0.01$ 时,随着最大光子数 M 取值的增大,系统最大纠缠度无明显变化,但振荡图像规则程度及周期性逐渐增强,且振荡周期逐渐变大。

3.2 原子初态为两下能级等权叠加态

初态为两下能级相干叠加态($C_a=C_b=1/\sqrt{2}$,$C_c=0$)时,分布参数 l、相对失谐量 r、最大光子数 M 和概率参数 η 分别取单一变量来表现各参数对 $S_A(t)$ 随时间演化规律的影响,如图 3 所示。图 3(a)~(c)表示当最大光子数 $M=50$,光场分布参数 $l=0.01$,相对失谐量 $r=1$ 时,光场概率参数 η 对系统量子纠缠演化的影响,易发现,随着概率参数 η 取值的增大,系统最大纠缠度有轻微减小,且振荡图像的变化也与初态为激发态时类似,但最大纠缠度相对较小。图 3(c)~(e)表示当最大光子数 $M=50$,光场概率参数 $\eta=0.9$,相对失谐量 $r=1$ 时,光场分布参数 l 对系统量子纠缠演化的影响,易发现,随着分布参数 l 取值的增大,系统最大纠缠度逐渐减小,振荡图像逐渐出现许多小幅高频振荡。图 3(c)、(f)和(g)表示当最大光子数 $M=50$,光场概率参数 $\eta=0.9$,光场分布参数 $l=0.01$ 时,相对失谐量 r 对系统量子纠缠演化的影响,可以发现,随着相对失谐量 r 取值的增大,系统最大纠缠度无明显变化,而振荡图像的规则程度及周期性均逐渐增强,表现出周期性十分稳定的纠缠态,且周期逐渐变大。图 3(c)、(h)、(i)表示当相对失谐量 $r=1$,光场概率参数 $\eta=0.9$,光场分布参数 $l=0.01$ 时,最大光子数 M 对系统量子纠缠演化的影响,可以发现,随着最大光子数 M 取值的增大,系统最大纠缠度也无明显变化,但振荡图像规则程度及周期性都逐渐增强,且振荡周期逐渐变大。

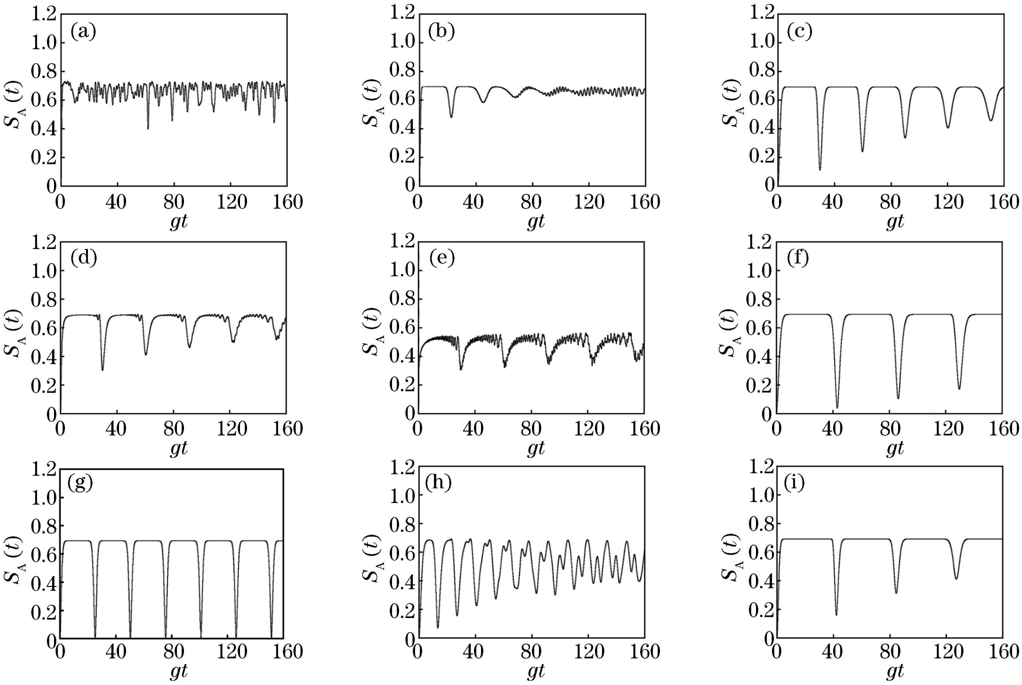

图 3 原子初态为两下能级等权叠加态时原子熵随各参数的时间演化。(a) $\eta=0.1$,$M=50$,$l=0.01$,$r=1$;(b) $\eta=0.5$,$M=50$,$l=0.01$,$r=1$;(c) $\eta=0.9$,$M=50$,$l=0.01$,$r=1$;(d) $l=0.10$,$M=50$,$\eta=0.9$,$r=1$;(e) $l=0.90$,$M=50$,$\eta=0.9$,$r=1$;(f) $r=10$,$M=50$,$l=0.01$,$\eta=0.9$;(g) $r=100$,$M=50$,$l=0.01$,$\eta=0.9$;(h) $M=10$,$r=1$,$l=0.01$,$\eta=0.9$;(i) $M=100$,$r=50$,$l=0.01$,$\eta=0.9$

Fig. 3 Time evolution of atomic entropy with various parameters when initial state of atom is equal weight superposition state of two lower energy levels. (a) $\eta=0.1$, $M=50$, $l=0.01$, $r=1$; (b) $\eta=0.5$, $M=50$, $l=0.01$, $r=1$; (c) $\eta=0.9$, $M=50$, $l=0.01$, $r=1$; (d) $l=0.10$, $M=50$, $\eta=0.9$, $r=1$; (e) $l=0.90$, $M=50$, $\eta=0.9$, $r=1$; (f) $r=10$, $M=50$, $l=0.01$, $\eta=0.9$; (g) $r=100$, $M=50$, $l=0.01$, $\eta=0.9$; (h) $M=10$, $r=1$, $l=0.01$, $\eta=0.9$; (i) $M=100$, $r=50$, $l=0.01$, $\eta=0.9$

3.3 原子初态为三能级等权叠加态

初态为三能级等权叠加态($C_a=C_b=C_c=1/\sqrt{3}$)时,分布参数 l、相对失谐量 r、最大光子数 M 和概率参数 η 分别取单一变量来表现各参数对 $S_A(t)$随时间演化规律的影响,如图 4 所示。图 4(a)~(c)表示当最大光子数 $M=50$,光场分布参数 $l=0.01$,相对失谐量 $r=1$ 时,光场概率参数 η 对系统量子纠缠演化的影响,易发现,当 η 的取值对系统量子纠缠图像的影响与初态为激发态时类似,但最大纠缠度明显较小。图 4(c)~(e)表示当最大光子数 $M=50$,光场概率参数 $\eta=0.9$,相对失谐量 $r=1$ 时,光场分布参数 l 对系统量子纠缠演化的影响,易发现,随着分布参数 l 取值的增大,系统最大纠缠度逐渐增大,且振荡图像逐渐出现许多小幅高频振荡。图 4(c)、(f)和(g)表示当最大光子数 $M=50$,光场概率参数 $\eta=0.9$,光场分布参数 $l=0.01$ 时,相对失谐量 r 对系统量子纠缠演化的影响,可以发现,随着相对失谐量 r 取值的增大,系统最大纠缠度逐渐增大,如图 4(g)所示,在 $r=100$ 时,最大纠缠度已经接近最大值 $S_{\mathrm{A}}=\ln 3\approx1.1$,振荡图像也随着 r 取值的增大,规则程度与周期性逐渐增强,直到表现出比较稳定的周期性纠缠态,且振荡周期逐渐变长。图 4(c)、(h)和(i)表示当相对失谐量 $r=1$,光场概率参数 $\eta=0.9$,光场分布参数 $l=0.01$ 时,最大光子数 M 对系统量子纠缠演化的影响,可以发现,随着最大光子数 M 取值的增大,系统最大纠缠度逐渐减小,但振荡图像周期性逐渐增强,且振荡周期逐渐变大。

4 结 论

运用量子熵理论,研究了 Pólya 态光场与 Λ 型三能级原子相互作用系统的量子纠缠特性。给出了不同原子初态及 Pólya 态光场参数条件下,该光场-原子相互作用系统中描述量子纠缠特性的 von Neumann 熵随时间的演化曲线。结果显示:随着原子初态和Pólya态光场参量的改变,von Neumann

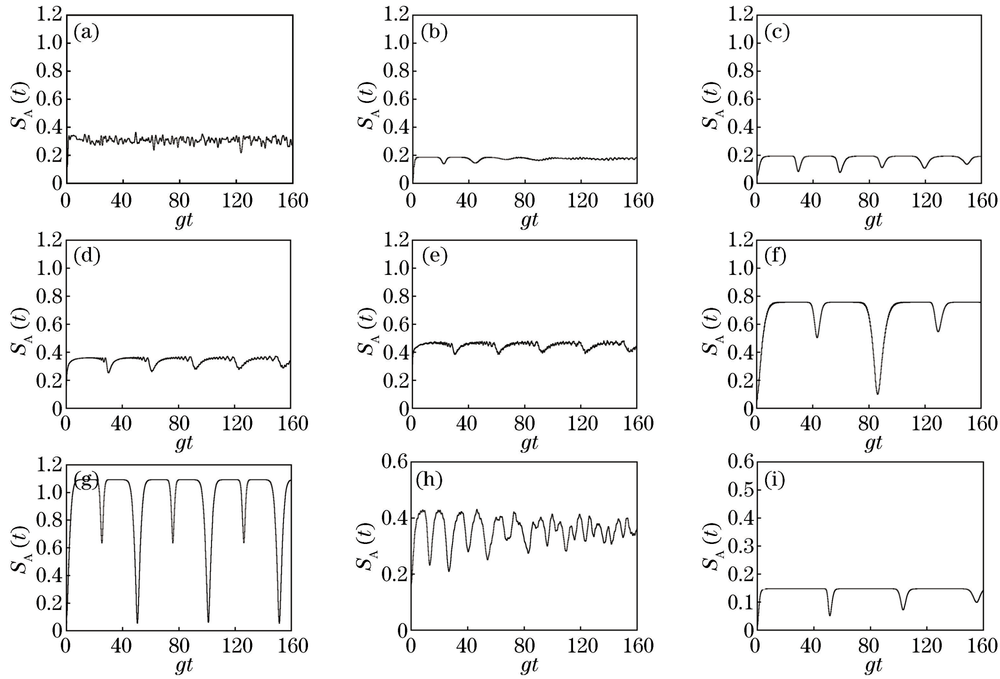

图 4　原子初态为三能级等权叠加态时原子熵随各参数的时间演化。(a) $\eta=0.1$, $M=50$, $l=0.01$, $r=1$; (b) $\eta=0.5$, $M=50$, $l=0.01$, $r=1$; (c) $\eta=0.9$, $M=50$, $l=0.01$, $r=1$; (d) $l=0.10$, $M=50$, $\eta=0.9$, $r=1$; (e) $l=1.00$, $M=50$, $\eta=0.9$, $r=1$; (f) $r=10$, $M=50$, $l=0.01$, $\eta=0.9$; (g) $r=100$, $M=50$, $l=0.01$, $\eta=0.9$; (h) $M=10$, $r=1$, $l=0.01$, $\eta=0.9$; (i) $M=150$, $r=50$, $l=0.01$, $\eta=0.9$

Fig. 4 Time evolution of atomic entropy with various parameters when initial atomic state is a three-level equal weight superposition state. (a) $\eta=0.1$, $M=50$, $l=0.01$, $r=1$; (b) $\eta=0.5$, $M=50$, $l=0.01$, $r=1$; (c) $\eta=0.9$, $M=50$, $l=0.01$, $r=1$; (d) $l=0.10$, $M=50$, $\eta=0.9$, $r=1$; (e) $l=1.00$, $M=50$, $\eta=0.9$, $r=1$; (f) $r=10$, $M=50$, $l=0.01$, $\eta=0.9$; (g) $r=100$, $M=50$, $l=0.01$, $\eta=0.9$; (h) $M=10$, $r=1$, $l=0.01$, $\eta=0.9$; (i) $M=150$, $r=50$, $l=0.01$, $\eta=0.9$

熵随时间的变化呈现出丰富的演化特性，尤其是当原子初始处于激发态和三能级等权叠加态，光场参数取确定值时，原子相对失谐量对场-原子相互作用系统的 von Neumann 熵影响较大。在一定时域上，von Neumann 熵可取最大值 $S_A=\ln 3\approx 1.1$，表明系统中场与原子之间的纠缠达到最强程度。这一性质在量子信息领域中具有潜在的应用价值。

参 考 文 献

[1] Einstein A, Podolsky B, Rosen N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?[J]. Physical Review, 1935, 47(10): 777-780.

[2] Schrödinger E. Die gegenwärtige situation in der quantenmechanik[J]. Naturwissenschaften, 1935, 23(48): 807-812.

[3] Qiu C D, Lu D M. Entanglement characteristics in two-dimensional coupled cavity systems[J]. Acta Optica Sinica, 2016, 36(5): 0527001.
邱昌东，卢道明. 两维耦合腔系统中的纠缠特性[J]. 光学学报, 2016, 36(5): 0527001.

[4] Wang X L, Huang Q G, Zhang Z W. Quantum setting transmission protocol based on channel self-checking [J]. Chinese Journal of Quantum Electronics, 2018, 35(6): 705-713.
王新良，黄青改，张中卫. 基于信道自校验的量子定值传输协议[J]. 量子电子学报, 2018, 35(6): 705-713.

[5] Cai X H, Nie J J, Guo J R. Entanglement translation and quantum teleportation of the single-photon entangled state[J]. Acta Photonica Sinica, 2006, 35(5): 776-779.
蔡新华，聂建军，郭杰荣. 单光子纠缠态的纠缠转移和量子隐形传态[J]. 光子学报, 2006, 35(5): 776-779.

[6] Zhang Q, Li F L, Li H R. Teleportation of a two-mode Gaussian state through double two-mode-squeezed-state quantum channels[J]. Acta Physica Sinica, 2006, 55(5): 2275-2280.

张茜，李福利，李宏荣．基于双模压缩信道的双模高斯态量子隐形传态[J]．物理学报，2006，55(5)：2275-2280．

[7] Zhang L H, Li G X. Entanglement properties of two-atoms interacting with field in dissipative cavity[J]. Acta Photonica Sinica, 2011, 40(4): 607-612.
张立辉，李高翔．耗散腔中双原子与光场的纠缠演化特性[J]．光子学报，2011，40(4)：607-612．

[8] Sun Y R, Huo M R, Yan Z H, *et al*. Quantum teleportation based on four-partite entangled states [J]. Acta Optica Sinica, 2018, 38(5): 0527001.
孙颖榕，霍美如，闫智辉，等．基于四组分纠缠态的量子离物传态[J]．光学学报，2018，38(5)：0527001．

[9] Huang C J, He H Y, Zhou M, *et al*. Entropy evolution of field interacting with two entangled-atoms[J]. Acta Physica Sinica, 2006, 55(4): 1764-1768.
黄春佳，贺慧勇，周明，等．光场与纠缠双原子相互作用过程中的熵演化特性[J]．物理学报，2006，55(4)：1764-1768．

[10] Yamaguchi K, Watamura N, Hotta M. Quantum information capsule and information delocalization by entanglement in multiple-qubit systems[J]. Physics Letters A, 2019, 383(12): 1255-1259.

[11] Wang J R, Lai Y Z. Influence of chromatic dispersion on evolution of entanglement in T-C model of two-atom[J]. Journal of Taiyuan University of Science and Technology, 2009, 30(4): 346-349.
王建荣，赖云忠．色散对 T-C 模型两原子纠缠演化特性的影响[J]．太原科技大学学报，2009，30(4)：346-349．

[12] Liu X Y, Ren X Z, Xu Y H. Entanglement properties of Tavis-Cummings model without rotating wave approximation [J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2018, 55(10): 102701.
刘雪莹，任学藻，徐玉虎．非旋波近似下 Tavis-Cummings 模型的纠缠特性[J]．激光与光电子学进展，2018，55(10)：102701．

[13] Cheng Q L, Xie S Y, Yang Y P. The influence of the field frequency modulation on quantum entanglement via two-photon process [J]. Acta Physica Sinica, 2008, 57(11): 6968-6975.
成秋丽，谢双媛，羊亚平．频率变化的光场对双光子过程中量子纠缠的调控[J]．物理学报，2008，57(11)：6968-6975．

[14] Li S B, Xu J B. Entanglement, Bell violation, and phase decoherence of two atoms inside an optical cavity [J]. Physical Review A, 2005, 72(2): 022332.

[15] Jiang D L, Ren X Z, Cong H L, *et al*. Entanglement properties of two entangled atoms without rotating wave approximation [J]. Acta Photonica Sinica, 2010, 39(9): 1636-1640.
姜道来，任学藻，丛红璐，等．非旋波近似下两纠缠原子的纠缠特性[J]．光子学报，2010，39(9)：1636-1640．

[16] Liao Q H, Jin P, Ye Y. Entanglement dynamic properties of nitrogen-vacancy centers coupled to mechanical resonators in nanodiamond[J]. Chinese Journal of Lasers, 2018, 45(12): 1212001.
廖庆洪，金鹏，叶杨．纳米金刚石氮空位中心耦合机械振子的纠缠动力学特性[J]．中国激光，2018，45(12)：1212001．

[17] Fu H C. Pólya states of quantized radiation fields, their algebraic characterization and non-classical properties[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1997, 30(5): L83-L89.

[18] Li B, Sachuerfu, Guo C L. Quantum properties in a system of two two-level atoms interacting with Pólya state light field [J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2016, 53(3): 032702.
李斌，萨楚尔夫，郭彩丽．两个二能级原子与 Pólya 态光场相互作用系统的量子特性[J]．激光与光电子学进展，2016，53(3)：032702．

[19] Wang Y Q, Sachuerfu, Wang Y N. Fidelity in a system of a moving two-level atom interacting with Pólya state light for multi-photon transition [J]. Chinese Journal of Lasers, 2015, 42(7): 0718001.
王艳清，萨楚尔夫，王亚男．多光子跃迁下 Pólya 态光场与运动二能级原子相互作用系统的保真度[J]．中国激光，2015，42(7)：0718001．

[20] Kayhan H. Entanglement of two superconducting charge qubits with the Glauber-Lachsstate [J]. Physica Scripta, 2011, 83(5): 055003.

[21] Feng C, Sachuerfu, Li H X. Entanglement of an atom interacting with Glauber-Lachs state in multiphoton Jaynes-Cummings model [J]. Acta Optica Sinica, 2013, 33(5): 0527001.
冯川，萨楚尔夫，李红星．多光子 Jaynes-Cummings 模型中原子与 Glauber-Lachs 场态相互作用的量子纠缠[J]．光学学报，2013，33(5)：0527001．

[22] Wang X C, Cao Z L. Radiation squeezing of the system of the binomial states field interacting with a moving Ξ-type three-level atom[J]. Journal of Jilin University(Science Edition), 2006, 44(3): 445-449.

汪贤才，曹卓良．二项式光场与运动 Ξ 型三能级原子相互作用系统的光场压缩效应[J]．吉林大学学报(理学版)，2006，44(3)：445-449．

[23] Haribala，Sachuerfu，Yang R F，*et al*．Quantum entanglement of the squeezed coherent state interacting with a Λ-type three-level atom[J]．Acta Photonica Sinica，2009，38(7)：1846-1851．
哈日巴拉，萨楚尔夫，杨瑞芳，等．压缩相干态光场与 Λ 型三能级原子相互作用的纠缠特性[J]．光子学报，2009，38(7)：1846-1851．