

光波的光线表征

张书赫, 邵梦, 王奕, 段宇平, 周金华*

安徽医科大学生物医学工程学院, 安徽 合肥 230032

摘要 新型光束的构建及光束的传输性质是光学领域的重要基础。特别是具有无衍射、自加速或自修复等特殊性质的光束,它们在自由空间和光波导中的传输及应用更是人们关注的热点。虽然波动光学已经发展出相当完备且严格的理论体系,可分析波动方程的解及它们在空间中的演化,但是缺乏直观形象的表征。几何光学则以光线的方式提供一种直观易理解的方法,除了广泛应用于光学系统设计之外,同样可应用于光束设计和光束传输。随着现代几何光学的发展,光线的物理意义被进一步拓展,光线表征光波有了更为广泛的应用。运用光线可直观表征光束的无衍射、自修复和自加速等特性。从基本原理出发,对现代几何光学中光线意义的发展过程、应用及研究现状进行了总结,结合基模高斯光束、无衍射光束、Airy 光束、具有螺旋相位面的光束及结构高斯光束这些经典的光束例子,展示了运用光线表征及设计光束的思路。最后讨论了几何光学现存的一些问题及今后可能的研究方向。

关键词 几何光学; 光线; 光波传输; 光束设计

中图分类号 O435

文献标识码 A

doi: 10.3788/LOP56.230003

Ray Characterization of Optical Waves

Zhang Shuhe, Shao Meng, Wang Yi, Duan Yuping, Zhou Jinhua*

School of Biomedical Engineering, Anhui Medical University, Hefei, Anhui 230032, China

Abstract The design of novel light beams and investigation of their propagation properties are important topics in optics, particularly for beams that are nondiffracting, self-accelerating, or self-repairing. The evolution of these beams in either free-space or a waveguide and their applications have attracted a significant amount of research. Although wave optics has been developed as a rigorous and self-consistent framework, it does not offer intuitive processes for solving optical wave propagation. However, geometrical optics, also known as ray optics, can provide an intuitive and understandable method for analyzing light beam propagation and constructing targeted beam shapes in addition to designing optical systems. With the development of modern geometrical optics, rays have extended their physical meaning and are widely used to characterize optical wave propagation. Furthermore, ray characterization can explain nondiffracting, self-accelerating, and self-repairing properties. In this work, beginning with the fundamental theory of geometrical optics, we review the development, applications, and recent advances of significance of ray in modern ray optics. Meanwhile, some typical beams, such as fundamental-mode Gaussian, non-diffraction, and Airy beams, as well as beams with spiral wavefronts and structured Gaussian beams, have been characterized and designed using rays. Lastly, some challenging problems and future research directions of geometrical optics are discussed.

Key words geometrical optics; ray; optical wave propagation; beam design

OCIS codes 080.7343; 350.5500

1 引言

自 1864 年麦克斯韦方程组诞生以来,所有的电

磁现象均能由该方程组进行描述。光具有波粒二象性,其波动性是一种人类感知范畴下频率极高的电磁波,因此可利用电磁理论研究光的自然现象^[1]。

收稿日期: 2019-04-26; 修回日期: 2019-05-24; 录用日期: 2019-06-03

基金项目: 安徽省自然科学基金(1908085MA14)、安徽省转化医学研究院科研基金(2017zhyx25)、安徽医科大学博士科研资助基金(XJ201518)

* E-mail: zhoujinhua@ahmu.edu.cn

某些情况下可以忽略电磁波的电磁矢量特性,将其近似为标量波,这种处理方式能取得与实验相符合的结果。由于光的电磁理论为严格的理论体系,而早期的几何光学无法解释光波的干涉与衍射等波动效应,人们一度认为几何光学可被电磁理论所取代。然而,几何光学拥有电磁理论所不具备的独特优势——直观性。在一些光学设计中,利用几何光线追踪不仅能设计过程直观易理解,而且设计获得的光学仪器的工作效果也令人满意,特别是在设计激光器^[2]、透镜或反射镜等器件上有重要的指导意义。此外,几何光学还能估算干涉条纹产生的位置,例如估算迈克耳孙干涉仪、光栅衍射和牛顿环条纹等^[1]。对于光在某些内部或外形复杂的物体内的传输/散射,获取麦克斯韦方程组的边界条件非常困难,难以用波动方程来分析。当研究物体大于光波长的量级时,可以采用几何光学处理这类情况。相较于电磁场理论,几何光学在研究其适用范围内的问题时更为简单。其中典型例子有:光波经过椭圆柱^[3]、六棱柱的散射^[4]或是其他粒子的散射^[5],高斯光束在光学仪器中的变换^[6],在非均匀介质中的传输与自聚焦特性^[7],设计新型光学曲面等^[8-10]。虽然实际中并不存在光线,它只是人们对光的传输路径抽象出来的数学工具,但是使用光线表征光波的传输不仅形象直观,还便于光学设计和计算,不失为一种良好的数学手段。

几何光学描述光传输的方法最早可以追溯到古希腊时期。古希腊几何学的发展使得人们亦从几何学——光线的角度审视光这一自然现象^[11]。最著名的应当是数学家欧几里得对光线的总结,其中包括光线的反射现象与其遵循的数学原理。那时的人们已经建立起了两类用处广泛的光波的传输模型:其一是平行传播的光线,对应于我们现在所熟知的平面波;其二则是从同一点向四周发散或会聚的光线,对应于我们现在所熟知的点光源发出的球面光波。自然生活中的光源基本上都可以抽象成平行光光源与点发散/会聚的光源。但其忽略了光的偏振且无法描述光的衍射与干涉现象,这些都是早期几何光学致命的缺点。

随着激光的诞生,文献^[12]中根据激光谐振腔产生了具有高相干性的新型光束。波前调制技术的发展使得各种各样具有新奇性质的光束出现。例如激光器能直接产生应用最为广泛的基模高斯光束,光场调控可生成携带轨道角动量的拉盖尔高斯光束^[13]、无衍射光束族^[14-15]和自加速光束^[16-20],以及

由自加速光束衍生出来的急剧自聚焦光束^[21-25]等。其中具有轨道角动量的光束能用于光学通信^[26-27],还能作为光学扳手应用于光学捕获中^[28]。无衍射光束的自修复性质在显微成像^[29]和多颗粒同时捕获^[30-31]中有重要应用。而自加速光束由于自身特殊性质能生成片状结构(light-sheet)同样能提升显微成像的质量^[32-33],且其弯曲的主瓣光强分布还能实现微粒的曲线路径搬运^[34-37]。根据自加速光束的焦散线性质^[23],急剧自聚焦光束拥有无透镜自聚焦的能力。由于光波在焦散线交点处发生强烈的干涉,急剧自聚焦光束传输到焦点附近处时,其光强会突然增强几个甚至几十个量级,这种性质在定点加热^[38]和光学捕获^[39]中有重要的应用价值。除了设计标量光场的振幅与相位,人们还能设计光场的偏振分布,从而间接影响光场的振幅分布。这些矢量光场在信息储存、光学操纵和显微成像中有着更为广泛的应用^[40-41]。因此,如何设计和产生新型结构光束,以及如何进一步拓展应用是科研工作者的研究热点^[20,31,41-44]。在展示光束传输方面,基于衍射理论的光束传输不及光线直观。

几何光学在激光中的应用,最早可以追溯到对激光光学谐振腔的几何光学性质的分析^[2],随后才被逐渐应用在对光束本身的描述中。光学谐振腔输出的一般为基模高斯光束,其他特殊光束亦能通过光场调制技术由基模高斯光束转化而来,因此几何光学理论早期被广泛用于描述与解释基模高斯光束的各种传输性质。运用波动理论描述基模高斯光束在复杂介质中的传输较为复杂,若能建立基模高斯光束的光线模型,表征光束的传输将会更加方便。

由于光线只是一种数学抽象的工具,故不同学者对基模高斯光束的光线模型构建方式不一样。其中,一类光线模型是将高斯光束看作是很多位于光轴上不同位置的点光源发出的球面波的叠加^[45]。虽然这一方法被广泛应用在光镊的理论模拟中,但其理论与实际的光束并不自洽——同一光束不可能同时存在很多光源。另一类是使用光线管道模型表征基模高斯光束^[11],该模型由Kline^[46]与Luneburg^[47]从麦克斯韦方程组出发严格推导得到,在几何光学中有着非常重要的地位。该模型吸收了波动光学思想,将光线视为一根根管道,光线上加载的光波只能在相应的管道内传输。在光线管道基础上,Keller等^[48]给出了傍轴高斯光束的复光线模型。虽然复光线模型很好地描述了光波场沿着复光线的传输,但由于光线存在于复数空间,依然无法直

观地描述光束在实数空间的传输。由于复光线模型在表示光波场上具有一定的局限性,因此依然有很多学者继续这一项研究^[6,49-50]。

除了上述两类基模高斯光束的光线模型外, Herloski 等^[51]利用高斯光束侧视图为双曲线这一性质提出了特征光线法。该方法将该双曲线中的一条渐近线作为第一根特征光线,以与束腰相切且平行于光轴的直线作为第二根特征光线,用于描述二维高斯光束轮廓。然而这种模型只能用于表征经光学仪器(满足 ABCD 矩阵)变换的傍轴基模高斯光束。Arnaud^[6]基于高斯光束的单叶双曲面轮廓及单叶双曲面直母线几何特征,构建了高斯光束的单叶双曲面直母线模型。该模型在表征三维基模高斯光束轮廓结构上更加合理,但是依然无法描述光波场沿每根光线的传输。随后 Landesman 等^[52]基于扁椭球坐标系,获得了非傍轴高斯光束的标量解析解,并基于扁球坐标系中的单叶双曲面,构建了非傍轴基模高斯光束的光线模型^[53]。然而,同样的问题依然存在——此模型无法描述光波场沿每根光线的传输。Tycho 等^[54]在模拟光学相干断层(OCT)成像中给出了一套傍轴高斯光束的单叶双曲面直母线模型,用光子结合蒙特卡罗算法表征了振幅传输,但忽略了光波场的相位信息。Zhang 等^[55]基于扁球坐标系构建单叶双曲面模型与光线管道模型,给出了非傍轴基模高斯光束的光线模型,能够精确描述非傍轴基模高斯光束的光波场复振幅沿着光线的传输。为了区分波动光学计算的光波场与几何光学或光线表征的光波场,本文中我们将几何光学表征的光波场称为几何光波场。

尽管光线管道模型在描述基模高斯光束的光波场传输上取得了非凡的进展,但是无法正确描述 Airy 光束等自加速光束在它们焦散线附近的传输特性——光线管道模型的几何光波场在焦点与焦散线/面附近失效^[56-58]。通常情况下,光线垂直于波阵面,而在焦点/焦散线(面)附近,光线不再与波阵面垂直^[59-60]。为此人们提出了基于光线管道模型的修正方案^[56-58,61],结果导致需要非常复杂的方式来表征焦散线(面)附近的几何光波场,例如 Airy 函数及其一阶导函数表征的焦散线(面)处的几何光波场^[62]。随着具有复杂焦散线(面)结构的光波场^[19,63]的研究推进,运用光线的方式表征这类具有焦散线(面)结构的光束成为了几何光学中的难题。尽管 Kaganovsky 等^[64]成功利用光线管道模型建立了 Airy 光束的光线模型,形象解释了 Airy 光束的

自加速与自修复特性,但是描述其他具有复杂焦散线的光束时依然存在局限性。因此人们一直寻求新的光线模型来表征光波场以解决焦点、焦散线(面)失效问题。

Popov^[65]提出了高斯光束叠加模型,运用振幅为高斯分布的光线来表征非高斯光束。在该模型中,每根光线不再无限细小的光线管道,而是代表有一定宽度的高斯光束,这些特殊的高斯光束,以其中心对称轴为骨架,在空间中传输。因此这些特殊高斯光束的中心对称轴被视为光线,并被称为高斯光线。由于这些特殊的高斯光束均满足亥姆霍兹波动方程,因此其叠加后的整体光波场也满足亥姆霍兹方程。高斯光线是光线模型的一大进步^[66],它打破了光线被认为是局部光扰动的局限。在以往的几何光学中,光线被认为是一种非常狭窄的局部平面波^[11],它只能对其路径上的点产生光扰动,而不会对路径以外的点产生光扰动。而高斯光线的方法则认为:光线能对空间中所有点产生光扰动,但在光线路径上这个扰动最强烈;随着观察点远离光线,扰动以高斯分布函数的形式减弱。这个方法很好地解决了以往光线管道的焦散线(面)失效的问题^[67]。虽然高斯光线模型理论较为复杂,但不涉及焦点、焦散线(面)问题,适用范围更广。

有了光束管道和高斯光线这两种方法,对于任意一个光波场,只要能确定某一参考面上的光线方向与光线加载的几何光波场这些初始条件,就能通过光线模型来描述光波场在自由空间中的演化。这似乎是一个非常不错的工具,但是进一步深究却发现:如何从已知光波场获得光线模型参数(光线方向和起点位置)以及每根光线加载的初始几何光波场呢?以厄米高斯光束为例,其在束腰截面的光波场分布可根据波动方程直接计算得到,那么厄米高斯光束的光线模型在束腰面上的某一点的光线方向如何确定?

在傅里叶光学中,空间频率对应于平面波方向^[68],类比可以认为光线的方向就为光线的空间频率。若将光线比作微观粒子,光线的方向看成粒子运动的方向,光线起点位置可看成粒子初始的位置,光波场满足的波动方程对应于粒子满足的波动方程。结合量子理论的频率-空间分析法^[69],引入相-空间分析能同时获得粒子的方向与位置分布。对光波场分布进行相-空间分析就能获得光线的方向与位置分布^[69-70]。相-空间分析有许多计算方法,其中著名的方法有加窗傅里叶变换^[71]和魏格纳函数^[70]。根据使用的窗函数不同,加窗傅里叶变换可

以分为很多类。由于使用矩形窗函数会引入突变的振荡,在光波场分析中人们更多采用高斯型分布的窗函数,构成高斯加窗傅里叶变换(GWFT)^[72]。采用相-空间分析就必须考虑到不确定性原理^[73]的影响——无法同时准确地获得微粒所在位置与其动量,在光线分析中即无法同时准确获得光线的初始位置及光线传播方向。在光波长较大和窗函数设置得非常窄时,由高斯加窗傅里叶变换计算得到的光线初始位置很准确,但其光线方向分布却很广。当人们把窗函数设置得无限宽时,高斯加窗傅里叶变换退化为普通的傅里叶变换,虽然光线方向非常精确,但是光线初始位置却很模糊,此时光线代表一个无限宽的平面波^[68]。对于光线管道而言,这种同时精确确定光线方向与光线初始位置的方法看似违背不确定性原理,但是在光波波长极小即几何光学近似条件下,就如同经典力学一样,能够同时精确确定光线的位置与方向。高斯光线应用的核心问题是GWFT的窗函数设置。为了使每根高斯光束都满足波动方程,就需要单独确定每根光线的参数,这样引入更多需要计算的初始条件,从而使得高斯光线模型在构建光波场上难以操作^[74]。

为了解决这一问题,Forbes^[59]与Alonso^[75-77]发表了一系列论文,以GWFT为基础提出了一种改进的高斯光线方法,称为柔性单元的稳态聚集(SAFE)。SAFE的核心思想是:并不需要让每根高斯光线都满足亥姆霍兹波动方程,只需要让所有光线叠加得到的几何光波场 U 满足亥姆霍兹方程或是亥姆霍兹方程的渐进解即可^[74]。既然高斯窗函数的宽度(这里设为 γ)对确定光线的方向与位置有影响,那就令每根高斯光线的宽度受相同 γ 值的制约,减少了需要确定的光线初始条件,且 U 随 γ 的变化而改变很小,从而减少 γ 对几何光波场的影响。依据SAFE,他们构建了厄米高斯光束、拉盖尔高斯光束与贝塞尔光束的光线模型^[75],其光波场的演化能用光线的方式精确表征。Alonso等^[78]进一步利用SAFE给出了任意结构光波场的构建方式与光波场估算,并用该方法解释了内焦散线光束的自修复特性^[63]与拉盖尔高斯光束的亚光速传输特性^[79-80]。由于上述光线在实数空间内传播,在光束变换中也可以发挥作用。

除了上述这些用纯光线表征光波场的方法外,由于光线单位向量沿 x 或 y 的分量与角波数的乘积即光波场相位沿 x 或 y 的偏导数^[81-83],因此可设计需要的光波场相位分布。在相位分布基础上加载

一些特殊的振幅分布,运用衍射方法可计算光波场在空间自由演化后的分布。这一方法广泛应用于沿任意曲线的加速光波场^[82-84]及自聚焦光束^[25,85]。至此,光波的光线表征展现出了前所未有的适用性。

本文作为一篇综述性文献,系统回顾光线在光束传输中的发展与最新进展。为了便于表述,本文涉及的光波场均为标量形式。由于Luneberg等的理论推导^[11]对现代几何光学有非常重要的意义,第2节回顾了从亥姆霍兹波动方程得到的现代几何光学的三个重要方程。第3节以基模高斯光束为例,介绍了表征标量光波的光线管道模型及其应用。第4节介绍了相-空间分析中高斯加窗傅里叶变换在几何光学中的应用。以第4节内容为基础,第5节介绍了SAFE方法在光束构建与光束传输方面的应用,并以无衍射余弦光束、Airy光束及携带轨道角动量为例展示了SAFE方法构建光波场的过程,介绍了基于SAFE构建结构光场的光线庞加莱球法。最后在第6节中对本文进行总结,并讨论了现存的一些关键问题及今后可能的研究方向。

2 高频光波的几何光学近似

2.1 Luneburg-Kline 拟设 (Ansatz)

标量光波满足标量亥姆霍兹波动方程:

$$(\nabla^2 + k_0^2 n^2)U(\mathbf{r}) = 0, \quad (1)$$

式中: $U(\cdot)$ 为光波的复振幅; ∇^2 为拉普拉斯算子; \mathbf{r} 为空间点的坐标, $\mathbf{r} = (x, y, z)$; k_0 为真空角波数, $k_0 = 2\pi/\lambda$, λ 为真空光波长; n 为介质折射率,对于非均匀介质,介质折射率会随 \mathbf{r} 变化。(1)式的解有很多种形式,其中Luneburg提出的级数解形式为几何光学的波动理论基础,该工作发表在他的一系列讲义中并由Kline整理,即著名的Luneburg-Kline拟设^[47]。该级数解的形式为

$$U(\mathbf{r}, \omega) \approx \exp[ik_0 S(\mathbf{r})] \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_j(\mathbf{r})}{(i\omega)^j}, \quad (2)$$

式中: ω 为光波的频率; S 为光程函数; A_j 是Debye展开形式的各级振幅系数; j 为非负整数,代表展开的阶数。注意到如果 $\omega \rightarrow \infty$,即光波长 $\lambda \rightarrow 0$,这也是人们常说的几何光学条件,(2)式的高阶项可以忽略掉并简化为

$$U(\mathbf{r}, \omega) \approx A_0(\mathbf{r}) \exp[ik_0 S(\mathbf{r})], \quad (3)$$

式中: A_0 为展开后的0阶振幅项。(3)式为(2)式的零阶项,同时也被称为Sommerfeld-Runge拟设^[11]。由(1)式与(3)式可以直接推导得到程函方程与零阶传输方程。

2.2 程函方程与零阶传输方程

在 $\lambda \rightarrow 0$ 条件下,将(3)式代入(1)式得到

$$[n^2 - (\nabla S)^2] + \frac{\nabla^2 A_0}{k_0^2 A_0} + \frac{i}{k_0} \left(\frac{2 \nabla S \cdot \nabla A_0}{A_0} + \nabla^2 S \right) = 0. \quad (4)$$

由于 $\lambda \rightarrow 0$, (4)式中 $\nabla^2 A_0 / (k_0^2 A_0)$ 可以忽略, (4)式可以变为 2 个方程^[11], 即

$$(\nabla S)^2 = n^2, \quad (5)$$

$$2 \nabla S \cdot \nabla A_0 + (\nabla^2 S) A_0 = 0. \quad (6)$$

(5)式即为程函方程,它不仅描述了光程随光线的变化,由它的解还能得到光线的轨迹。(6)式为零阶传输方程,描述了振幅 A_0 随光线传播的变化^[1,11,81]。

2.3 光线方程

通常情况下,直接解程函方程比较复杂,为了确定光线的轨迹需要引入光线方程。由于 S 为光线光程, S 的梯度方向也就是光线方向,同时也为波阵面与该光线交点处的法线方向。如图 1 所示,若令 s 为光线路径几何长度(光程 S 需要考虑到折射率的变化,若折射率恒为 1,则光线路径几何长度与光程相等, $S = s$), 根据(5)式可得

$$\nabla S = n \frac{d\mathbf{r}}{ds} = n \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right). \quad (7)$$

根据几何关系, $dx/ds, dy/ds$ 和 dz/ds 为光线在点 r 处的三维方向余弦。(7)式反映了光程对坐标的偏导数与光线切线方向的关系,在光线构建光波场中有很重要的地位。根据(7)式可以从已知波阵面推导出光线的方向,反之亦可由已知的光线方向得到波阵面的分布。

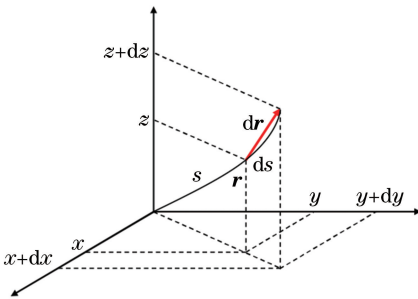


图 1 光线的微分几何关系^[11]

Fig. 1 Differential geometry of ray^[11]

对程函方程(5)式左右同时取梯度得 $\nabla[(\nabla S)^2] = 2n d(n d\mathbf{r}/ds)/ds$, 代入 $\nabla(n^2) = 2n \nabla n$ 整理得到

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \nabla n. \quad (8)$$

(8)式即为光线方程^[81], 该方程描述了光线方向与折射率梯度间的关系,解光线方程可得光线在介质中的传播路径。在傍轴条件下由于光线与 z 轴的

夹角很小, (8)式简化为傍轴光线方程:

$$\frac{d}{dz} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{dz} \right) = \nabla n. \quad (9)$$

在均匀介质中,折射率 n 为常数,光线方程进一步简化为 $d^2 \mathbf{r}/ds^2 = 0$, 可见在均匀介质中,光线轨迹为直线。

此外,光线方程还可以由哈密顿力学的形式推导得出^[81]。假设光线沿着 z 增大的方向传输,可以认为 x 与 y 是以 z 为变量的函数,则有 $ds = dz \sqrt{1 + (dx/dz)^2 + (dy/dz)^2}$ 。用“点”代表变量对 z 的导数,引入光学拉格朗日函数^[81]

$$L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}) = n \sqrt{1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2}. \quad (10)$$

基于(10)式分别对 \dot{x} 与 \dot{y} 求偏导再对 z 求导数得到

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial L}{\partial x}, \quad \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = \frac{\partial L}{\partial y}. \quad (11)$$

(11)式为光学拉格朗日方程,结合(10)式与(11)式可得

$$\frac{\partial n}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \frac{\partial L}{\partial x}. \quad (12)$$

同理对于 y 与 z 方向也可得到类似的表达式。最终整理可得(8)式的光线方程。

通过定义哈密顿广义动量(光线动量): $p = \partial L / \partial \dot{x}, q = \partial L / \partial \dot{y}$, 代入(10)式可得

$$p = n \frac{dx}{ds}, \quad q = n \frac{dy}{ds}. \quad (13)$$

由于 dx/ds 和 dy/ds 为光线在点 r 处沿 x 与 y 方向的方向余弦,光线动量即为光线的方向余弦与折射率的乘积。引入哈密顿量 $H(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}) = p\dot{x} + q\dot{y} - L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y})$, 由(10)~(13)式可将哈密顿量进一步化简得到

$$H = -\sqrt{n^2 - (p^2 + q^2)}. \quad (14)$$

将 p, q, x, y, z 视为自变量,将(14)式微分得到 5 个独立的方程,即

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \\ \dot{q} &= -\frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{\partial L}{\partial z}. \end{aligned} \quad (15)$$

(15)式即为光学哈密顿方程组,已知折射率 n 的分布后便可求得光线轨迹。注意在哈密顿力学中,拉格朗日函数表示力学系统的动能与势能之差,其对时间的积分为哈密顿作用量。哈密顿最小作用量原理在光学系统中对应为光线的费马原理。此外这里还需要强调一下,在光线管道模型中并没有利用到光线哈密顿方程的概念,在 SAFE 模型中却反复利

用到这些概念。这也是 SAFE 比光线管道模型更加合理的原因之一。

2.4 从几何光学到波动光学

几何光学为波动光学在波长趋于 0 时的近似情况,可以类比于经典力学是波动力学在物质波波长(德布罗意波长)趋于 0 的近似。若要从几何光学重新回到波动光学,可以采用经典力学向波动力学过渡的方法——算符法^[81]。例如动量算符 $p_x = -i\hbar\partial/\partial x$, 能量算符 $E = i\hbar\partial/\partial t$, 其中 \hbar 为约化普朗克常数。类似可以得到光学广义动量算符 $\hat{P}_x = -iK\partial/\partial x$, $\hat{P}_y = -iK\partial/\partial y$ 。将时间变量 t 用轴向变量 z 替换得到哈密顿算符 $\hat{H} = iK\partial/\partial z$, 其中 K 为常数, 类比于约化普朗克常数。设光波场为 U , 用变量 z 替换时间变量 t 建立关于 U 的薛定谔方程:

$$\hat{H}U = iK\partial U/\partial z. \quad (16)$$

根据(14)式,将算符 \hat{H} 作用于(16)式两边得到

$$\hat{H} \cdot \hat{H}U = -K^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = (n^2 - \hat{P}_x^2 - \hat{P}_y^2)U, \quad (17)$$

化简得到

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{n^2}{K^2} \right)U = 0. \quad (18)$$

(18)式为亥姆霍兹波动方程,常数 $K = 1/k_0$ 。可见,当光线波长极小时, K 值趋近于 0,此时几何光学之于波动光学相当于是经典力学之于波动力学^[81]。

3 光线管道表征光束的传输

3.1 光线管道模型

如图 2 所示,光线管道模型将光线视为一根根微小的管道,每根光线携带的光波场只能在管道内流动,不会从管道侧壁流出,且单位时间内流过管道横截面的能量相等^[11]。

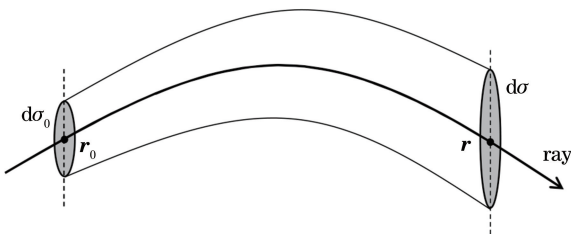


图 2 光线管道模型

Fig. 2 Ray tube model

由于光线可以无限延伸,因此在研究光线的时

候需要指定光线上某一点作为光线的参考起点。如图 2 所示,指定 r_0 处作为光线的起始参考点。若 r_0 处的振幅为 $A_0(r_0)$, 光程为 $S(r_0)$, 根据程函方程(5)式与(6)式可得 r 处的光程与振幅分别为

$$S(\mathbf{r}) = S(\mathbf{r}_0) + \int_0^s n(\mathbf{r}) d\tau, \quad (19)$$

$$A_0(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{n(\mathbf{r}_0)}{n(\mathbf{r})} \frac{d\sigma_0}{d\sigma}} A_0(\mathbf{r}_0), \quad (20)$$

式中: $d\tau$ 为曲线长度微元, 积分沿着曲线 $\mathbf{r}_0 \mathbf{r}$, s 为该曲线长度; $d\sigma_0$ 与 $d\sigma$ 分别为光线管道在 r_0 与 r 处的横截面面积。设 $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, 0)$, 光线方向为光线传播曲线长度的函数, 光线可以写成如下参数方程的形式

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \int_0^s v_x(x_0, y_0, \tau) d\tau, \\ y &= y_0 + \int_0^s v_y(x_0, y_0, \tau) d\tau, \\ z &= \int_0^s v_z(x_0, y_0, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (21)$$

式中: v_x, v_y, v_z 为光线方向的单位矢量分别在 x, y 和 z 方向上的分量。(20)式中的比值项变为

$$\frac{n(\mathbf{r}_0)}{n(\mathbf{r})} \frac{d\sigma_0}{d\sigma} = \frac{J(0)}{J(s)}, \quad (22)$$

式中: $J(s)$ 为雅克比行列式, $J(s) = \det[\partial(x, y, z)/\partial(x_0, y_0, s)]$ 。在均匀介质中,(21)式可以进一步简化为

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_x(x_0, y_0)s, \quad y = y_0 + v_y(x_0, y_0)s, \\ z &= v_z(x_0, y_0)s, \end{aligned} \quad (23)$$

则(19)式与(20)式简化为

$$S(\mathbf{r}) = S(\mathbf{r}_0) + ns, \quad (24)$$

$$A_0(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{J(0)}{J(s)}} A_0(\mathbf{r}_0). \quad (25)$$

从(22)式或(25)式可以发现,若 $J(s) = 0$, (22)和(25)式失效。对应为光线到达焦点/焦散线(面)处时光线管道模型不再适用,需要其他方法来修正^[49,56]。由于这些修正方法已经超出了文章的内容,读者可以参考文献[58]的内容。

(23)式与(24)式表明,对于任意一根光线只要选定参考起点,且该处光线的光波场光程(相位)与复振幅已知,介质折射率分布已知,就能运用光线管道模型表征沿该光线传播的几何光波场。接下来以两个例子介绍光线管道模型在表征基模高斯光束及非傍轴基模高斯光束的光波场传输。

3.2 复光线管道模型表征基模高斯光束

前述介绍的光线均是在实数空间传播,为了表征高斯光束,前人发展了复光线模型。复光线模型建立在光线管道模型之上,唯一区别为光线在复空间传播。基模高斯光束的复光线表征由 Keller 与 Streifer 共同完成^[48]。设光波场的表达式为 $U = A \exp(ikS)$, A 为波场振幅,已知均匀介质下基模高斯光束在束腰面的复振幅 u 分布为

$$u(x, y, 0) = A_0(x, y) \exp\left[-\frac{k}{2a}(x^2 + y^2)\right], \quad (26)$$

式中: a 为任意正实数; k 为介质中光传播的角波数。则初始平面上光波场光程的分布为 $S(x, y) = i/(2a)(x^2 + y^2)$ 。根据(7)式与(8)式,相位与光线倾角的关系有 $v_x = \partial S / \partial x$ 和 $v_y = \partial S / \partial y$, 则光线的参数方程为

$$\begin{aligned} x &= x_0 + x_0 \frac{i}{a}s, \quad y = y_0 + y_0 \frac{i}{a}s, \\ z &= \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{a^2}}s. \end{aligned} \quad (27)$$

可见此时光线的方向向量为复数,光线在复空间传播。在傍轴条件下有 $z^2 \gg x^2 + y^2$, 若此时参数 a 满足 $|a| \ll |z|$, 将方程(27)式代入(24)式与(25)式,化简可以得到

$$\begin{aligned} u_0(x, y, z) &\approx A_0 \left(-\frac{iax}{z}, -\frac{ia y}{z} \right) \left(-\frac{ia}{z} \right) \left(1 + \frac{ia}{z} \right) \cdot \\ &\exp\left\{ -\frac{ka}{2z^2}(x^2 + y^2) + ik \left[z + \frac{(x^2 + y^2)}{2z} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (28)$$

复光线模型表征了基模高斯光束传播较远距离时的光波场分布。然而由于光线存在于复空间,无法直接在实空间表征。Keller 等^[48]完成了在 $|a| \ll |z|$ 条件下的近似推导,在 $|a| > |z|$ 条件下的推导由 Deschamps^[49]完成。需要注意的是,高斯光束复光线模型仅适用于推导高斯光束的光波场分布函数,无法直观地展示经过实空间中某些光学仪器变换的光束。

为了研究经过光学仪器变换的高斯光束,后人利用高斯光束的轮廓呈现单叶双曲面的性质提出了各种方法。Herloski 等^[51]提出用平行于光轴且与双曲线相切于束腰位置的直线,以及双曲线的一根渐近线作为高斯光束的光线表征,描述了经过透镜变换的二维高斯光束。而 Arnaud^[6]则提出另一种复光线模型,成功表征了经过一阶光学系统变换的

高斯光束。需要注意的是,Arnaud 的复光线模型仅仅将两条特殊的光线用一种更清晰的数学形式表示,而非 Keller 等提出的复光线概念。Arnaud 的复光线的实部代表了沿着高斯光束单叶双曲线的渐近线传播的光线,而其虚部代表的是与束腰相切平行于光轴的一根光线。在三维空间中,那根沿着单叶双曲线渐近线传播的光线变为沿着单叶双曲面母线传播的光线。Arnaud 和 Herloski 等的光线模型都适用于经典光线追迹方法,例如通过透镜中心的光线方向不变,平行光轴的光线被聚焦后经过焦点,从焦点出发的光线被聚焦后平行光轴。虽然这些都能正确有效地描述光束经过透镜等光学仪器之后的轮廓变换,但却抛弃了光线管道模型,无法直接描述光束光波场的传输。而 Arnaud 的方法则启发了运用单叶双曲面斜母线(Skew Line Ray)表征高斯光束的思想^[86]。

3.3 非傍轴基模高斯光束的单叶双曲面母线模型

Landesman 等^[52]发现了扁椭球坐标系下亥姆霍兹方程的一族精确解,其零阶解为

$$\begin{aligned} U(\mu, \rho, \theta) &= \frac{\exp[-kD(1-\rho)]}{kD\sqrt{\mu^2 + \rho^2}} \exp(ikD\mu) \cdot \\ &\exp\left(-i \arctan \frac{\mu}{\rho}\right), \end{aligned} \quad (29)$$

式中: (μ, ρ, θ) 为扁球坐标下点的坐标参数; D 为扁椭球坐标系椭球的半焦距。 (μ, ρ, θ) 与笛卡尔坐标系 (x, y, z) 的关系为

$$\begin{cases} x = D \sqrt{(1+\mu^2)(1-\rho^2)} \cos \theta \\ x = D \sqrt{(1+\mu^2)(1-\rho^2)} \sin \theta. \\ z = D\mu\rho \end{cases} \quad (30)$$

Landesman 等证明了(29)式在傍轴近似下可以退化为傍轴基模高斯光束的形式。扁椭球坐标系由相互正交的扁椭球与单叶双曲面构建而成, Landesman^[53]利用坐标系中的单叶双曲面元素及其母线建立了该光束的光线模型。遗憾的是其依然没有给出光波场沿光线的传播形式。Zhang 等^[55]沿袭 Landesman 的工作给出了非傍轴高斯光束光波场的光线表征。

如图 3(a)所示,以束腰面上点 Q 作为光线的参考起点。由于过 Q 点有两条母线,将母线视为光线轨迹,则在均匀介质中其光线轨迹的参数方程为

$$l_Q^{\pm}: x = x_Q - y_Q \frac{\tau}{D\rho_Q}, \quad y = y_Q + x_Q \frac{\tau}{D\rho_Q}, \quad z = \tau, \quad (31)$$

$$l_{\bar{Q}}: x = x_Q + y_Q \frac{\tau}{D\rho_Q}, y = y_Q - x_Q \frac{\tau}{D\rho_Q}, z = \tau, \quad (32)$$

式中, $l_{\bar{Q}}^+$ 为绕 z 轴逆时针环绕的母线; $l_{\bar{Q}}^-$ 为绕 z 轴顺时针环绕的母线; x_Q 和 y_Q 为 Q 点的水平坐标; ρ_Q 为 Q 点所在单叶双曲面的参数, $\rho_Q = \sqrt{1 - (x_Q^2 + y_Q^2)/D^2}$ 。

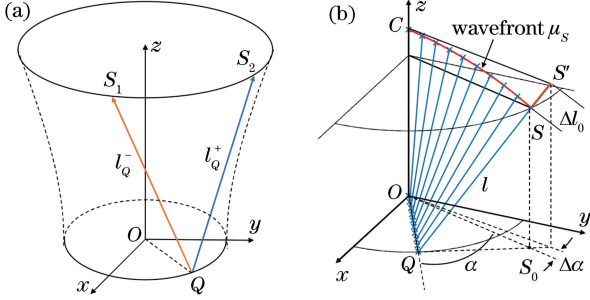


图3 高斯光束的单叶双曲面母线模型。(a)从束腰上点 Q 出发有两条母线; (b)长度相等的母线与波阵面的关系^[55]

Fig. 3 Univalent hyperboloid ray model of Gaussian beam. (a) Two rays launching from same point Q at beam waist; (b) relationship between wavefront and rays with equal length^[55]

假设光线每前进 dl 距离, 相位增加 $d\Psi_l$, 从(29)式可以得到

$$\frac{d\Psi_l}{dl} = \frac{\text{darg}(U)}{dl} = \frac{d[kD\mu_s - \arctan(\mu_s/\rho_s)]}{dl}, \quad (33)$$

式中: μ_s 与 ρ_s 为 S 点对应的椭球坐标系参数。根据几何关系有 $l = \tau/\rho_Q$, $z = D\mu_s\rho_s = \tau$, $\rho_Q = \rho_s$ 。最终由(33)式得到

$$\Psi_l = kl - \arctan \frac{l}{D\rho_Q}. \quad (34)$$

可见相位可分为两部分, 其中一部分是动力学相位, 即角波数乘以光程 l ; 另一部分为 Gouy 相位, 也就是(34)式中的反正切项。Gouy 相位的物理意义如图 3(b)所示, 当光线传播相同距离时(例如 OC 光线与 QS 光线), 光线终点并不在同一平面上。而我们对高斯光束的观察面为平行于 xoy 面与波阵面顶点 C 相切的平面, 故对于 S 点来说, 还需要继续传播 $|SS'|$ (Δl) 的距离才能到达该观察平面^[53]。由于母线倾斜, 终点与起点的方位角变化会导致相位的变化。根据几何关系可以得到

$$\alpha + \Delta\alpha = \arctan \frac{l}{D\rho_Q}, \quad (35)$$

式中: α 为 s 点相较于 Q 点的方位角变化; $\Delta\alpha$ 为 S

点沿光线到 S' 点的方位角变化。

根据(25)式得到振幅传输的雅克比行列式 J 为

$$J = 1 + \left(\frac{\tau}{D\rho_Q^2}\right)^2. \quad (36)$$

由于雅克比行列式 J 恒为正, 使用光线管道模型表征基模高斯光束并不存在焦散线失效问题。

如图 4 所示, 由于束腰平面外每一个观察点都有两条母线经过, 故该点的光波场为两条母线光线携带的光波场的叠加。用下标 GO 标明几何光波场, 最终整理得到在束腰面以外的任意位置 S 处的几何光波场的表达式为

$$U_{GO}(S) = \sum_{n=1}^2 \frac{1/2A_{Q_n}}{\sqrt{1 + [z/(D\rho_{Q_n}^2)]^2}} \cdot \exp\left[i\left(kl - \arctan \frac{l}{D\rho_{Q_n}}\right)\right], \quad (37)$$

式中: A_{Q_1} 与 A_{Q_2} 分别是 Q_1 点与 Q_2 处光线的初始振幅, 且 $A_{Q_1} = A_{Q_2}$ 。若选取 $A_{Q_n} = \exp[-kD(1 - \rho_{Q_n})]/(kD\rho_{Q_n})$, 则(37)式与(29)式等价。引入傍轴条件 $kD \gg 1$ 与 $\rho \rightarrow 1$, 有 $D \sim z_r$ (z_r 是瑞利距离), 其中“ \sim ”表示近似于, (31)式与(32)式分别退化为

$$l_{\bar{Q}}^+: x = x_Q - y_Q \frac{\tau}{z_r}, y = y_Q + x_Q \frac{\tau}{z_r}, z = \tau, \quad (38)$$

$$l_{\bar{Q}}^-: x = x_Q + y_Q \frac{\tau}{z_r}, y = y_Q - x_Q \frac{\tau}{z_r}, z = \tau, \quad (39)$$

该公式为傍轴高斯光束的单叶双曲面母线模型, 此时(37)式退化为傍轴高斯光束方程^[54, 87]。

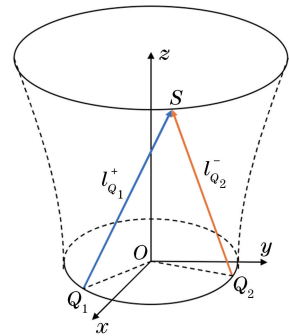


图4 束腰外任意一点 S 对应的两条母线^[55]

Fig. 4 Two rays passing through arbitrary point S out of beam waist^[55]

除了高斯光束外, Kaganovsky 等^[64, 88] 成功利用光线管道模型表征了二维及三维 Airy 光束的几何光波场传输。利用光线与焦散线(面)的关系, 可以确定 Airy 光束抛物线焦散线(面)的切线即可作为 Airy 光束的光线。由于光线管道模型在焦散线(面)处失效需要更加复杂的数学处理方法, 本文将

在第5节介绍SAFE模型时使用SAFE给出的Airy光束的构建思路。此外我们发现,上述构建光束光线模型的方法基本上都是利用光线与光束几何特征的关系,或者直接从光束的波动方程相位分布出发获得光线的初始条件。然而对于其他复杂光束例如厄米高斯光束、拉盖尔高斯光束和贝塞尔光束等,因其光波场结构复杂,光波场的相位分布不能像基模高斯光束复光线那样显式地提取,故无法直接依赖光束的几何特征或光波场的相位分布得到光线的初始条件。此时为了从光波场的分布获得光线的初始条件(参考起点位置,光线方向等),需要使用相-空间分析的思想。下面介绍如何利用高斯加窗傅里叶变换确定光线的起始条件。

4 利用高斯加窗傅里叶变换确定光束光线的初始条件

平面波的传播方向向量在 x 、 y 和 z 轴上的分量除以波长即为该平面波的空间频率^[68],类比得到光线的传播方向在三维方向分量除以波长即为光线的空间频率。确定初始光波场每根光线在特定位置对应的方向,即得光波场的位置与空间频率的分布函数,这个概念与相-空间分析非常相近^[70]。在傅里叶光学中,任何一个光波场都可以分解为沿着不同方向传播携带不同振幅与相位的平面波。然而傅里叶变换是对光波场整体的变换,虽然它能准确表达光线的方向分布,但是却无法确定光线起点位置的分布。也就是傅里叶变换得到的物理量为空间频率分布函数,而不是空间频率和空间位置的相-空间分布。

获得相-空间分布最典型的方法就是加窗傅里叶变换。为了简化先考虑一维光波场,对每个位置 x 乘以一个宽度为 w 的窗函数再进行傅里叶变换就能得到对应区域 $(x-w, x+w)$ 内的局部频率 f 。最终可以得到一个关于 (x, f) 的二维变量的函数,这就是相-空间分布函数。为了获得准确的位置,宽度 w 必须尽可能小。然而由于不确定性原理^[73],在波长较大时,人们无法让 w 尽可能小,也无法让计算得到的局部频率 f 尽可能唯一,故选择 w 参数的时候必须要考虑到位置 x 与频率 f 的准确性。加窗傅里叶变换只是相-空间分析中的一种,此外还有维格纳函数等。其中维格纳函数被广泛运用到光场(这里的光场是指light field)分析中^[89]。Potoček等^[90]利用维格纳函数结合几何光学向波动光学过渡的算子法,获得了拉盖尔高斯光束和贝塞尔光束

的光线模型。这类方法依赖光场方程与算子的相互联系,适用范围并没有比高斯加窗傅里叶变换法广泛。此外,由于高斯加窗傅里叶变换(GWFT)是SAFE法的基础,故本节着重介绍光波场的GWFT与光线的关系。

由于二维光波场的相-空间分布为四维的分布函数,为了简化仅考虑一维分布的光波场,其GWFT得到的相-空间分布为二维。设 $z=0$ 平面上的光波场分布为 $U(x)$,光波场在 x 轴上任意一点 x_0 的高斯加窗傅里叶变换可以写为

$$G_\gamma(x_0, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ U(x) \exp \left[-\frac{k\gamma}{2} (x - x_0)^2 \right] \right\} \cdot \exp(-2\pi i f x) dx, \quad (40)$$

式中: γ 为高斯宽度系数。当波数 k 固定时, γ 越大高斯窗宽越窄。(40)式表征光波场 U 在 x_0 点附近的局部频率分布,对每个点作高斯加窗傅里叶变换后得到它含频率和特定位置的二维分布。由于均匀介质中任意一维光波场都可写成 $U(x) = A(x) \cdot \exp[ik_0 S(x)]$,其中 A 是实振幅函数, $S(x)$ 为光程,那么根据波阵面与光线方向梯度关系((6)式), x 轴上每一个点上光线的方向向量在 x 轴的分量 p 应当满足 $p(x) = dS/dx$ 。由于空间频率 $f = p/\lambda$, $|G_\gamma|^2$ 的二维分布图应当分布在曲线 $f(x) = dS/(\lambda dx)$ 附近, $f(x)$ 即为光波场 U 的相-空间曲线。

接下来以三种光波场分布为例介绍高斯加窗傅里叶变换的应用,其分布函数为

$$U(x) = \exp\{-ik_0[\cos(2\pi f_1 x)/(2\pi f_1) + \cos(2\pi f_2 x)/(2\pi f_2)]\}, \quad (41)$$

$$U(x) = \text{Airy}(x/w_0), \quad (42)$$

$$U(x) = H_m(\sqrt{2}x/w_0) \exp(-x^2/w_0^2). \quad (43)$$

(41)式中, f_1 和 f_2 为控制余弦函数的频率,这里选取 $f_1=0.1, f_2=0.2$ 。(42)式为Airy光束在 $z=0$ 平面的光波场分布,其中 $\text{Airy}(\cdot)$ 为Airy函数; w_0 为任意正实数,控制Airy光束的光斑大小,这里选取 $w_0=4 \mu\text{m}$ 。(43)式为一维厄米高斯光束在 $z=0$ 平面的光波场分布, H_m 为 m 阶厄米多项式,选取 $m=10, w_0=2 \mu\text{m}$ 。上述计算中光波长均为 $\lambda=0.532 \mu\text{m}$ 。对于不同光波场而言,为了使空间频率分布尽可能窄,高斯加窗傅里叶变换的窗宽 γ 不尽相同。图5(a1)~(c1)展示了光波场(41)式在不同窗宽下的高斯加窗傅里叶变换结果,其坐标轴纵轴选用 $p=\lambda f$ 表示。根据导数关系可以知道, p 分布在相-空间曲线 $\sin(2\pi f_1 x) + \sin(2\pi f_2 x)$ 附近(图

中曲线)。当选取的窗宽 $\gamma=1$ 时,如图5(a1)所示,光波场的相-空间分布在理论预测的相-空间曲线附近,高斯加窗傅里叶变换得到很好的效果,而其他窗宽值的对应分布与相-空间曲线分布相差较大。图5(a2)~(c2)展示了 Airy 光束(42)式的结果。根据焦散线与光线相切的关系,可以得到光线向量沿 x 轴分量 p 满足 $p(x)^2=(4Cx)/(-1+4Cx)$,其中归一化常数 $C=(4k_0x_0^3)^{-1}$ 。当窗宽 $\gamma=0.002$ 时,其高斯加窗傅里叶变换分布最符合所围绕的相-空间曲线,如图5(c2)所示。加窗傅里叶变换的相空间分布在理论预测的相-空间曲线附近,并且集中在 $x<0$ 的区域。对于 $x<0$ 区域每个 x 都对应上下两块 p 分布,故从 $x<0$ 区域的任意一点都能获得

两条光线。对于一维厄米高斯光束,其相-空间曲线是椭圆^[72],可以表示为 $(x, p)=(X_0 \cos t, P_0 \sin t)$,其中 $X_0=\omega_0 \sqrt{m+1}$,描述了 $z=0$ 上光线在 x 轴上分布的最大宽度; P_0 为任意小于1的正实数,表述了光线倾角的最大值。相-空间曲线闭合,其围绕的面积必须满足量子化条件^[72,75],即 $kX_0P_0=(2m+1)\pi$, m 为整数。有关量子化条件的具体推导与论述,读者可以参考文献[66]。图5(a3)~(c3)展示了一维厄米高斯光束的高斯加窗傅里叶变换分布结果,当窗宽 $\gamma=0.02$,则相-空间分布为椭圆,具有相对较好的结果,而其他窗宽值对应的相-空间分布与理想的曲线相差较大。因此,对于不同的光束,选取合适的加窗变化的窗宽值非常关键。

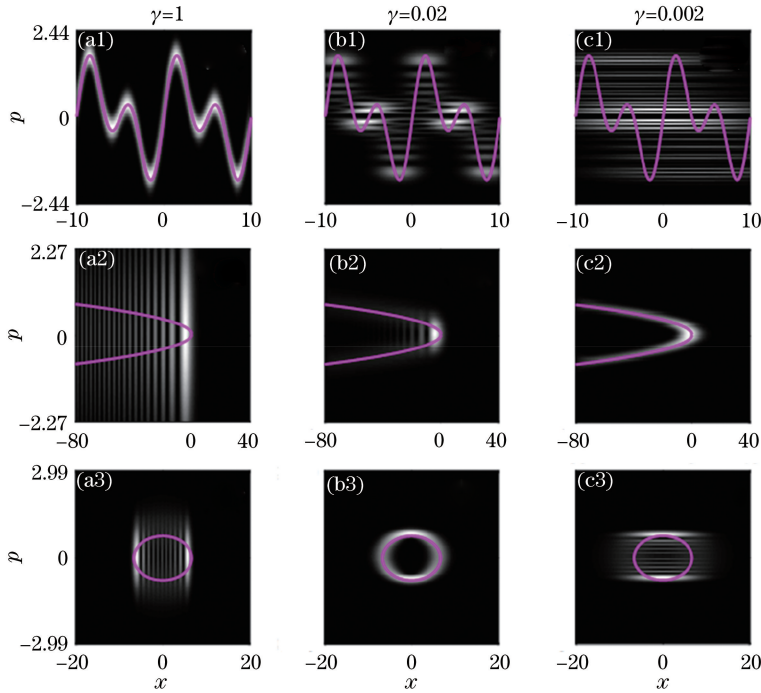


图5 光波场的高斯加窗傅里叶变换分布。(a1)~(c1)(41)式的变换结果;(a2)~(c2)(42)式的变换结果;(a3)~(c3)(43)式的变换结果

Fig. 5 Distributions of Gaussian windowed Fourier transforms of optical wave field. (a1)-(c1) Correspond to Eq. (41); (a2)-(c2) correspond to Eq. (42); (a3)-(c3) correspond to Eq. (43)

对比图5(a3)与图5(c3)可以看出:1)由于不确定性原理的存在,当窗宽很窄时($\gamma=1$,图5(a3)),条纹 x 方向宽度窄,则利用最大值可以很方便确定光线的位置。但是条纹沿着 p 方向有一定宽度,则光线方向 p 难以准确地表达。2)当窗宽很宽时($\gamma=0.002$,图5(c3)),光线方向 p 能较准确地表达。虽然条纹在 p 方向宽度窄,但是条纹在 x 方向呈现一定宽度,光线位置 x 却无法准确表达。3)只有当窗宽 γ 选取在合适的范围时,其 GWFT 能获得比较好的结果, $|G_\gamma|^2$ 分布在特定曲线周围,即可

表征光波场中任意一点处的局部空间频率。

为了获得对应的光线方向,取频率分布的峰值部分来近似代表位于该点的光线方向。对于任意的一维光场,利用 GWFT 的相-空间分布结合曲线拟合可以近似求出空间某点所对应的光线方向。图6展示了两类光束通过 GWFT 方法获得的光线在 xoz 平面的二维分布。图6(a)表示 Airy 光束的光线模型,图6(b)为一维厄米高斯光束的光线模型。可见光线在起始位置同一点存在不同方向的光线。此外,由于 GWFT 是基于高斯分布,如果对一维基

模高斯光束作 GWFT, 得到的相-空间曲面将会是一个点, 可见不同光束均可通过 GWFT 方法获得光线以表征光波场的空间传播。

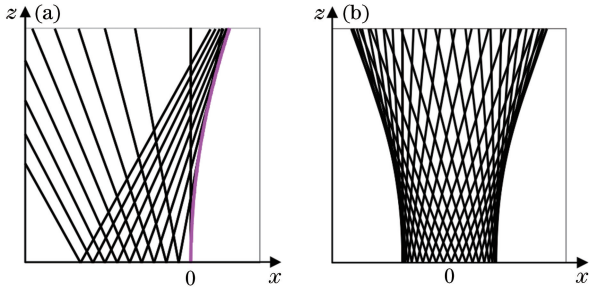


图 6 光束的光线分布。(a) Airy 光波场; (b) 厄米高斯光波场
Fig. 6 Ray distributions of two different beams. (a) Airy beam; (b) Hermit-Gaussian beam

5 SAFE 法表征光束的传输

在 xoz 二维平面内, 光线的初始条件可以由一个位置变量确定, 故其相-空间分布在二维曲线附近。而对于三维空间, 光线的初始条件由两个位置变量确定, 因此其相-空间分布在四维曲面周围, 这个曲面也被称作为拉格朗日流形^[72]。GWFT 在几何光波场中的研究是由 Alonso 与 Forbes 共同完成。以 GWFT 为基础, 结合高斯光线的模型提出了一种改进的光线模型——SAFE。该方法使得光线与光波之间联系更紧密, 使用该方法表征光束的时候更加方便, 且不会出现焦散线附近失效等问题。

5.1 柔性单元的稳定聚集(SAFE)

假设光束沿着 z 轴正方向传播, 且光线参考起点均在 x 轴上。对于二维光波场, 光线路径的横坐标可表示为关于起点位置 $(\xi, 0)$ 及 z 坐标的参数方程即 $x = X(\xi, z)$, 则 $X(\xi, 0) = \xi$ 。光线的方向 $\partial X(\xi, 0)/\partial z$ 可由光场在 $x = \xi$ 和 $z = 0$ 处的高斯加窗傅里叶变换获得。利用(13)式与(14)式, 从 ξ 出发的光线到达 z 处的 x 方向广义动量大小为 $p(\xi, z)$, 由(15)式得 $\partial X(\xi, z)/\partial z = p/\sqrt{n^2 - p^2}$ 。设 $H(\xi, z) = \sqrt{n^2 - p^2}$, 则光线方程满足

$$\frac{\partial X(\xi, z)}{\partial z} = \frac{p(\xi, z)}{H(\xi, z)}, \quad \frac{\partial p(\xi, z)}{\partial z} = \frac{1}{2H} \frac{\partial n^2}{\partial x}. \quad (44)$$

此外, 设 S 为光线从起始点 $(\xi, 0)$ 到达 (X, z) 处已经积累的光程, 则根据(7)式有

$$\frac{\partial S}{\partial z} = \frac{n^2}{H}, \quad \frac{\partial S}{\partial \xi} = p \frac{\partial X}{\partial \xi}, \quad (45)$$

当 $z = 0$ 时, (45) 式中第 2 项为光波场的相-空间

曲线。

SAFE 模型同高斯光线一样, 将每根光线视为具有一定宽度的高斯光束, 从不同起点出发的携带不同权重初始光波场的光线朝着不同方向前进。每根光线对空间各点的光波场贡献为

$$g(x, z, x_0, \gamma) = \exp\left[-\frac{k\gamma}{2}(x - X)^2\right] \cdot \exp\{ik[S + (x - X)p]\}. \quad (46)$$

同时每根光线具有不同的权重, 设权重函数为 $h(z, \xi, \gamma)$, 则光线构成的总几何光波场为

$$U_\gamma(x, z) = \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \int h(z, \xi, \gamma) g(x, z, \xi, \gamma) dx_0. \quad (47)$$

在以往的高斯光线模型中, 光线权重 h 的选取必须使得对应光线所加载的几何光波场满足波动方程(1)式, 进而使得(47)式也满足波动方程(1)式。在这个限制条件下量化光线权重 h 相当困难, 并且由于每根光线的高斯宽度参数 γ 不同, 难以确定光线的初始几何光波场。

为了解决这些问题, SAFE 的核心思想并不需要让每根光线都满足波动方程, 只需要让(47)式满足波动方程即可。虽然高斯宽度参数 γ 影响几何光波场的构成, 但是作为一种近似方法让 U_γ 满足 $\partial U_\gamma/\partial \gamma = O(k^{-1})U_\gamma$, 即可使 U_γ 在一定程度上对 γ 的变化不敏感。由 Alonso 与 Forbes 推导得到的权重函数 h 表达式^[59]为

$$h(z, \xi, \gamma) = \sqrt{\frac{1}{H} \frac{\partial(\gamma X + ip)}{\partial \xi}} \times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j(\xi)}{(ik)^j}, \quad (48)$$

式中: a_j 是光线的初始振幅系数, 为非负数。在几何光学近似下, 可直接取(48)式中的零阶项。在偏导项 $\partial(\gamma X + ip)/\partial \xi$ 中, $\gamma X + ip$ 为光场在不同横截面下的相-空间曲线的复平面表示方法, 描述了随光线传输的相-空间曲线; 该偏导项代表相-空间曲线随着光线的相关参数而变化, X 为前面所述表述 x 的 z 坐标参数方程。上述光线位置与方向依赖起点位置横坐标 ξ , 因此偏导项写成相-空间曲线对 ξ 的偏导。若光线位置与方向由其他参数确定例如 $\xi = f(\chi)$, 则偏导项直接写为关于 χ 的偏导, 而无需根据微分不变性额外乘以 $\partial \xi/\partial \chi$ 。

与光线管道认为光线是相互独立和互不影响的思想不同, SAFE 方法认为光线是相互制约并协同存在。光线不仅仅能影响到光线路径上点的光波场分布, 还能影响到空间中其他点的光波场分布, 其光

波场强度随着点到光线的距离呈高斯型衰减。空间某点的光波场不再是只与经过该点的光线相关,而是与所有光线相关,总光波场是光线的几何光波场的集体行为。如果将光线看作是一根根随 γ 变化的柔性单元,光线的集体行为(总光波场)满足波动方程且相对于 γ 的变化较为稳定,这就是其名称“柔性单元的稳态聚集”的由来。此外,SAFE 与高斯加窗傅里叶变换相结合可以构建任意二维光场分布的光线模型,且易扩展到三维空间用于三维光波场的建模与分析。

在均匀介质中,光线方向不随光线传播而改变,(46)式可进一步简化为更加普遍的形式,即

$$g(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, \gamma) = \exp\left\{-\frac{k\gamma}{2}[x - X(\xi, z)]^2\right\} \cdot \exp[ikS_0(\xi)]\exp[ik(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{u}_0], \quad (49)$$

其几何关系如图 7 所示,其中 $\mathbf{r}_0 = (\xi, 0)$ 为光线的参考起点, $\mathbf{r} = (x, z)$, $\mathbf{u}_0 = (p, \sqrt{1-p^2})$ 为光线方向向量, S_0 为光线在参考起点 \mathbf{r}_0 处的光程。其中 $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{u}_0$ 即为观察点与光线起点连线在光线方向的投影长度。当 $\gamma \rightarrow 0$ 时,高斯分布宽度趋向于无穷,(47)式变为光场的角谱积分公式,即

$$U_{\gamma \rightarrow 0}(x, z) = \int A(\xi)\exp[ik\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}_0(\xi)]d\xi, \quad (50)$$

式中: A 为平面波的角谱。

$$A(x_0, z_0, x, z) = \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \sqrt{\frac{i}{H} \frac{\partial v}{\partial \xi}} a_0(\xi) \exp[ik(S_0 - \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{u}_0)], \quad (51)$$

式中: $v = ip$ 。此时光线代表无限宽的平面波。而当 $\gamma \rightarrow +\infty$ 时,光线变为无限窄的光线管道。

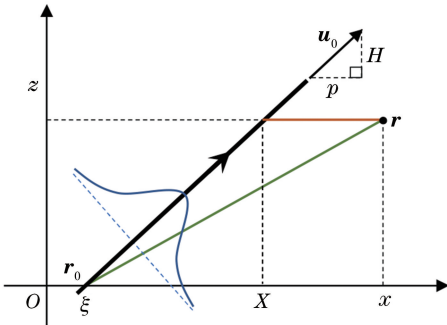


图 7 SAFE 方法中单根光线的物理内涵

Fig. 7 Physical insight of single ray in SAFE method

下面以无衍射光束、Airy 光束及具有涡旋相位面的光束为例,展示使用 SAFE 方法根据光线模型构建目标光场。

5.2 锥透镜产生的无衍射光束

实验证明,无衍射光束可使用锥透镜实现^[91-94]。为了简化分析,该小节展示了二维情况下,使用轴棱锥产生无衍射余弦光束的几何光学理论,并使用 SAFE 方法构建光场分布。如图 8(a)所示,光线经过棱锥折射后向光轴方向平行会聚。以 z 轴为分界,从锥透镜出发,位于 z 轴右侧的光线为 R_1 族;位于 z 轴左侧的光线为 R_2 族。这两族的光线相交形成一个关于 z 轴对称的棱形区域。 R_1 族与 R_2 族中光程相等的光线在 z 轴相交,使光波干涉相长。若此时在棱形区域使用一个障碍物遮挡光线,如图 8(b)所示,由于障碍物的遮挡,障碍物后方产生阴影区域,这些区域由于没有光线经过,故光场强度较弱(注意其他地方的光线会对该部分产生一定程度的光扰动)。图中白色区域中至少有来自 R_1 或 R_2 族的光线。在障碍物后方存在一个小的棱形区域,该区域内有同时来自 R_1 与 R_2 的光线。这些光线并没有被障碍物遮挡,并且同样在 z 轴相交,使光波干涉相长。这些光线携带的光场使光束具有了自修复特性。下面我们将使用 SAFE 重构棱锥折射后的光场。

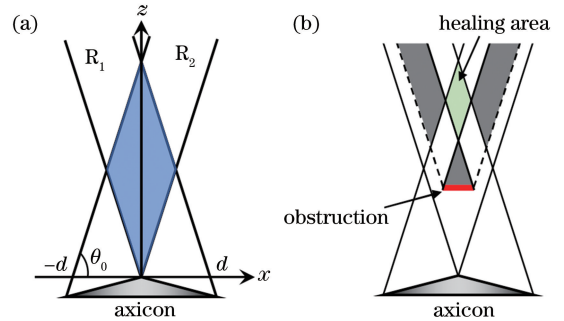


图 8 使用锥透镜产生无衍射光束。(a) 平行光线经由锥透镜折射产生“X”形相互交叉的光线;(b) 使用光线展示光束的自修复特性

Fig. 8 Axicon-based generation of nondiffracting beam.

(a) “X”-like rays which can be generated by refracting parallel rays through axicon lens; (b) ray presentation of self-repairing property of beam

以光锥在 z 轴的顶点为坐标系原点建立坐标系。设 R_2 族光线与 x 轴的夹角为 θ_0 , 光线起点为 $(\xi, 0)$, 根据(44)式与(45)式, R_1 与 R_2 族光线在 $z = 0$ 平面的方向矢量与初始光程为

$$\mathbf{u}_0 = \begin{cases} (\cos \theta_0, \sin \theta_0), & x_0 < 0 \\ (-\cos \theta_0, \sin \theta_0), & x_0 > 0 \end{cases}, \quad (52)$$

$$S_0 = \begin{cases} x_0 \cos \theta_0, & x_0 < 0 \\ -x_0 \cos \theta_0, & x_0 > 0 \end{cases}$$

此时, $p = -\text{sign}(\xi) \cos \theta_0$, $H = \sin \theta_0$, $\partial_\xi X = 1$, 则权重函数 $h = a_0(\xi) \sqrt{\gamma / \sin \theta_0}$ 。根据(49)式可得到的总光场的表达式为

$$U(r) = \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \exp(ikzH) \int_{-d}^d \sqrt{\frac{\gamma}{H}} a_0(\xi) \cdot \exp\left[-\frac{\gamma k}{2}(x-X)^2\right] \exp(ikxp) d\xi. \quad (53)$$

选取 $a_0(\xi) = 1$, $\gamma = 0.01$, $\lambda = 1.064 \mu\text{m}$, $\theta_0 = 80^\circ$, d 为 R_1 和 R_2 的光线范围(见图 8)。令 R_1 来自 $0 \mu\text{m} \leq \xi \leq 15 \mu\text{m}$ 区域, R_2 来自 $-15 \mu\text{m} \leq \xi \leq 0 \mu\text{m}$ 区域, 光强分布如图 9(a) 所示。

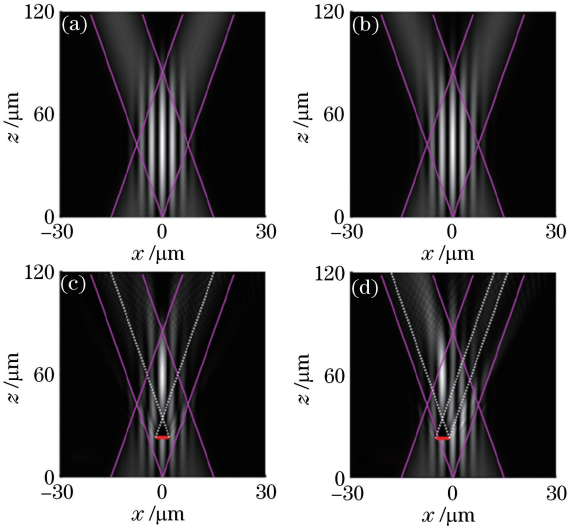


图 9 光强分布。(a)使用 SAFE 构建的光强分布;(b)使用角谱衍射计算的光强分布;(c)(d)使用角谱衍射计算得到的遮挡不同区域后光束的自修复情况

Fig. 9 Intensity distributions. (a) Intensity distribution calculated by SAFE; (b) intensity distribution calculated by angular spectrum diffraction method; (c) (d) self-repairing situation of beam blocked at different regions, calculated by angular spectrum diffraction method

图 9(a) 为利用 SAFE 方法计算所得的强度分布, 其中使用直线绘制了光线的边缘。 R_1 与 R_2 族光线相交的棱形区域光场呈现了无衍射特性, 其中心光强分布的强度与宽度不受光束传播距离的影响。为了验证使用 SAFE 方法构建光场的正确性, 使用 SAFE 方法构建的光场在 $z=0$ 处的分布记为 U_0 。图 9(b) 展示了根据 U_0 使用角谱衍射计算的光场在空间中的分布。对比图 9(a) 与图 9(b), 可见使用 SAFE 构建的光场与衍射计算的光场吻合良好。图 9(c) 展示在 $z = 23.2 \mu\text{m}$ 上遮挡了 $-2 \mu\text{m} \leq x \leq 2 \mu\text{m}$ 区域后的光场光强分布, 其中强度为角谱

衍射计算的结果, 虚线为根据几何投影绘制出的障碍物产生的阴影边界。可以看到, 图 9(c) 的光强及阴影区域分布与图 8(b) 所预测的一样, 在障碍物的阴影区域, 光强甚弱, 而在障碍物后方的棱形区域, 光束呈现自我修复特性。图 9(d) 展示了遮挡 $-5 \mu\text{m} \leq x \leq -1 \mu\text{m}$ 处后光场的自修复情况。由此可见, 光场的分布情况可以从光线的分布来预测。

在 $\gamma \rightarrow 0$ 的情况下, 每一根光线都被视为平面波。令 $a_0 = \sqrt{H/\gamma}$ 并代入(53)式, 简化为

$$U(x, z) = \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \exp(ikz \sin \theta) 2d \cos(kx \cos \theta_0), \quad (54)$$

此时为无衍射余弦光束。

5.3 Airy 光束

Airy 光束是无衍射光束的一类, 具有特殊的自加速特性。Airy 光束的光线模型为与抛物线焦散线相切的直线。虽然可以从 $z=0$ 平面分析光线的分布, 但是这种情况下难以量化光线的振幅系数 a_0 。由于 Airy 光束的无衍射特性, 其光强沿焦散线曲线为常数, 以抛物线上的点构建均匀介质 Airy 光束的光线模型, 可以简化振幅系数 a_0 的选取。如图 10(a) 所示, 考虑抛物线 $x=Cz^2$ 上任意一点 $r_1 = (Ct^2, t)$ (C 为抛物线的开口尺寸参数, t 为抛物线参数方程的参数), 过 r_1 的切线可以由抛物线方程求得。设该切线的方向向量为 $\mathbf{u}_0 = (p, H)$, 则以切线为光线, 其广义动量 p 与 H (光线向量与 x 轴和 z 轴的方向余弦) 分别为

$$p = \frac{2Ct}{\sqrt{1+4C^2t^2}}, \quad H = \frac{1}{\sqrt{1+4C^2t^2}}. \quad (55)$$

图 10(b) 为以抛物线焦散线上点建立的 Airy 光束的光线模型。可见光线倾斜切于焦散线, 光束具有自加速特性。

记光线与 x 轴交于 $\xi(t) = -Ct^2$, 根据(7)式与(45)式, 可得 $\xi(t)$ 点处的光程为

$$S_0 = \int p(t) \cdot \left[\frac{d\xi(t)}{dt} \right] dt = \frac{-2Ct \sqrt{1+4C^2t^2} + \text{arcsinh}(2Ct)}{4C}. \quad (56)$$

这里要注意的是, (56) 式光线在 ξ 点的分量 p 为 $\partial S_0 / \partial \xi$, 此时 p 与 ξ 均为 t 的函数, 故微分不变性(53)式中产生 $d\xi/dt$ 项。根据(49)式, 光线的高斯贡献函数 g 为

$$g(x, z, t, \gamma) = \exp\left[-\frac{k\gamma}{2}(x - Ct^2 - 2Ctz)^2\right] \cdot \exp(ikS_0) \exp\{ik[(x - \xi)p + zH]\}. \quad (57)$$

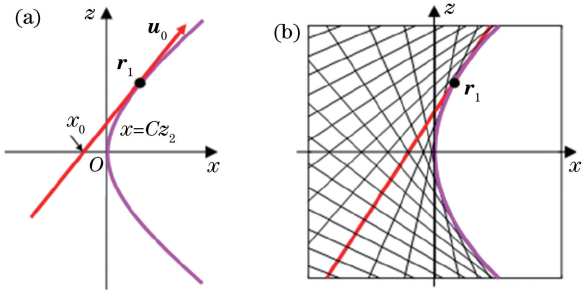


图 10 Airy 光束的光线示意图。(a)以抛物线焦散线上的点为参考点构建 Airy 光束的光线模型;(b)光线模型示意图

Fig. 10 Ray presentation of Airy beam. (a) Ray model of Airy beam built by choosing arbitrary point at parabolic caustic as reference point; (b) schematic of ray model

与光程不同的是, Airy 光束的光线 $X(t) = x_0 + z \cdot p/H$ 与方向 p 均为 t 的函数, (48) 式中偏导项直接写为关于 t 的偏导, 取振幅的零阶项, 则权重函数 h 为

$$h(z, t, \gamma) = \sqrt{\frac{1}{H} \frac{\partial(\gamma X + ip)}{\partial t}} a_0 = \sqrt{\frac{2\gamma C(z-t)}{H} + 2iCH^2} a_0. \quad (58)$$

由于 Airy 光束的无衍射特性, 光强沿着抛物线的分布为常数, 故可直接令 $a_0 = 1$ 。则根据 (47) 式, 总几何光波场分布为

$$U_\gamma = \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \int \sqrt{\frac{2\gamma C(z-t)}{H} + 2iCH^2} \cdot \exp\left[-\frac{k\gamma}{2}(x - Ct^2 - 2Ctz)^2\right] \times \exp(ikS_0) \exp\{ik[(x-\xi)p + zH]\} dt. \quad (59)$$

高斯窗宽系数 γ 在一定范围内都能使用 (59) 式表征 Airy 光束, 如第 4 节使用高斯加窗傅里叶变换分析 Airy 光束时取 $\gamma = 0.002$ 。这里我们同样选取 $\gamma = 0.002$, 光束参数与光波长选取同第 4 节一致, 即 $w_0 = 4 \mu\text{m}$, 光波长 $\lambda = 0.532 \mu\text{m}$ 。图 11(a) 展示了 (59) 式构建的 Airy 光束的几何光波场光强分布。光线之间的相互干涉使得光出现明暗相间的分布, 光强逐步减弱, 此外在焦散线附近 SAFE 方法也正确构建了光波场。图 11(b) 对比了 (59) 式计算的几何光波场在 $z=0$ 的归一化光强分布与使用 Airy 函数直接计算的结果。可以发现, 使用几何光学法重构的 Airy 光束与 Airy 函数计算结果符合得很好。此外, 根据光线与焦点相交或与焦散线/面相切等关系, 可结合 SAFE 方法设计具有焦散线的加

速光场^[9-10,83], 并预测这类光束在遭遇障碍物时的自修复特性^[95]。

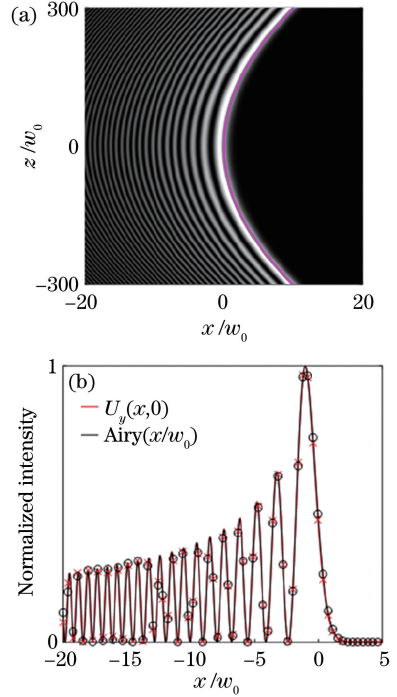


图 11 SAFE 方法构建 Airy 光束。(a) xoz 面的归一化光强分布;(b) $z=0$ 平面的归一化光强分布与 Airy 光束对比

Fig. 11 Airy beam reconstructed by SAFE method. (a) Normalized intensity distribution of xoz plane; (b) comparison of normalized intensity distribution of $z=0$ plane with Airy beam

此外, 还可以使用光线模型解释 Airy 光束被遮挡后的自修复特性^[95]。图 12 展示了 Airy 光束的光线模型及其被遮挡后的光场分布与光线阴影边界的分布。如图 12(a) 所示, 所有光线与抛物线焦散线相切, 设图中随着 z 的增大, 向左边倾斜的光线为 R_1 族, 向右边倾斜的光线为 R_2 族。图 12(b) 展示了 Airy 光束被遮挡主瓣后的光场分布, 图中使用白色直线标出了阴影边界。可以看到两条边界清晰地区分了光场的阴影与明亮区域。在阴影边界中, 来自 R_1 的光线被遮挡, 而来自 R_2 族的光线补充至阴影处。这些光线携带的光场补充了 R_1 被遮挡的漏洞, 使得光束光场具有自修复性质。

当遮挡了光束旁瓣时, 如图 12(c) 所示, 障碍物上方三角阴影区无任何光线进入, 光场微弱。对于具有无穷能量的无衍射光束, 其光线可以来自无穷远处, 而实验中由于仪器尺寸有限, 光线被限制在一定的范围内, 光束只能在一定范围内保存无衍射的特性。

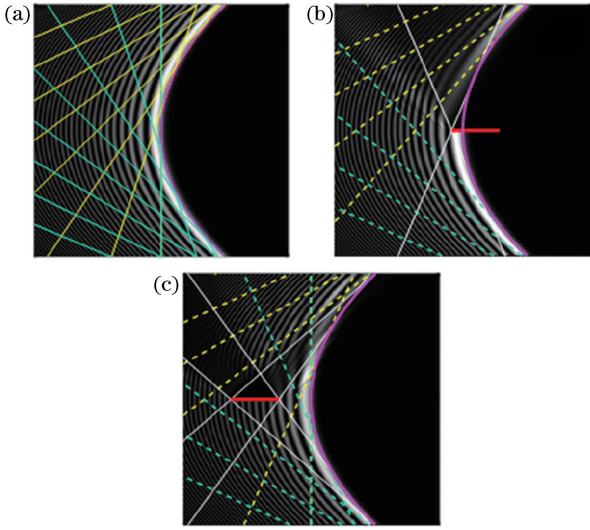


图 12 Airy 光束自修复示意图。(a) Airy 光束的光线模型；(b)(c) 遮挡不同区域时 Airy 光束的光场分布
Fig. 12 Schematic of self-repairing property of Airy beam. (a) Ray model of Airy beam; (b) (c) optical-wave-field distributions of Airy beam blocked at different regions

5.4 具有涡旋相位面的光束

在二维平面中,SAFE 方法可以直接构建出光场在起始位置和传输后的分布,而在三维空间中 SAFE 方法往往不直接构建出三维光场的整体分布,而是构建出光场在某一平行于 xoy 平面的界面分布(即起始位置的分布),然后使用衍射理论计算后续的光场分布,也可以用光线追迹计算空间场分布。为了简化,令光线的参考起点均位于 xoy 截面 ($z=0$),此时光线起点与光线方向均由两个变量约束。假设起点位置 \mathbf{Q} 的 x 坐标与 y 坐标可以表示为变量 ξ 与 η 的参数方程,即 $\mathbf{Q}=[x_0(\xi, \eta), y_0(\xi, \eta)]$ 。同理光线横向动量 \mathbf{P} 也可写为 $\mathbf{P}=[p(\xi, \eta), q(\xi, \eta)]$,则 SAFE 模型的光程(31)式变为

$$\frac{\partial S}{\partial \xi} = \mathbf{P} \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial S}{\partial \eta} = \mathbf{P} \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \eta}, \quad (60)$$

权重函数 h 为

$$h = \sqrt{\frac{1}{H} \frac{\partial(\mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{Q} + i\mathbf{P})}{\partial(\xi, \eta)}} [a_0(\xi, \eta) + O(k^{-1})], \quad (61)$$

式中,高斯窗宽参数 $\mathbf{\Gamma}$ 为 2 行 2 列矩阵, $H = \sqrt{1 - |\mathbf{P}|^2}$ 。将(60)式和(61)式代入(47)式,得到

$$U(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \iint A(\xi, \eta) \sqrt{\frac{1}{H} \frac{\partial(\mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{Q} + i\mathbf{P})}{\partial(\xi, \eta)}} \cdot \exp\left(-\frac{k}{2} |\mathbf{\Gamma}| |\mathbf{x} - \mathbf{Q}|^2\right) \exp\{ik[S + (\mathbf{x} - \mathbf{Q}) \cdot$$

$$\mathbf{P}]\} d\xi d\eta. \quad (62)$$

利用(62)式,三维空间内光线的初始条件确定后,就能确定几何光波场在空间传输后的分布。

值得一提的是,三维空间的光线具有二维光线所没有的性质——倾斜的光线可以绕平行于 z 轴的直线旋转构成一个三维直纹面的母线簇,如图 13(a)所示。图 13(b)为图 13(a)的单根光线示意图,从 $\mathbf{X}=(\mathbf{Q}, 0)$ 出发,沿方向 $\mathbf{u}=(\mathbf{P}, \sqrt{1-|\mathbf{P}|^2})$ 传播的光线绕 z 轴旋转构成单叶双曲母线的结构,这里 $\mathbf{Q}=(x_0, y_0)$, $\mathbf{P}=(p, q)$ 。Turnbull 等^[96]证明该光线结构与平行光线被螺旋相位板折射后的光线轨迹一致,拥有这种光线结构的光束具有螺旋相位面,光子携带轨道角动量。这种旋转对称的倾斜光线的光波场分布可以使用 SAFE 方法简单重构。在图 13(b)中,设光线从起点 $\mathbf{Q}=(R \cos \theta, R \sin \theta)$ 出发,沿方向 $\mathbf{u}=(\sin \alpha \sin \theta, \sin \alpha \cos \theta, \cos \alpha)$ 传输,其中 R 为光线起点绕 z 轴旋转后圆的半径。光线横向广义动量 $\mathbf{P}=(\sin \alpha \sin \theta, \sin \alpha \cos \theta)$,则根据(60)式可得每根光线的光程为

$$S_0 = \int \mathbf{P} \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \theta} d\theta = R\theta \sin \alpha. \quad (63)$$

\mathbf{Q} 与 \mathbf{P} 实际构成了光线的四维相-空间分布曲线,当 R 固定时,其变量为 θ 。在 $z=0$ 平面上,由于光线不与 z 轴平行,因此从不同 $\mathbf{Q}(R, \theta)$ 点出发的光线在 \mathbf{Q} 点拥有不同的初始光程,记为 $S_0(R, \theta)$ 。在 R 固定的情况下,假设 $S_0(0)=0$ 处的光线的初始光程为 0,则在 $\theta=\theta_1$ 处的光线与 $\theta=0$ 处光线的光程差 $\Delta S_0(\theta_1)$ 可以由(60)式计算得到,即 $\Delta S_0(\theta_1) = \int_0^{\theta_1} \mathbf{P}(\theta) \cdot \partial \mathbf{Q} / \partial \theta d\theta$ 。特别,当积分变量 θ 从 0 变到 2π 时,所关注的光程差位于同一根光线上。该光程差必须为波长的整数倍。故(60)式必须满足量子化

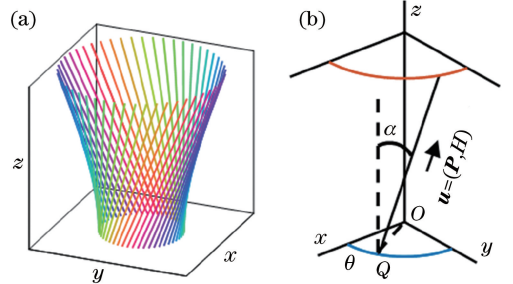


图 13 均匀倾斜的光线使光束具有螺旋相位面。

(a) 光线示意图; (b) 单根光线的具体分析

Fig. 13 Beam having spiral wavefront composed by uniform skew rays. (a) Schematic of skew rays; (b) specific analyse of single ray

条件,即

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{P} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \theta} \right) d\theta = 2\pi R \sin \alpha = m\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (64)$$

该条件表明光线与 z 轴(光轴)的夹角必须满足 $\sin \alpha = m/(kR)$, 在傍轴条件下有 $\sin \alpha \sim \alpha$, 则满足 $\alpha \sim m/(kR)$, 这与文献[96]的中提到的要求一致。最后整理得几何光波场的分布为

$$U(\mathbf{r}, 0) = \int_0^{2\pi} a(\theta) \exp\left(-\frac{k\gamma}{2} |\mathbf{r} - \mathbf{Q}|^2\right) \cdot \exp[ik(\mathbf{r} - \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{P}] \exp(ikR \sin \alpha \theta) d\theta. \quad (65)$$

由于这里只关心相位的分布,故将权重函数

写为关于 θ 的函数 $a(\theta)$ 。选择不同的 m , 通过几何光波场(65)式可以获得不同的螺旋相位分布, 如图 14 所示。当选择 $m=0$ 时光线相互平行(平面波), 没有光程差。 xoy 面为相位分布为 0 的等相面, 如图 14(a) 所示。图 14(b) 展示了 $m=1$ 时的相位分布, 可见相位有一个 2π 阶跃结构。图 14(c) 展示了 $m=3$ 时的相位分布, 相位有三个 2π 阶跃结构。对于拉盖尔高斯光束等这类有相位涡旋的光束, 其光线模型都包含上述倾斜圆对称的光线结构。使用螺旋相位面折射^[97-98]或反射^[99]后的平行光都具有倾斜的光线结构, 同时拥有螺旋相位面。

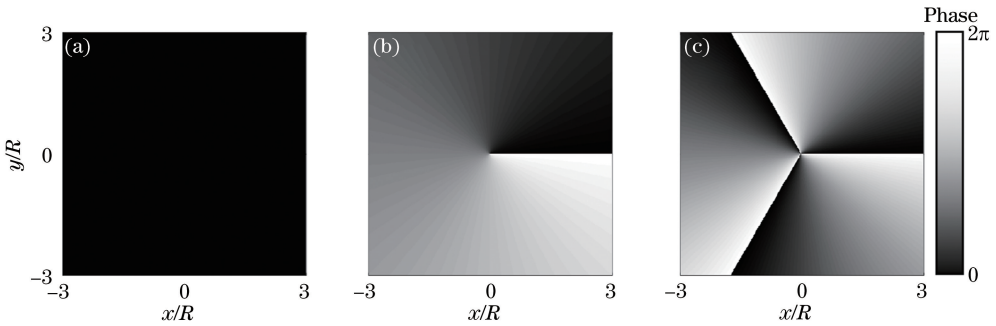


图 14 不同 m 值下光波场的相位分布。(a) $m=0$; (b) $m=1$; (c) $m=3$

Fig. 14 Phase distributions of optical wave field with different values of m . (a) $m=0$; (b) $m=1$; (c) $m=3$

对一个已知的光波场建立光线模型, 可以从相空间的曲线或曲面着手。亦可以利用光线与焦散线/焦散面的几何关系, 或将已有的二维光线模型经过旋转平移等方式建立三维光线模型。

5.5 利用光线庞加莱球法构建傍轴结构光束

由于任何光波场都满足亥姆霍兹波动方程(1)式, 故为了获得某一光波场, 只需给定限制条件, 例如选取一些特定坐标系, 添加傍轴近似条件解亥姆霍兹波动方程即可。以光学谐振腔为例, 在解(1)式的过程中, 对坐标系的选取即为光学谐振腔镜面几何轮廓的选取, 对应的亥姆霍兹方程的解就是该谐振腔能稳定生成的光束^[12]。例如矩形反射镜的谐振腔能获得厄米高斯光束及其高阶模式, 在圆形反射镜下能获得拉盖尔高斯光束及其高阶模式^[12]。从几何光学的角度来分析, 光线在谐振腔两个镜面之间的稳定往复反射, 可以等效为某质点在曲面反弹板之间的往返反弹。若将质点在两个反弹板之间的往复运动向中间平面进行投影, 其投影点的运动呈现为二维的简谐振动, 而这个运动轨迹的形状为椭圆^[78]。庞加莱球面上的点可以描述单位圆内的椭圆, Alonso 等^[78]基于

这一特征提出了利用光线庞加莱球法设计复杂结构光束的方法。他们使用该方法成功设计并再现了厄米高斯光束与拉盖尔高斯光束, 用光束的光线表征了光波场沿光线的传输。

如图 15(a) 所示, 庞加莱球面上任意一点由其经度角 φ 与纬度角 θ 共同确定。对应的琼斯向量可以用复数形式表示, 即

$$\mathbf{v}(\theta, \varphi) = \cos \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\varphi}{2}, \sin \frac{\varphi}{2} \right) + i \sin \frac{\theta}{2} \left(-\sin \frac{\varphi}{2}, \cos \frac{\varphi}{2} \right). \quad (66)$$

利用琼斯向量 \mathbf{v} 可以得到一个描述光线位置的椭圆形轨道 \mathbf{Q} (图 15(b)), 及一个描述光线横向方向的轨道 \mathbf{P} 。这两个量表示为

$$\mathbf{Q} = Q_0 \operatorname{Re}[\mathbf{v} \exp(-i\phi)], \quad \mathbf{P} = P_0 \operatorname{Im}[\mathbf{v} \exp(-i\phi)], \quad (67)$$

式中, Re 为实数部分, Im 为虚数部分, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ 。一个 τ 值对应一根光线, 其在椭圆上的起始位置的水平坐标和方向分别由 $\mathbf{Q}(\phi)$ 和 $\mathbf{P}(\phi)$ 确定。在傍轴条件下有 $|\mathbf{P}| \ll 1$, 则光线传播到 z 处的水平位置为 $\mathbf{X} = \mathbf{Q} + \mathbf{P} \cdot z$, \mathbf{Q} 和 \mathbf{P} 共同构成三维光线的相空

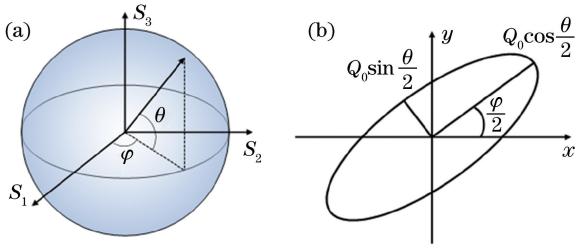


图 15 庞加莱球面上点与实空间中椭圆的对应关系^[78]。(a)庞加莱球面上点由经度角 φ 与纬度角 θ 共同确定；(b)实空间内椭圆的参数可由庞加莱球面上的点确定

Fig. 15 Corresponding relationship between point on Poincaré sphere and ellipse in real space^[78]. (a) Location of point on Poincaré sphere determined by longitude angle φ and latitude angle θ ; (b) parameters of ellipse in real space determined by point on Poincaré sphere

间曲面。光线庞加莱球法利用庞加莱球面上的一条曲线获得一套由(67)式描述的光线,然后再利用SAFE方法构建光束在束腰面上的光波场分布。由于每个椭圆闭合,故椭圆尺寸参数 Q_0 和 P_0 必须满足第一个量子化条件。此外,如果庞加莱球面上的曲线是闭合的,则需要引入第二个量子化条件作为约束。光线庞加莱球构建光波场的流程大致可以分为如下4步。

- 1) 选取感兴趣的庞加莱球球面上的曲线,获得关于参数 θ 与 ϕ 的表达式。
- 2) 若曲线闭合,修改曲线参数使得曲线满足量子化条件后进入下一步,若曲线非闭合则直接进入下一步。
- 3) 确定光线椭圆轨道参数。
- 4) 使用(62)式计算光场分布。

Alonso 等经过计算发现,厄米高斯光束与拉盖尔高斯光束都可以用一个平面截取庞加莱球获得的圆形曲线来构建。光束参数取决于截面与球心的距离,光束类型取决于截面法线的朝向。若截面法线平行于庞加莱球 S_3 轴,则获得的光束是拉盖尔高斯光束,如图 16(a1)~(a3)所示。其中图 16(a1)展示了庞加莱球上曲线的分布,图 16(a2)展示了光束椭圆光线起点的分布。对于拉盖尔高斯光束,朝向不同但形状一致的椭圆外切于光束圆形内焦散线(蓝色圆),光束外焦散线同样为圆形(洋红色圆)。图 16(a3)展示了光束的光线模型,可见其位于椭圆轨道上,由相同参数 φ 确定的光线关于 z 轴旋转对称,使得光线具有螺旋相位结构。若庞加莱球上截

面法线朝向水平方向,则获得的是光束为厄米高斯光束,如图 16(c1)~(c3)所示。此时形状各异的椭圆构成矩形的外轮廓,光束无内焦散线。其他情况下对应的是厄米-拉盖尔高斯光束,如图 16(b1)~(b3)所示。图 16(a2)、(b2)同样使用蓝色曲线与洋红色曲线标出了光束的内外焦散线形状,这也是光线庞加莱球法的一大优势——能明确地界定光束的焦散线分布情况。

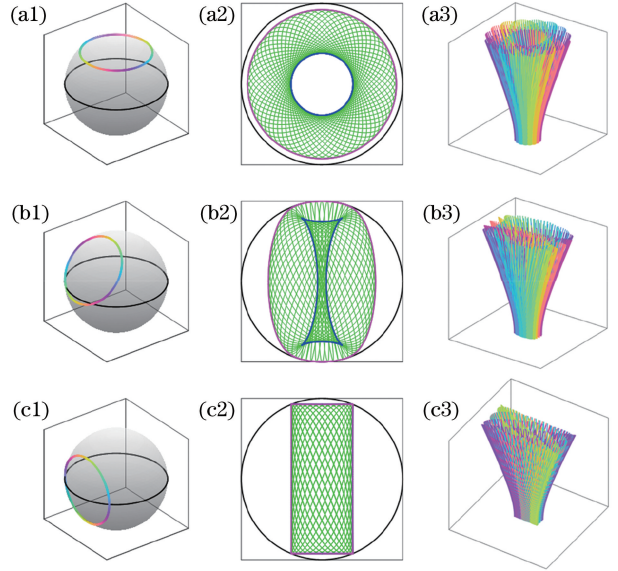


图 16 庞加莱球面上的圆形路径与不同种类的厄米-拉盖尔高斯光束的对应关系^[78]。(a1)~(c1)法线朝向不同 θ 角的圆形庞加莱球面曲线；(a2)~(c2)束腰面上归一化尺寸的椭圆分布；(a3)~(c3)对应的光线模型

Fig. 16 Corresponding relationship between circular curve on Poincaré sphere and different kinds of Hermit-Laguerre Gaussian beams. (a1)-(c1) Circular curves on Poincaré sphere with normals toward different latitude angles θ ; (a2)-(c2) ellipse distributions of normalized sizes on beam-waist plane; (a3)-(c3) corresponding ray models

除了上述圆形的庞加莱球曲线,选择其他更加复杂的庞加莱球上的曲线能构建出不同的光束,文献^[78]中展示了一种八边型结构光束,其内焦散线为八角星结构。张书赫等^[100]利用梅花曲线构建了一系列花瓣型结构光束,在某些特定的条件下该光束可以退化为拉盖尔高斯光束与无衍射光束,在通常情况下也能得到八角星形或十角星形内焦散线等更为复杂的结构光场,如图 17 所示。

光线庞加莱球法最大的优势就是可视化地设计

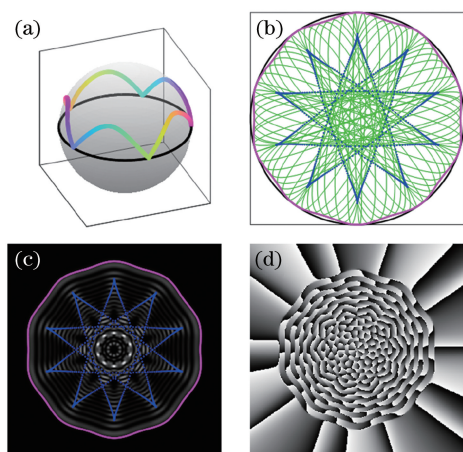


图 17 十角星内焦散线的结构光场^[100]。(a) 庞加莱球面曲线；(b) 椭圆及其内外焦散线；(c) 束腰面归一化光强分布；(d) 束腰面相位分布

Fig. 17 Structured Gaussian beam with decagram inner caustic^[100]. (a) Curve on surface of Poincaré sphere; (b) ellipses and their outer and inner caustics; (c) normalized intensity distribution on beam-waist plane; (d) phase distribution on beam-waist plane

结构光束。比起求解复杂的波动方程, 光线庞加莱球法用一种更为直观可操作的方式构建结构光束的光波场及其对应的光线模型, 能清晰勾勒出光波场的内外焦散线曲线。此外, 可以利用光束的性质反演出对应输出激光振荡腔体的结构参数, 光线庞加莱球法还有望用于设计特殊光束分布的新型激光器。

6 总结与展望

本文回顾了几何光学光线的发展过程, 其中包括应用广泛的光线管道模型及 SAFE 方法, 并介绍了不同方法在构建光束和描述光波场传输方面的应用。随着几何光学的逐渐完善, 从光线的粒子模型, 发展到光线管道模型、高斯光线模型及 SAFE 方法, 光线与光波场之间的关系更为紧密。虽然在不同的光线模型中, 光线携带几何光波场的表示方式不同, 但光线都满足几何光学的基本定理(费马定律、反射和折射定律)。这里还必须强调一点, 尽管几何光波场的表达形式各异且看似互不相容, 但我们需要明白光线只是一种抽象的数学工具, 选择何种光线模型取决于对具体问题的分析。相较于 SAFE 方法只发展了无限半屏的衍射理论^[101], 光线管道模型具有更加完备的衍射理论^[102-104], 其正确性由实验支持^[105], 可以计算

光波场在各类断面、曲面的衍射, 并且已经被广泛推广并运用在城市天线通信设计和地球物理地震波^[106]的研究中。光线管道模型还有完备的矢量形式, 能描述矢量光场的传输。而 SAFE 模型则给出了更加合理的光线与光波场的相互约束关系, 不受焦点、焦散线/面等影响。目前 SAFE 方法只有标量形式, 以及对无限半平面的衍射分析, 矢量形式的 SAFE 方法和更加完备的基于 SAFE 方法的几何光学衍射理论有待研究。

相较于波动光学描述光束传输, 几何光学有着特有的优势。

1) 直观地表征光束的传输。直观地解释光束的新奇特性, 例如 Airy 光束的自加速与自修复特性等。通过追迹光线在均匀变化介质中的路径就能获得光波场沿光线的演化。该方法远比解波动方程简单直接, 适合计算机建模与数值计算, 为人们设计波导提供了一种便捷的方式。除了表征光束的传输, 还能用于计算光束与物质之间的相互作用。

2) 光线构建光束依赖光线方向的确定。若在构建光束的光线模型时未使用傍轴近似条件处理光线方向, 则得到的光束结果均为非傍轴光束^[83]。因此光线模型是一种非常简单地研究非傍轴光束的方法。

3) 便于通过光线追迹计算复杂结构对光波场的散射。这是使用波动光学方法难以实现的, 著名案例有 Yang 等^[4]计算的大气中六棱柱冰晶对光的散射。

4) 可研究光线折射反射后的光束的变换。例如非衍射型光学器件对光束的折射和反射等, 此外还可以利用反射后的光线来设计目标光学仪器以产生其他人们希望获得的光场。例如使用反射镜生成圆形或椭圆形加速光场, 这种加速光场的可弯曲程度远比使用空间光调制器的要大, 能实现大角度加速光场。使用三维曲面透镜还能生成螺旋上升的加速光场。

5) 利用光线与光波场相位的的关系, 还能设计光波场的相位分布模板, 用于产生人们希望得到的光波场。此方法已经被广泛应用于任意路径加速光场的设计中, 且可进一步推广到轴对称自聚焦光场的设计上。结合 SAFE 还能设计应当加载的振幅分布, 使得生成的光波场更符合设计。利用光线设计新型光束比起求解波动方程更加直观简便。

6) 光线庞加莱球法亦为人们提供了一种设计

结构光束的方案,所设计的光场往往具有复杂的光强与相位结构。该方法还能准确地确定光束的内外焦散线形状。这些具有复杂结构的光束在未来的光学通信、光学操作和显微成像中有着广泛的潜在应用价值。

近代的几何光学可以说是随着波动光学发展起来的。近几年一些纳米微结构的诞生,使得近场光学成为了人们的研究重点。人们使用隐失波可以进行微尺度的微粒操纵,还可以进行突破衍射极限的显微成像。近场光学为人们探索微观世界提供了研究手段。几何光学虽然被认为是波长趋于0的极端近似情况,但是几何光学的适用极限并没有人探讨过。到底在什么尺度下几何光学会失效?如果失效应当用什么方式去修正?这些问题都有待人们去研究。虽然复光线能表示隐失波的传输,但无法在实数空间描述隐失波。目前近场光波场都是使用电磁场方法进行表征,需要大量的、繁琐的数学计算。使用光线的方式研究光波场在微结构下的传输,将会成为几何光学的理论突破点,这为近场光学提供一种简单直观的研究手段。

综上所述,使用光线表征光束的传输为人们研究光束提供了另一个研究思路,是一个极具应用前景的方法。光线的空间传播从一个直观的角度揭示了光波传输的内在过程,在人们设计光束结构和分析光束传输中有着独一无二的优势。可以预见,利用光线,未来人们可以设计出其他具有新奇特性与潜在应用价值的光束,设计出新型光学谐振腔和透镜等光学仪器,将会极大地推动光学理论与应用的发展。

参 考 文 献

- [1] Born M, Wolf E. Principles of optics[M]. UK: Cambridge University Press, 1999.
- [2] Bykov V P, Vainshtein L A. Geometric optics of open resonators[J]. Soviet Physics JETP, 1965, 20(2): 338-344.
- [3] Jiang K L, Han X G, Ren K F. Scattering of a Gaussian beam by an elliptical cylinder using the vectorial complex ray model[J]. Journal of the Optical Society of America A, 2013, 30(8): 1548-1556.
- [4] Yang P, Liou K N. Light scattering by hexagonal ice crystals: solutions by a ray-by-ray integration algorithm[J]. Journal of the Optical Society of America A, 1997, 14(9): 2278-2289.
- [5] Li X Z. Geometrical-optics approximation of light scattering by particles[D]. Xi'an: Xidian University, 2009.
李祥震. 粒子光散射的几何光学近似方法研究[D]. 西安: 西安电子科技大学, 2009.
- [6] Arnaud J. Representation of Gaussian beams by complex rays[J]. Applied Optics, 1985, 24(4): 538-543.
- [7] Zhang L W. Simulation and analysis of nonlinear effect in high power laser system based on ray-tracing[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2014.
张鲁薇. 基于光线追迹的强激光非线性效应的仿真与分析[D]. 杭州: 浙江大学, 2014.
- [8] Zhu J. Study of characterizing optical free-form surface and ray-tracing model[D]. Nanjing: Nanjing University of Science and Technology, 2012.
朱进. 光学自由曲面面形描述方法和光线追迹模型的研究[D]. 南京: 南京理工大学, 2012.
- [9] Alonso M A, Bandres M A. Generation of nonparaxial accelerating fields through mirrors I: two dimensions[J]. Optics Express, 2014, 22(6): 7124-7132.
- [10] Alonso M A, Bandres M A. Generation of nonparaxial accelerating fields through mirrors II: three dimensions[J]. Optics Express, 2014, 22(12): 14738-14749.
- [11] McNamara D A, Pistorius C W I, Malherbe J A G. Introduction to the uniform geometrical theory of diffraction[M]. London: Artech House, 1990.
- [12] Vainshtein L A. Open resonators with spherical mirrors[J]. Soviet Physics JETP, 1964, 18(2): 471-479.
- [13] Allen L, Beijersbergen M W, Spreeuw R J C, *et al.* Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes[J]. Physical Review A, 1992, 45(11): 8185-8189.
- [14] Durnin J, Miceli J J, Eberly J H. Diffraction-free beams[J]. Physical Review Letters, 1987, 58(15): 1499-1501.
- [15] Gutiérrez-Vega J C, Bandres M A. Helmholtz-Gauss waves[J]. Journal of the Optical Society of America A, 2005, 22(2): 289-298.
- [16] Berry M V, Balazs N L. Nonspreading wave packets[J]. American Journal of Physics, 1979, 47(3): 264-267.
- [17] Siviloglou G A, Broky J, Dogariu A, *et al.* Observation of accelerating airy beams[J]. Physical Review Letters, 2007, 99(21): 213901.

- [18] Zhang P, Hu Y, Li T C, *et al.* Nonparaxial Mathieu and Weber accelerating beams[J]. Physical Review Letters, 2012, 109(19): 193901.
- [19] Bandres M A, Alonso M A, Kaminer I, *et al.* Three-dimensional accelerating electromagnetic waves[J]. Optics Express, 2013, 21(12): 13917-13929.
- [20] Chen Z G, Xu J J, Hu Y, *et al.* Control and novel applications of self-accelerating beams [J]. Acta Optica Sinica, 2016, 36(10): 1026009.
陈志刚, 许京军, 胡毅, 等. 自加速光的调控及其新奇应用[J]. 光学学报, 2016, 36(10): 1026009.
- [21] Efremidis N K, Christodoulides D N. Abruptly autofocusing waves [J]. Optics Letters, 2010, 35(23): 4045-4047.
- [22] Froehly L, Courvoisier F, Mathis A, *et al.* Arbitrary accelerating micron-scale caustic beams in two and three dimensions [J]. Optics Express, 2011, 19(17): 16455-16465.
- [23] Chremmos I D, Chen Z G, Christodoulides D N, *et al.* Abruptly autofocusing and autodefocusing optical beams with arbitrary caustics [J]. Physical Review A, 2012, 85(2): 023828.
- [24] Davis J A, Cottrell D M, Sand D. Abruptly autofocusing vortex beams [J]. Optics Express, 2012, 20(12): 13302-13310.
- [25] Penciu R S, Makris K G, Efremidis N K. Nonparaxial abruptly autofocusing beams [J]. Optics Letters, 2016, 41(5): 1042-1045.
- [26] Willner A E, Ren Y X, Xie G D, *et al.* Recent advances in high-capacity free-space optical and radio-frequency communications using orbital angular momentum multiplexing [J]. Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2017, 375(2087): 20150439.
- [27] Wang J, Liu J, Zhao Y F. Research progress of structured light coding/decoding communications [J]. Acta Optica Sinica, 2019, 39(1): 0126013.
王健, 刘俊, 赵一凡. 结构光场编译码通信研究进展[J]. 光学学报, 2019, 39(1): 0126013.
- [28] Simpson N B, Dholakia K, Allen L, *et al.* Mechanical equivalence of spin and orbital angular momentum of light: an optical spanner[J]. Optics Letters, 1997, 22(1): 52-54.
- [29] Fahrbach F O, Simon P, Rohrbach A. Microscopy with self-reconstructing beams [J]. Nature Photonics, 2010, 4(11): 780-785.
- [30] Garcés-Chávez V, McGloin D, Melville H, *et al.* Simultaneous micromanipulation in multiple planes using a self-reconstructing light beam [J]. Nature, 2002, 419(6903): 145-147.
- [31] Liang Y S, Yao B L, Lei M, *et al.* Optical micromanipulation based on spatial modulation of optical fields [J]. Acta Optica Sinica, 2016, 36(10): 1026003.
梁言生, 姚保利, 雷铭, 等. 基于空间光场调控技术的光学微操纵 [J]. 光学学报, 2016, 36(10): 1026003.
- [32] Olarte O E, Andilla J, Gualda E J, *et al.* Light-sheet microscopy: a tutorial [J]. Advances in Optics and Photonics, 2018, 10(1): 111-179.
- [33] Li R F, Shi K B. High spatiotemporal imaging based on optical field engineering [J]. Acta Optica Sinica, 2019, 39(1): 0126012.
李润丰, 施可彬. 基于光场调控的高时空分辨率光学成像 [J]. 光学学报, 2019, 39(1): 0126012.
- [34] Baumgartl J, Mazilu M, Dholakia K. Optically mediated particle clearing using Airy wavepackets [J]. Nature Photonics, 2008, 2(11): 675-678.
- [35] Baumgartl J, Hannappel G M, Stevenson D J, *et al.* Optical redistribution of microparticles and cells between microwells [J]. Lab on a Chip, 2009, 9(10): 1334-1336.
- [36] Moffitt J R, Chemla Y R, Smith S B, *et al.* Recent advances in optical tweezers [J]. Annual Review of Biochemistry, 2008, 77(1): 205-228.
- [37] Woerdemann M, Alpmann C, Esseling M, *et al.* Advanced optical trapping by complex beam shaping [J]. Laser & Photonics Reviews, 2013, 7(6): 839-854.
- [38] Papazoglou D G, Efremidis N K, Christodoulides D N, *et al.* Observation of abruptly autofocusing waves [J]. Optics Letters, 2011, 36(10): 1842-1844.
- [39] Zhang P, Prakash J, Zhang Z, *et al.* Trapping and guiding microparticles with morphing autofocusing Airy beams [J]. Optics Letters, 2011, 36(15): 2883-2885.
- [40] Chen J, Zhan Q W. Tailoring laser focal fields with vectorial optical fields [J]. Acta Optica Sinica, 2019, 39(1): 0126002.
陈建, 詹其文. 矢量光场与激光焦场定制 [J]. 光学学报, 2019, 39(1): 0126002.
- [41] Pan Y, Ding J P, Wang H T. Manipulation on novel vector optical fields: introduction, advances

- and applications [J]. *Acta Optica Sinica*, 2019, 39 (1): 0126003.
- 潘岳, 丁剑平, 王慧田. 新型矢量光场调控: 简介、进展与应用 [J]. *光学学报*, 2019, 39(1): 0126003.
- [42] Liu S, Li P, Zhang Y, *et al.* Transmission and control of polarization modulation light filed in free space [J]. *Acta Optica Sinica*, 2016, 36 (10): 1026001.
- 刘圣, 李鹏, 章毅, 等. 自由空间中偏振调制光场的传输及控制 [J]. *光学学报*, 2016, 36 (10): 1026001.
- [43] Liu H L, Hu Z H, Xia J, *et al.* Generation and applications of non-diffraction beam [J]. *Acta Physica Sinica*, 2018, 67(21): 214204.
- 刘会龙, 胡总华, 夏菁, 等. 无衍射光束的产生及其应用 [J]. *物理学报*, 2018, 67(21): 214204.
- [44] Yu X H, Yao B L, Lei M, *et al.* Generation and three-dimensional characterization of complex nondiffracting optical beams [J]. *Acta Physica Sinica*, 2015, 64(24): 244203.
- 于湘华, 姚保利, 雷铭, 等. 无衍射特殊光束的产生与三维表征 [J]. *物理学报*, 2015, 64 (24): 244203.
- [45] Sidick E, Collins S D, Knoesen A. Trapping forces in a multiple-beam fiber-optic trap [J]. *Applied Optics*, 1997, 36(25): 6423-6433.
- [46] Kline M. An asymptotic solution of Maxwell's equations [J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1951, 4(2/3): 225-262.
- [47] Luneburg R K. *Mathematical theory of optics* [M]. USA: University of California Press, 1966.
- [48] Keller J B, Streifer W. Complex rays with an application to Gaussian beams [J]. *Journal of the Optical Society of America*, 1971, 61(1): 40-43.
- [49] Deschamps G A. Gaussian beam as a bundle of complex rays [J]. *Electronics Letters*, 1971, 7(23): 684-685.
- [50] Kravtsov Y A, Forbes G W, Asatryan A A. I theory and applications of complex rays [M] // Wolf E. *Progress in optics*. New York: Elsevier, 1999, 39: 1-62.
- [51] Herloski R, Marshall S, Antos R. Gaussian beam ray-equivalent modeling and optical design [J]. *Applied Optics*, 1983, 22(8): 1168-1174.
- [52] Landesman B T, Barrett H H. Gaussian amplitude functions that are exact solutions to the scalar Helmholtz equation [J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 1988, 5(10): 1610-1619.
- [53] Landesman B T. Geometrical representation of the fundamental mode of a Gaussian beam in oblate spheroidal coordinates [J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 1989, 6(1): 5-17.
- [54] Tycho A, Jørgensen T M, Yura H T, *et al.* Derivation of a Monte Carlo method for modeling heterodyne detection in optical coherence tomography systems [J]. *Applied Optics*, 2002, 41 (31): 6676-6691.
- [55] Zhang S H, Zhou J H, Gong L. Skew line ray model of nonparaxial Gaussian beam [J]. *Optics Express*, 2018, 26(3): 3381-3393.
- [56] Kay I, Keller J B. Asymptotic evaluation of the field at a caustic [J]. *Journal of Applied Physics*, 1954, 25(7): 876-883.
- [57] Ludwig D. Wave propagation near a smooth caustic [J]. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1965, 71(5): 776-780.
- [58] Berry M V, Upstill C. IV catastrophe optics: morphologies of caustics and their diffraction patterns [M] // Wolf E. *Progress in optics*. New York: Elsevier, 1980, 18: 257-346.
- [59] Forbes G W, Alonso M A. Using rays better. I. Theory for smoothly varying media [J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2001, 18 (5): 1132-1145.
- [60] Ouellette P É. Geometric optics of a refringent sphere illuminated by a point source: caustics, wavefronts, and zero phase-fronts for every rainbow "k" order [J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2018, 35(1): 1-11.
- [61] Berry M V. Uniform approximation a new concept in wave theory [J]. *Science Progress*, 1969, 57 (225): 43-64.
- [62] Ludwig D. Wave propagation near a smooth caustic [M] // Brown J. *Electromagnetic wave theory*. New York: Elsevier, 1967: 915-917.
- [63] Anguiano-Morales M, Martínez A, Iturbe-Castillo M D, *et al.* Self-healing property of a caustic optical beam [J]. *Applied Optics*, 2007, 46 (34): 8284-8290.
- [64] Kaganovsky Y, Heyman E. Wave analysis of Airy beams [J]. *Optics Express*, 2010, 18 (8): 8440-8452.
- [65] Popov M M. A new method of computation of wave fields using Gaussian beams [J]. *Wave Motion*, 1982, 4(1): 85-97.
- [66] White B S, Norris A, Bayliss A, *et al.* Some

- remarks on the Gaussian beam summation method [J]. *Geophysical Journal International*, 1987, 89 (2): 579-636.
- [67] Norris A N. Complex point-source representation of real point sources and the Gaussian beam summation method [J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 1986, 3(12): 2005-2010.
- [68] Goodman J W. *Introduction to Fourier optics*[M]. New York: McGraw-Hill, 1968.
- [69] Berry M V. Semi-classical mechanics in phase space: a study of Wigner's function [J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1977, 287(1343): 237-271.
- [70] Alonso M A. Wigner functions in optics: describing beams as ray bundles and pulses as particle ensembles[J]. *Advances in Optics and Photonics*, 2011, 3(4): 272-365.
- [71] Forbes G W, Alonso M A. What on earth is a ray and how can we use them best?[J]. *Proceedings of SPIE*, 1998, 3482: 22-31.
- [72] Alonso M A, Forbes G W. Phase-space distributions for high-frequency fields[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2000, 17(12): 2288-2300.
- [73] de Bruijn N G. Uncertainty principles in Fourier analysis[J]. *Inequalities*, 1967, 2: 57-71.
- [74] Alonso M A, Forbes G W. Stable aggregates of flexible elements give a stronger link between rays and waves[J]. *Optics Express*, 2002, 10(16): 728-739.
- [75] Alonso M A, Forbes G W. Using rays better. II. Ray families to match prescribed wave fields [J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2001, 18(5): 1146-1159.
- [76] Alonso M A, Forbes G W. Using rays better. III. Error estimates and illustrative applications in smooth media[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2001, 18(6): 1357-1370.
- [77] Forbes G W. Using rays better. IV. Theory for refraction and reflection[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2001, 18(10): 2557-2564.
- [78] Alonso M A, Dennis M R. Ray-optical Poincaré sphere for structured Gaussian beams[J]. *Optica*, 2017, 4(4): 476-486.
- [79] Bareza N D, Hermosa N. Subluminal group velocity and dispersion of Laguerre Gauss beams in free space[J]. *Scientific Reports*, 2016, 6: 26842.
- [80] Bouchard F, Harris J, Mand H, *et al.* Observation of subluminal twisted light in vacuum[J]. *Optica*, 2016, 3(4): 351-354.
- [81] Marcuse D. *Light transmission optics*[M]. 2nd ed. New York: Van Nostrand Reinhold Company, 1972.
- [82] Greenfield E, Segev M, Walasik W, *et al.* Accelerating light beams along arbitrary convex trajectories[J]. *Physical Review Letters*, 2011, 106 (21): 213902.
- [83] Penciu R S, Paltoglou V, Efremidis N K. Closed-form expressions for nonparaxial accelerating beams with pre-engineered trajectories[J]. *Optics Letters*, 2015, 40(7): 1444-1447.
- [84] Epstein I, Arie A. Arbitrary bending plasmonic light waves[J]. *Physical Review Letters*, 2014, 112 (2): 023903.
- [85] Zhao Z Y, Xie C, Ni D D, *et al.* Scaling the abruptly autofocusing beams in the direct-space[J]. *Optics Express*, 2017, 25(24): 30598-30605.
- [86] Greynolds A W. Propagation of generally astigmatic Gaussian beams along skew ray paths [J]. *Proceedings of SPIE*, 1986, 560: 33-51.
- [87] Shi B Y, Meng Z, Wang L Z, *et al.* Monte Carlo modeling of human tooth optical coherence tomography imaging[J]. *Journal of Optics*, 2013, 15(7): 075304.
- [88] Kaganovsky Y, Heyman E. Nonparaxial wave analysis of three-dimensional Airy beams [J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2012, 29(5): 671-688.
- [89] Zhang Z Y, Levoy M. Wigner distributions and how they relate to the light field[C]//2009 IEEE International Conference on Computational Photography (ICCP), April 16-17, 2009, San Francisco, CA, USA. New York: IEEE, 2009: 11499058.
- [90] Potoček V, Barnett S M. Generalized ray optics and orbital angular momentum carrying beams[J]. *New Journal of Physics*, 2015, 17(10): 103034.
- [91] Zhu Q Z, Wu F T, He X. Generation of hollow beams through focusing J_0 -correlated schell-model beams with axicon[J]. *Acta Optica Sinica*, 2016, 36 (10): 1026022.
朱清智, 吴逢铁, 何西. 轴棱锥聚焦贝塞尔-谢尔模型光束产生空心光束[J]. *光学学报*, 2016, 36 (10): 1026022.
- [92] Li D, Wu F T, Xie X X. A novel method of

- generating quasi-non-diffracting Mathieu beam based on axicon[J]. *Acta Physica Sinica*, 2014, 63(15): 152401.
- 李冬, 吴逢铁, 谢晓霞. 基于轴棱锥产生近似无衍射 Mathieu 光束的新方法[J]. *物理学报*, 2014, 63(15): 152401.
- [93] Alvarez-Elizondo M B, Rodríguez-Masegosa R, Gutiérrez-Vega J C. Generation of Mathieu-Gauss modes with an axicon-based laser resonator [J]. *Optics Express*, 2008, 16(23): 18770-18775.
- [94] Brzobohatý O, Cizmar T, Zemánek P. High quality quasi-Bessel beam generated by round-tip axicon[J]. *Optics Express*, 2008, 16(17): 12688-12700.
- [95] Vaveliuk P, Martínez-Matos Ó, Ren Y X, *et al.* Dual behavior of caustic optical beams facing obstacles[J]. *Physical Review A*, 2017, 95(6): 063838.
- [96] Turnbull G A, Robertson D A, Smith G M, *et al.* The generation of free-space Laguerre-Gaussian modes at millimetre-wave frequencies by use of a spiral phaseplate [J]. *Optics Communications*, 1996, 127(4/5/6): 183-188.
- [97] Sueda K, Miyaji G, Miyanaga N, *et al.* Laguerre-Gaussian beam generated with a multilevel spiral phase plate for high intensity laser pulses[J]. *Optics Express*, 2004, 12(15): 3548-3553.
- [98] Kotlyar V V, Almazov A A, Khonina S N, *et al.* Generation of phase singularity through diffracting a plane or Gaussian beam by a spiral phase plate[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2005, 22(5): 849-861.
- [99] Eggleston M, Godat T, Munro E, *et al.* Ray transfer matrix for a spiral phase plate[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2013, 30(12): 2526-2530.
- [100] Zhang S H, Shao M, Zhou J H. Structured beam designed by ray-optical Poincaré sphere method and its propagation properties[J]. *Acta Physica Sinica*, 2018, 67(22): 224204.
- 张书赫, 邵梦, 周金华. 光线庞加莱球法构建的结构光场及其传输特性研究[J]. *物理学报*, 2018, 67(22): 224204.
- [101] Alonso M A. Ray-based diffraction calculations using stable aggregates of flexible elements [J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2013, 30(6): 1223-1235.
- [102] Keller J B. Geometrical theory of diffraction [J]. *Journal of the Optical Society of America*, 1962, 52(2): 116-130.
- [103] Kumar B S, Ranganath S. Geometrical theory of diffraction[J]. *Pramana*, 1991, 37(6): 457-488.
- [104] Felsen L B. Geometrical theory of diffraction, evanescent waves, complex rays and Gaussian beams[J]. *Geophysical Journal International*, 1984, 79(1): 77-88.
- [105] Senior T B A, Uslenghi P L E. Experimental detection of the edge-diffraction cone [J]. *Proceedings of the IEEE*, 1972, 60(11): 1448.
- [106] Sun J G. High-frequency asymptotic scattering theories and their applications in numerical modeling and imaging of geophysical fields: an overview of the research history and the state-of-the-art, and some new developments [J]. *Journal of Jilin University(Earth Science Edition)*, 2016, 46(4): 1231-1259.
- 孙建国. 高频渐近散射理论及其在地球物理场数值模拟与反演成像中的应用: 研究历史与研究现状概述以及若干新进展[J]. *吉林大学学报(地球科学版)*, 2016, 46(4): 1231-1259.