

利用 Tikhonov 正则化改进移动最小二乘的图像变形算法

崔小曼, 于凤芹*

江南大学物联网工程学院, 江苏 无锡 214122

摘要 针对移动最小二乘算法在图像变形过程中, 求解的线性方程组系数矩阵会出现不可逆、求解不稳定的问题, 通过引入 Tikhonov 正则化, 运用 L-曲线法求解正则参数, 对系数矩阵施加约束项从而得到精确解, 避免病态方程组的形成; 针对在实现图像变形过程中, 定位特征点人工量大且特征点不足的问题, 运用 Dlib 库自动提取 68 个覆盖人脸五官和轮廓的特征点。仿真实验结果表明, 与原算法相比, 提出的改进算法可以使图像产生清晰、准确的变形。

关键词 图像处理; 图像变形; 移动最小二乘; Tikhonov 正则化; Dlib 库

中图分类号 TN919.85

文献标识码 A

doi: 10.3788/LOP56.231004

Moving Least Squares Based Image Deformation Algorithm Improved with Tikhonov Regularization

Cui Xiaoman, Yu Fengqin*

School of Internet of Things Engineering, Jiangnan University, Wuxi, Jiangsu 214122, China

Abstract In the image deformation process of the moving least squares based algorithm, the coefficient matrix of the solved linear equations is irreversible and unstable. In this study, we apply a constraint term to the coefficient matrix to obtain the exact solution and avoid the formation of ill-conditioned equations by introducing Tikhonov regularization and using the L-curve method to solve the regular parameters. To overcome the limitation of a large number of manually localized feature points and an insufficient number of feature points in the process of image deformation, the Dlib library is employed to automatically extract 68 feature points covering facial features and contours. Simulation results demonstrate that, compared to the original algorithm, the proposed algorithm can produce clear and accurate image deformation.

Key words image processing; image distortion; moving least squares; Tikhonov regularization; Dlib library

OCIS codes 100.2960; 100.4994; 150.1135

1 引言

图像变形是在给定的源图像和目标图像之间, 找到一种可逆的线性变换函数, 将未变形图像的每个像素点, 通过这种线性变换得到变形后的图像的一种技术^[1-2]。图像变形技术在医学影像、影视业^[3]、教育领域、气象预报、地理信息系统、刑侦系统等领域有广泛应用^[4]。基于控制点的图像变形算法

是一种新的图像变形算法, 利用控制点实现图像变形, 算法简单、高效, 变形的结果明显, 是现在研究的热点。

基于控制点的图像变形算法首先要提取人脸特征点。目前使用广泛的人脸特征点定位算法, 首先手工标定脸部的一些关键特征点, 以瞳孔位置或者鼻尖位置的特征点为参照点实现脸部区域的变形, 然后分区域对人脸特征点位置进行定位。朱希成^[5]

收稿日期: 2019-04-23; 修回日期: 2019-05-14; 录用日期: 2019-05-27

基金项目: 国家自然科学基金(61573168)、中央高校基本科研业务费专项资金(JUSRP51733B)

* E-mail: 13961720781@163.com

采用改进的主动形状模型(ASM)方法实现特征点的定位,实现过程中首先要按照顺序标定每幅图像上的 n 个特征点,但是该方法在训练和测试阶段都需要高分辨的图像,并且要求标点准确,否则会出现易受局部最优影响的非凸优化问题。罗岱等^[6]提出采用 Stasm 开源库完成人脸特征点的检测,获取人脸的 63 个特征点,并对人脸额头部分进行手动标点,但是因本文所实现的图像变形不需要对人脸额头部分进行特征点提取,所以当训练集较大时,罗岱等的方法的手动标点会很繁琐。

目前,在基于控制点的图像变形算法中,比较成熟的技术是基于移动最小二乘(MLS)法的图像变形。Schaefer 等^[7]提出利用控制点或控制直线段对图像进行变形,MLS 法的优点非常明显,但是缺点是有时候会形成病态方程组。为解决该问题,左传伟等^[8]通过推导系数矩阵 \mathbf{A} 可逆的充分必要条件,研究半径 r 的选取对矩阵 \mathbf{A} 条件数的影响以及半径 r 的选取方法,但是该方法只考虑了节点分布均匀情况,并未考虑节点分布不均匀对半径选取的影响。周程灏等^[9]针对图像复原过程中反问题的病态性和噪声抑制,提出采用拉普拉斯正则化来抑制噪声,进而解决问题的病态性,该方法是解决病态方程的一个新思路。杨建军等^[10]提出采用核基的核近似法克服由 \mathbf{A} 矩阵奇异或病态产生的不稳定问题,但是该方法只提高了近似稳定性。李娇等^[11]提出代数重建技术(ART),根据线性方程组的求解思想,通过对矩阵进行逐行计算,以解决离散化数学图像重建为目的,避免对方程组直接求逆,从而快速有效地得到方程解,但是当矩阵很大时,逐行求解会增加计算复杂度。

针对文献[5]、[6]提出的问题,本文提出在基于点的图像变形中,利用 Dlib 库提取 68 个人脸特征点,采用全自动标点方式,同时增加特征点个数,避免手动标点的麻烦。针对利用 MLS 进行多项式拟合过程会出现多项式拟合的“病态问题”,本文提出在 MLS 的基础上结合 Tikhonov 的正则化方法^[12-14],运用 L-曲线法^[15]求解正则参数,通过对病态系数矩阵进行约束,能改善法矩阵的结构、减小均方误差^[16]。

2 基于 Tikhonov 正则化改进的 MLS 图像变形算法原理

2.1 利用 Dlib 库自动检测人脸 68 个特征点

Dlib 库是一个使用现代 C++ 技术编写的开源通用框架,库中包含多样模块,有机器学习、图像处

理和数据压缩等,图像处理模块包含人脸检测函数和关键点定位函数。在很多情况下,标记点都是手动选择的,选择难度大、费时且繁琐。根据 MPEG-4^[17]中定义的人脸特征点参数设置,为实现本文所要求的人脸图像变形,由 Dlib 库自动提取包含眉毛、鼻子、嘴巴等面部区域的 68 个人脸特征点。这些特征点分布密集,是实现变形的关键点。Dlib 库提取特征点的主要训练步骤包括:1)预处理,将图片的训练集和测试集按照大小比例设置放在一个文件夹中,比例设置为 7:3;2)训练,扫描图片并提取特征点,加载 Dlib 自带的 frontal_face_detector 作为人脸检测器,首先定位一副图像中的人脸,再加载官方提供的模型构建特征提取器 shape_predictor 进行人脸关键点识别;3)测试,使用测试集进行测试,根据准确率、精确率等指标对提取人脸特征点模型进行评判。

2.2 改进的移动最小二乘原理

图像变形可看成在变形函数 $f(\mathbf{x})$ 作用下由未变形函数映射到变形图像的过程。对于图像中的任意像素点 \mathbf{x} ,将 $f(\mathbf{x})$ 作用于未变形图像上的每一个像素点,得到变形后图像的像素点。变形函数 $f(\mathbf{x})$ 由线性变换项和平移变换项^[4]组成,分别用 2×2 的矩阵 \mathbf{M} 和长度为 2 的行向量 \mathbf{T} 表示,则有

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{xM} + \mathbf{T}. \quad (1)$$

根据 MLS 理论^[18],必然存在变形函数 $f(x)$,使得某公式取得最小值,某公式为

$$J = \sum_i \omega_i |f(\mathbf{x}_i) - \mathbf{y}_i|^2, \quad (2)$$

式中: J 为加权离散 L_2 范式; \mathbf{x}_i 和 \mathbf{y}_i 为控制点集中未变换和变换后像素点的坐标矩阵; ω_i 为权重, $i = 1, 2, 3 \dots n$, n 为像素点的总个数, i 为像素点编号。

将(1)式代入(2)式并求最小值,即对 $f(\mathbf{x})$ 的变量求导数且等于零,有

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} [(\mathbf{xM} + \mathbf{T} - \mathbf{y})^T \mathbf{w}(\mathbf{x})(\mathbf{xM} + \mathbf{T} - \mathbf{y})] = 0, \quad (3)$$

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{M}^T \mathbf{W} \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^T \mathbf{W}(\mathbf{y} - \mathbf{T}), \quad (4)$$

式中: \mathbf{y} 为经过 MLS 变换后的近似坐标矩阵; $\mathbf{w}(\cdot)$ 为权函数; \mathbf{Y} 为待变换坐标点对应的变换后的真实坐标矩阵; $\hat{\mathbf{x}}$ 为(3)式的解, \mathbf{W} 为权重矩阵。

若(3)式在求解过程中, $\hat{\mathbf{x}}$ 对 $\mathbf{M}^T \mathbf{W}(\mathbf{y} - \mathbf{T})$ 的误差或者不确定性比较敏感,当 $\mathbf{M}^T \mathbf{W} \mathbf{M}$ 不可逆时,只要 $\mathbf{M}^T \mathbf{W}(\mathbf{y} - \mathbf{T})$ 出现微小的变化,都会引起 $\hat{\mathbf{x}}$ 剧烈

变化,此时称(3)式为病态方程。该误差常常不可避免,为改善此现象,根据 Tikhonov 正则化理论,对一组方程的可接纳解施加一个弱平滑约束项,克服矩阵不适定性,稳定计算结果,使解唯一。根据 Tikhonov 正则化理论,正则化函数^[19]为

$$J(\alpha) = \sum_i w_i |f(x_i) - y_i|^2 + \alpha \| \mathbf{H} \mathbf{x} \|^2, \quad (5)$$

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{M}^T \mathbf{W} \mathbf{M} + \alpha \mathbf{H})^{-1} \mathbf{M}^T \mathbf{W} (\mathbf{y} - \mathbf{T}), \quad (6)$$

式中: $J(\cdot)$ 为 Tikhonov 泛函; α 为正则化参数; \mathbf{H} 为单位矩阵。

通过观察(4)式和(6)式可以发现,Tikhonov 正则化的目的就是对矩阵求解过程中的 $(\mathbf{M}^T \mathbf{W} \mathbf{M})$ 作出改变,通过对 $\mathbf{M}^T \mathbf{W} \mathbf{M}$ 加上 $\alpha \mathbf{H}$ 进行限制,使得病态方程能得到唯一解,进而改善矩阵结构,使矩阵 $\mathbf{M}^T \mathbf{W} \mathbf{M}$ 可逆,这提高了方程求解的精度和稳定性。

2.3 正则化参数的确定

正则化参数的选择是 Tikhonov 正则化方法的难点,由于本文噪声不可定,因此一般有两种方法确定正则化参数,即 L-曲线法和广义交叉验证法。

1) L-曲线法

利用 L-曲线法求解正则化参数^[20]的基本思路如下。对于误差方程 $\mathbf{V} = \hat{\mathbf{x}} \mathbf{M} + \mathbf{T} - \mathbf{Y}$,其中 \mathbf{V} 为真实值与拟合结果之间的差值,以 $\| \hat{\mathbf{x}} \|^2$ 为纵坐标, $\| \hat{\mathbf{x}} \mathbf{M} + \mathbf{T} - \mathbf{Y} \|^2$ 为横坐标,得到很多坐标为 $(\| \hat{\mathbf{x}} \mathbf{M} + \mathbf{T} - \mathbf{Y} \|^2, \| \hat{\mathbf{x}} \|^2)$ 的点,以 log-log 为尺度,所有点会构成一条曲线,由于这条曲线形状很像“L”,因此称之为 L-曲线。在 L-曲线的竖直部分 $\hat{\mathbf{x}}$ 属于欠正则化状态,在 L-曲线的水平位置,L-曲线属于过正则化状态。为平衡二者,在 L-曲线的隅角处选取所需正则化参数 α 。

设

$$\varphi = \| \hat{\mathbf{x}} \|^2, \quad (7)$$

$$\tau = \| \mathbf{M} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{T} - \mathbf{Y} \|^2, \quad (8)$$

两边同时取对数^[21],有

$$\hat{\varphi} = 2 \lg \| \hat{\mathbf{x}} \|^2, \quad (9)$$

$$\hat{\tau} = 2 \lg \| \mathbf{M} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{T} - \mathbf{Y} \|^2, \quad (10)$$

式中: φ 为方程组解的欧几里得二范数; $\hat{\varphi}$ 为对(7)式取的对数; τ 为误差的欧几里得二范数; $\hat{\tau}$ 为对(8)式取的对数。

则 L-曲线由这些点 $\left(\frac{\hat{\varphi}}{2}, \frac{\hat{\tau}}{2} \right)$ 拟合形成,L-曲线

上各点的曲率计算为

$$k = 2 \frac{\hat{\varphi}' \hat{\tau}'' - \hat{\varphi}'' \hat{\tau}'}{[(\hat{\varphi}')^2 + (\hat{\tau}')^2]^{2/3}}, \quad (11)$$

式中: $\hat{\varphi}'$ 、 $\hat{\tau}'$ 、 $\hat{\varphi}''$ 、 $\hat{\tau}''$ 分别是 $\hat{\varphi}$ 和 $\hat{\tau}$ 的一阶和二阶导数。L-曲线法作为一种比较成熟的方法,通过正则化参数平衡 $\| \hat{\mathbf{x}} \mathbf{M} + \mathbf{T} - \mathbf{Y} \|^2$ 和解 $\| \hat{\mathbf{x}} \|^2$ 。根据 α 的定义为隅角处的最大曲率 k_{\max} ,因此对曲率 k 求最大值,进而得到最佳正则化参数 α 。

2) 广义交叉验证法(GCV)

广义交叉验证法^[22]主要是以交叉验证的方式来验证不同的正则化参数值。假设将样本集划分为 Z 组,取样本集中1组数据作为验证集,剩下的样本作为训练集,每确定一个正则化参数值就会确定一个正则化解,通过该正则化解确定验证集误差, Z 组数据即重复 Z 次,得到 Z 组验证集误差,误差极小,对应的正则化参数越好。GCV 函数为

$$G_{\text{GCV}} = \frac{1}{N} \frac{\sum_{k=1}^N [y_k - f(x_k)]^2}{\left(1 - \frac{f'}{N}\right)^2}, \quad (12)$$

式中: k 为特征点的取值; N 为特征点的总个数; f' 为 f 的一阶导数。GCV 所求得的正则化参数可以使得预测点的代价函数最小,但是该方法计算复杂且量大。相比较而言,L-曲线法计算简单,且能较好顾及噪声范数和信号范数之间的平衡,故本文选择以 L-曲线法确定正则化参数。

3 移动最小二乘算法实现步骤

改进的 MLS 算法的流程如图 1 所示,具体步骤如下。

1) 首先安装 Dlib、Opencv 库,配置好 Dlib 的环境,设置特征检测器,直接定义一个 Dlib 中 frontal_face_detector 类的对象,通过这个检测器检测出人脸,然后需要在人脸中定位特征点,利用 shape_predictor_68_face_landmarks.dat 这个模型来初始化关键点检测器,通过这个关键点检测器 shape_predictor,就可以检测得到 68 个人脸关键点;

2) 将特征点像素坐标保存下来,以文档形式存储;

3) 选取一部分数据作为测试集,利用 MLS,通过代价函数和梯度下降法,确定系数阵 \mathbf{M} 和平移项 \mathbf{T} ,最终确定拟合函数;

4) 对奇异矩阵采用 Tikhonov 正则化,对代价函数施以弱平滑约束,通过 L-曲线法,确定正则参

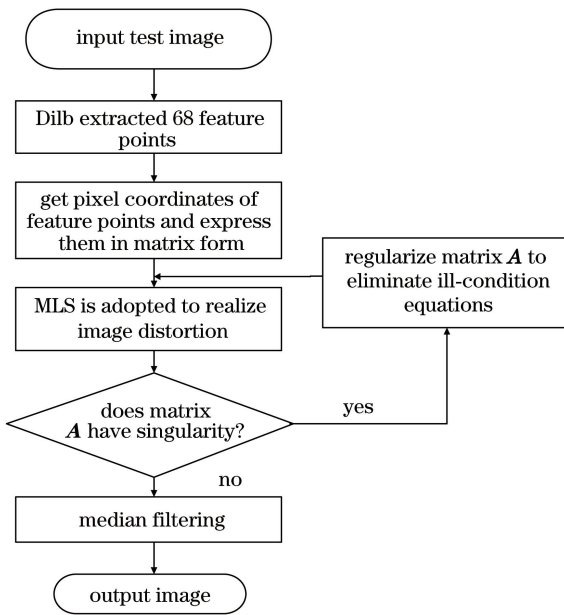


图1 MLS算法流程图

Fig. 1 Flowchart of MLS algorithm



图2 人脸特征点定位

Fig. 2 Face feature point location

数,以提高求解精度;

5) 利用训练好的变形函数 $f(x)$, 将测试集中未变形图像映射到变形图像的同坐标处, 本文主要是对人脸图像进行变形, 可选定一幅图像为参考, 对另一幅图像进行拉伸, 改变像素点的坐标, 使得这两幅图中的人脸像素点的坐标相同;

6) 对变形后的图像进行中值滤波。

4 仿真实验结果与分析

4.1 仿真实验结果

实验环境为 Inter(R)Core(TM)i5-7500 处理器, 8 GB 内存的硬件环境, 以及 Windows10、Dlib-19.16、vs2017、Opencv4.0、Matlab R2016a 软件环境。实验选取 face_dataset 数据库里的人脸照片进行测试。图 2 为特征点定位图。

以图 3 为参考图像, 图 4 为待参考图像, 利用本文改进后的算法, 在变形函数 $f(x)$ 作用下将图 4 中待参考图像的特征点坐标变换到与参考图像特征点坐标点相同处, 实现图像变形, 图 5 为实验仿真结果。

4.2 结果分析

利用 Dlib 库采用全自动方式提取人脸特征点不需要复杂算法, 平均 0.06 s 定位 1 张图像中覆盖人脸五官和整体轮廓的 68 个特征点。表 1 为几种提取人脸特征点方法的结果比较。

L-曲线以作图的方式显示出正则参数变化时残差范数随之变化的情况, 图 6 为正则化曲线图, 其中正则化参数取整为 3。



图3 参考图像

Fig. 3 Reference image

当 MLS 算法中的法矩阵出现奇异性时, 图 7(a) 中变形后的图像明显出现噪声干扰, 变形后的特征点坐标与参考图像特征点坐标出现肉眼可见的差距。本文方法实现的图像变形, 通过在 MLS 算法的代价函数中引入正则化惩罚项, 通过惩罚项限制缩小解的范围, 使得病态方程得到唯一解。图 7(b) 为基于 Tikhonov 正则化改进的 MLS 图像变形算法变形的图像。将每一幅变形后的图像特征点坐标与参考图像的特征点坐标进行比较, 设变形后的图像特征点坐标和参考图像特征点坐标相同的个数为 a , 根据 $\eta = \frac{a}{68} \times 100\%$, 求出图像变形准确率 η 。从变形效果来看, 与参考图像相比, 变形后的图像明显光滑且变形准确; 原算法的变形准确率为 83.46%, 改进后算法的变形准确率为 92.7%。本文方法降低了方程求解的复杂度, 解决了系数矩阵出现的不可逆、解不稳定的问题。



图 4 待变换图像

Fig. 4 Images to be transformed



图 5 本文改进的 MLS 图像变形

Fig. 5 Improved MLS image distortion in this paper

表 1 三种方法的结果比较

Table 1 Comparison of results of three methods

Method	Single image extraction time	Way
Proposed method	0.06 s	Full automation
Method in Ref. [5]	0.14 s	ASM
Method in Ref. [6]	0.1 s + manual time	Semi-automation + manual time

5 结 论

利用 Dlib 库提取人脸 68 个特征点,避免了手动标点的麻烦,增加了特征点的个数。针对移动最小二乘算法有时会形成病态方程组的缺点,提出改进的移动最小二乘法,对病态矩阵正则化。

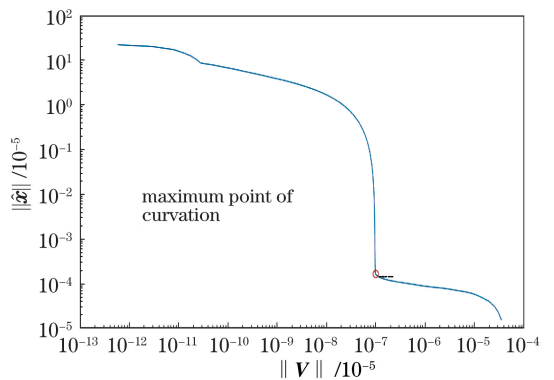


图 6 正则化曲线图

Fig. 6 Regularized graph

实验结果表明,本文算法的图像变形效果明显优于未改进之前的算法。但是,本文算法在图像拉



图 7 仿真实验结果对比图。(a) MLS算法实现图像变形;(b)本文改进后的 MLS算法实现图像变形

Fig. 7 Comparison of simulation results. (a) MLS algorithm for image deformation; (b) improved MLS algorithm for image deformation in this paper

伸后有一些点没有分配到,在仿真实验中利用中值滤波对这些黑点进行了填充,但是填充效果并不是很好,在这一方面需要对改进的移动最小二乘法进行改进。

参 考 文 献

- [1] Yang J Z, Liu Z K, Yu N H, *et al.* An image warping method based on control points and its applications [J]. *Journal of Image and Graphics*, 2001, 6(11): 1070-1074.
杨金钟, 刘政凯, 俞能海, 等. 基于控制点的图像变形方法及其应用[J]. *中国图象图形学报*, 2001, 6(11): 1070-1074.
- [2] Wang S J, Liang X Y. Calculation method of image morphing and its applications [J]. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2011, 23(8): 1304-1310.

王守觉, 梁先扬. 图像变形计算方法及其应用[J]. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2011, 23(8): 1304-1310.

- [3] Wolberg G. Image morphing: a survey [J]. *The Visual Computer*, 1998, 14(8/9): 360-372.
- [4] Liu T. Study on image deformation based on moving least squares [D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2008.
刘婷. 移动最小二乘图像变形方法研究[D]. 大连: 大连理工大学, 2008.
- [5] Zhu X C. Face feature extraction and hairstyle classification based on image[D]. Zhejiang: Zhejiang Sci-Tech University, 2017.
朱希成. 基于图像的人脸特征提取与发型分类[D]. 浙江: 浙江理工大学, 2017.
- [6] Luo D, Tao Y, Yang G. Face texture mapping and deformation with constrains of facial feature [J]. *Computer Engineering and Applications*, 2018, 54

- (6): 188-192, 240.
罗岱, 陶洋, 杨刚. 基于面部特征约束的人脸纹理映射及变形[J]. 计算机工程与应用, 2018, 54(6): 188-192, 240.
- [7] Schaefer S, McPhail T, Warren J. Image deformation using moving least squares [J]. ACM Transactions on Graphics, 2006, 25(3): 533-540.
- [8] Zuo C W, Nie Y F, Zhao M L. The selection about the radius of influence in MLS[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2005, 22(5): 833-838.
左传伟, 聂玉峰, 赵美玲. 移动最小二乘方法中影响半径的选取[J]. 工程数学学报, 2005, 22(5): 833-838.
- [9] Zhou C H, Wang Z L, Liu S K. Method of image restoration directly based on spatial varied point spread function [J]. Acta Optica Sinica, 2017, 37(1): 0110001.
周程灏, 王治乐, 刘尚阔. 基于空间变化点扩展函数的图像直接复原方法[J]. 光学学报, 2017, 37(1): 0110001.
- [10] Yang J J, Zheng J L. Stability of moving least squares approximation [J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2012, 35(4): 637-648.
杨建军, 郑健龙. 移动最小二乘法的近似稳定性[J]. 应用数学学报, 2012, 35(4): 637-648.
- [11] Li J, Gao F, Yi X, *et al.* A methodological and experimental investigation on time-domain diffuse fluorescence tomography of analytic based on two-dimensional circular scheme[J]. Chinese Journal of Lasers, 2010, 37(11): 2743-2748.
李娇, 高峰, 易茜, 等. 基于二维圆域解析模型的时域扩散荧光层析原理与实验研究[J]. 中国激光, 2010, 37(11): 2743-2748.
- [12] Tikhonov A N. Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method [J]. Soviet Mathematics Doklady, 1963, 4: 1035-1038.
- [13] Tikhonov A N. Regulation of ill-posed problems [J]. Doklady Akademii Nauk Sssr, 1963, 151(1): 49-52.
- [14] Zheng C L, He D D, Fei Q G. Improved digital image correlation method based on gray gradient denoised by regularization method [J]. Acta Optica Sinica, 2018, 38(8): 0812002.
郑成林, 何顶顶, 费庆国. 基于灰度梯度正则化去噪的改进数字图像相关法 [J]. 光学学报, 2018, 38(8): 0812002.
- [15] Wang C, Zhang B, Cao L X, *et al.* An improved inversion algorithm to measure particle size distribution [J]. Acta Optica Sinica, 2019, 39(2): 0212009.
王晨, 张彪, 曹丽霞, 等. 颗粒粒径分布测量反演算法的改进 [J]. 光学学报, 2019, 39(2): 0212009.
- [16] Ma C Y, Yang S L, Li S P. A regularization method of ill-conditioned linear equations [J]. Journal of Gansu Sciences, 2010, 22(4): 33-35.
马成业, 杨胜良, 黎锁平. 求解病态线性方程组的一个正则化方法 [J]. 甘肃科学学报, 2010, 22(4): 33-35.
- [17] International organisation for standardisation. Organisation internationale de normalisation: ISO/IEC JTC1/SC29/WG11 [S]. Japan: JISC, 1998.
- [18] Schaefer S, McPhail T, Warren J. Image deformation using moving least squares [J]. ACM Transactions on Graphics, 2006, 25(3): 533-540.
- [19] Yuan Z C, Shen Y Z, Zhou Z B. Regularized total least-squares solution to ill-posed error-in-variable model [J]. Journal of Geodesy and Geodynamics, 2009, 29(2): 131-134.
袁振超, 沈云中, 周泽波. 病态总体最小二乘模型的正则化算法 [J]. 大地测量与地球动力学, 2009, 29(2): 131-134.
- [20] Hu B, Xu H L, Wang Z W, *et al.* The method for choosing regularization parameters based on a model function and the L-curve [J]. Journal of Jiangxi Normal University (Natural Science Edition), 2014, 38(6): 569-573.
胡彬, 徐会林, 王泽文, 等. 基于模型函数与L-曲线的正则化参数选取方法 [J]. 江西师范大学学报(自然科学版), 2014, 38(6): 569-573.
- [21] Chen S, Zhan B Y. Application of L-curve method on robust ridge estimation model [J]. GNSS World of China, 2014, 39(5): 41-45.
陈帅, 詹本勇. 基于L曲线法的抗差岭估计模型 [J]. 全球定位系统, 2014, 39(5): 41-45.
- [22] Zhang L B, Huang Y, Zhu T. Region-of-interest denoising of high spatial resolution remote sensing image based on generalized cross validation [J]. Acta Optica Sinica, 2010, 30(s1): s100410.
张立保, 黄颖, 朱童. 基于广义交叉验证的高分辨率遥感图像感兴趣区去噪 [J]. 光学学报, 2010, 30(s1): s100410.