

基于天牛须搜索的全变分最小化算法在计算机断层成像内重建中的应用

孔慧华^{1,2*}, 孙英博^{1,2**}, 张雁霞^{1,2}

¹中北大学理学院, 山西 太原 030051;

²中北大学信息探测与处理山西省重点实验室, 山西 太原 030051

摘要 若感兴趣区域具有分片光滑或多项式特征, 则可通过全变分(TV)最小化进行精确内重建。目标函数 TV 最小化过程可通过梯度下降法以其负梯度方向为搜索方向, 经过多次迭代优化实现。为提高 TV 最小化重建的效率, 提出一种天牛须搜索(BAS)和梯度下降相结合的寻求最优解方向的方法。在 TV 最小化过程中根据生成的随机数和阈值选择梯度下降方向或由个体“左右须”检测到的最优解方向进行迭代。仿真实验和实际实验结果表明, 本文算法收敛速度较快, 重建效果更好。

关键词 成像系统; 计算机断层成像; 天牛须搜索算法; 梯度下降法; 内重建; 全变分最小化

中图分类号 TP391

文献标识码 A

doi: 10.3788/LOP56.211101

Application of Total Variation Minimization Algorithm Based on Beetle Antennae Search on Computed Tomography Interior Reconstruction

Kong Huihua^{1,2*}, Sun Yingbo^{1,2**}, Zhang Yanxia^{1,2}

¹School of Science, North University of China, Taiyuan, Shanxi 030051, China;

²Shanxi Key Laboratory of Information Detection and Processing, North University of China, Taiyuan, Shanxi 030051, China

Abstract Region of interest is sliced smooth or polynomial, then accurate internal reconstruction can be performed by total variation (TV) minimization. The solution of TV minimization usually adopts the gradient descent method, taking the negative gradient of the objective function as the search direction, and then optimizes iteratively the objective function. In order to improve the efficiency of TV minimizing, this paper proposes a method to find the optimal solution direction by combining beetle antennae search (BAS) and gradient descent. The method selects the gradient descent direction or the optimal solution direction which is based on the individual “left and right whiskers” to iterate, according to the generated random number and threshold during the TV minimization process. The simulation experiment and the actual experiment show that the proposed algorithm has fast convergence speed and good reconstruction effect.

Key words imaging systems; computed tomography; beetle antennae search algorithm; gradient descent method; interior reconstruction; total variation minimization

OCIS codes 110.7440; 340.7440; 110.2960

1 引言

计算机断层成像(CT)技术可以在不破坏物体

外部结构的情况下,应用 X 射线进行断层扫描,获得物体内部结构信息,它是 X 射线发现以来放射医学领域的重大突破,是无损检测领域的重要组成部分

收稿日期: 2019-03-25; 修回日期: 2019-03-26; 录用日期: 2019-04-30

基金项目: 国家自然科学基金(61601412,61571404,61471325)、山西省自然科学基金(2015021099)、山西省青年科技研究基金(201701D221121)

* E-mail: huihuak@163.com; ** E-mail: 1379058385@qq.com

分。CT 技术自 20 世纪 80 年代起就受到众多领域专家学者的关注,目前已广泛应用于医学、工业、地球物理等领域。在实际应用中,CT 技术受辐射剂量、被检测物体的尺寸等因素的限制,有时只能获得截断的投影数据,即穿过感兴趣区域(ROI)的射线数据。CT 内重建问题为通过对截断的投影数据进行重建来获取 ROI 信息,是 CT 研究的一个热点方向。由于内重建问题没有唯一解,因此在无约束设置下,基于传统 CT 仅由截断投影数据并不能精确解决内重建问题。

压缩感知的核心思想是通过适当的稀疏变换使大部分图像或者信号呈稀疏状态,然后采用优化方法处理稀疏样本,实现较高精度的图像或信号恢复。受压缩感知理论的启发,Yu 等^[1-2]证明如果 ROI 分片光滑或具有多项式特性,则可通过全变分(TV)最小化算法进行精确内重建,从而兴起了基于压缩感知理论的 CT 内重建问题,这些理论结果同样被证明可应用于临床投影数据重建中^[3]。TV 最小化问题可采用梯度下降法或其他最优化方法解决^[4-6],2010 年 Yu 等^[7]通过构建离散梯度变换(DGT)的伪逆变换,解决了软阈值滤波法不能直接应用于 TV 最小化的问题,为 TV 最小化提供新的思路;2014 年张莹等^[8]根据稀疏优化的交替方向方法推导出基于各向异性的 TV 最小化方法并应用于 CT 图像重建中,提高了重建图像质量。

天牛须搜索(BAS)算法是一种随机智能优化算法,通过模拟自然过程解决优化问题,即可得到全局最优解,适应于解决不完备数据下的优化问题。针对梯度下降法重建效率不高的缺点,本文将 BAS 算法应用于稀疏角度下 CT 内重建问题中,在迭代过程中根据阈值和随机数,选择梯度下降方向或由个体“左右须”检测到的最优解方向进行迭代,实现 TV 最小化。

2 基于 TV 最小化的图像重建

基于 TV 最小化的 CT 图像重建问题可以表示为一个约束优化问题,即

$$\begin{aligned} \min \quad & \| \mathbf{f} \|_{\text{TV}} \\ \text{s.t.} \quad & \| \mathbf{A}\mathbf{f} - \mathbf{P} \| \leq \epsilon, \end{aligned} \quad (1)$$

式中: \mathbf{f} 为待重建的图像向量, $\mathbf{f} = (f_j)_{j \times 1} \in \mathbb{R}^J$; \mathbf{P} 为测量投影数据向量, $\mathbf{P} = (P_i)_{I \times 1} \in \mathbb{R}^I$; \mathbf{A} 为投影矩阵, $\mathbf{A} = (a_{ij})_{I \times J} \in \mathbb{R}^{I \times J}$;系统是一个基于面积积分的扇束精确模型, a_{ij} 为第 j 个像素与第 i 条扇束路径相交的面积,代表第 j 个像素对第 i 条扇束路径所做的贡献; I 为穿过物体的射线条数, J 为待重

建的图像向量像素个数; P_i 为被检测物质的线性衰减系数与从射线源到探测器的扇束覆盖的相应像素面积加权乘积的积分,即第 i 条射线对应的投影数据; ϵ 为噪声水平估计值。

为方便起见, $(f_{m,n})_{M \times N}$ 和 $(f_j)_{J \times 1}$ 都被用来表示一幅图像。一个二维图像 $\mathbf{f} = (f_{m,n})_{M \times N}$ 可以重排成一个一维列向量 $\mathbf{f} = (f_j)_{J \times 1} \in \mathbb{R}^J$,其中

$$\begin{aligned} f_j &= f_{m,n}, j = (m-1) \times N + n, \\ 1 &\leq m \leq M, 1 \leq n \leq N. \end{aligned} \quad (2)$$

$\| \mathbf{f} \|_{\text{TV}}$ 是图像 $\mathbf{f} = (f_{m,n})_{M \times N}$ 的 TV,表示为

$$\begin{aligned} \| \mathbf{f} \|_{\text{TV}} &= | \nabla \mathbf{f} | = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \nabla f_{m,n}, \quad (3) \\ \nabla f_{m,n} &= \sqrt{(\nabla_x f)_{m,n}^2 + (\nabla_y f)_{m,n}^2} = \\ &= \sqrt{(f_{m,n} - f_{m+1,n})^2 + (f_{m,n} - f_{m,n+1})^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

式中: f_j 为图像第 j 个像素单元; $\nabla \mathbf{f}$ 为重建图像的梯度, $\nabla f_{m,n}$ 为图像梯度在第 m 行 n 列的取值, $(\nabla_x f)_{m,n}$ 为重建图像沿 x 方向的梯度在第 m 行 n 列位置的取值, $(\nabla_y f)_{m,n}$ 为重建图像沿 y 方向的梯度在第 m 行 n 列位置的取值, ∇_x 为沿 x 方向的图像梯度算子, ∇_y 为沿 y 方向的图像梯度算子; M 为重建图像的总行数; N 为重建图像的总列数。

(1)式可转化为一个近似的带罚函数的无约束最小化问题,表达式为

$$\min \| \mathbf{f} \|_{\text{TV}} + \frac{\mu}{2} \| \mathbf{A}\mathbf{f} - \mathbf{P} \|^2, \quad (5)$$

式中: μ 是平衡这两项的参数。对(5)式,通常使用交替最小化系统求解,该方法主要包含 2 步。

第 1 步是求解投影数据保真项,可以用经典的迭代算法如 SART、EM 等,在算法执行过程中还可以使用有序子集(OS)算法进行加速,OS-SART^[9]的迭代公式为

$$f_j^{k+1} = f_j^k + \lambda_k \cdot \frac{\sum_{i \in S_t} a_{ij}}{\sum_{i' \in S_t} a_{i'j}} \frac{P_i - \sum_{j=1}^J a_{ij} f_j^k}{\sum_{j=1}^J a_{ij}}, \quad (6)$$

式中: f_j^{k+1}, f_j^k 分别为第 j 个像素在第 k 次和第 $k+1$ 次的迭代值, k 为迭代次数; S_t 为第 t 个子集; T 为总的子集个数,将所有的射线指数 $1, 2, \dots, I$ 划分为 T 个子集,即 $\bigcup_{1 \leq t \leq T} S_t = \{1, 2, \dots, I\}, t = k \bmod T + 1$,其中 \bmod 为求余函数; λ_k 为松弛因子。迭代的终止条件为:对任意给定的极小值 ϵ_2 ,有 $|f_j^{k+1} - f_j^k| < \epsilon_2, 1 \leq j \leq J$ 。

第 2 步是进行 TV 最小化,可以通过梯度下降

法^[6]、软阈值法^[7]等实现。

3 基于BAS的TV最小化算法

BAS算法,是一种生物启发式智能优化算法^[10]。其原理为将食物的气味视为一个函数,这个

函数在三维空间中每个点的值都不同,天牛可以根据两只触角接收到的食物气味的强弱来觅食。如果左边触角感受到的气味强度比右边大,下一步天牛就往左飞,否则就往右飞,最终找到全局气味值最大的点,如图1所示。

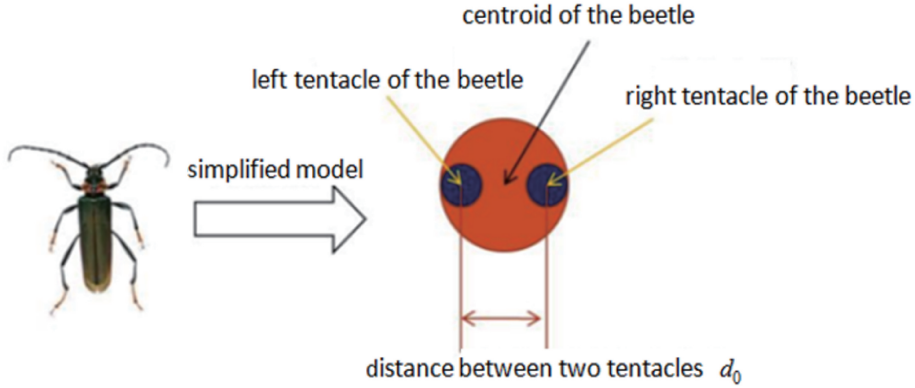


图1 BAS算法原理图

Fig. 1 Schematic of BAS algorithm

在(5)式中,将经典算法,如OS-SART迭代得到的图像记为 f^k 并赋值给 \tilde{f}^0 ,最小化图像TV可采用梯度下降法,其每次的迭代方向即为目标函数的优化方向。为优化重建图像质量,增加目标函数在TV最小化过程中搜索方向的多样性,引入BAS的随机更新策略,在每次迭代中随机选择梯度下降方向或BAS最佳方向对图像进行更新,提高全局搜索能力。算法迭代更新的策略如下:

第1步:依据(5)式给出对应的目标函数,

$$F(\tilde{f}^h) = \|\tilde{f}^h\|_{TV} + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{A}\tilde{f}^h - \mathbf{P}\|_2^2, \quad (7)$$

式中, \tilde{f}^h 表示图像 \tilde{f} 在BAS算法中第 h 次的迭代值,即天牛在 h 次迭代时的质心坐标值。

第2步:用 \tilde{f}_l^0 表示初始状态时天牛左须的坐标, \tilde{f}_r^0 表示初始状态时天牛右须的坐标, \tilde{f}^0 表示初始状态时天牛的质心坐标, d_0 表示两须之间距离。

假设天牛头的朝向任意,则从天牛右须指向左须的向量朝向任意,由归一化随机向量 \mathbf{r} 表示为

$$\mathbf{r} = \frac{\text{rands}(J, 1)}{\|\text{rands}(J, 1)\|}, \quad (8)$$

式中, $\text{rands}(J, 1)$ 函数生成一个均匀分布在 $[-1, 1]$ 之间的 J 维随机向量。于是, $\tilde{f}_l^0 - \tilde{f}_r^0 = d_0 \times \mathbf{r}$ 。经过 h 次迭代后,天牛左、右两须的矢量方向 \tilde{f}_l^h 和 \tilde{f}_r^h 可表示为

$$\begin{cases} \tilde{f}_l^h = \tilde{f}^h + \frac{d_0 \times \mathbf{r}}{2} \\ \tilde{f}_r^h = \tilde{f}^h - \frac{d_0 \times \mathbf{r}}{2} \end{cases}, \quad (9)$$

式中, \tilde{f}_l^h 表示天牛左须经 h 次迭代后的坐标值, \tilde{f}_r^h 表示天牛右须经 h 次迭代后的坐标值。并计算其对应的函数值 $F_l = F(\tilde{f}_l^h)$ 、 $F_r = F(\tilde{f}_r^h)$ 。

第3步:在迭代过程中对图像进行随机迭代更新,

$$\tilde{f}^{h+1} = \tilde{f}^h + \Delta \tilde{f}^h [X_{\text{rand}}], \quad (10)$$

$$\Delta \tilde{f}^h [X_{\text{rand}}] = \begin{cases} -\alpha \nabla \tilde{f}^h \|\tilde{f}^h\|_{TV}, X_{\text{rand}} \geq V \\ -\beta \times \mathbf{r} \times \text{sign}(F_l - F_r), X_{\text{rand}} < V \end{cases}, \quad (11)$$

式中: α 为梯度下降算法的步长因子, β 为BAS算法中的步长因子, $\beta = c \times d_0$, c 为常数, $\text{sign}(\cdot)$ 为符号函数; $\nabla \tilde{f} \|\tilde{f}\|_{TV}$, $\Delta \tilde{f}^h$ 为当前的迭代方向, X_{rand} 为0~1之间的随机数, V 为阈值取0~1之间的常数。当产生的随机数大于等于 V 时,沿负梯度方向更新图像,否则沿BAS方向更新图像。若 F_l

$< F_r$,则天牛向着左须方向行进;若 $F_l > F_r$,则天牛向着右须方向行进。用(10)式对图像进行更新,既可以增加算法的全局搜索能力,又可以提高算法的效率。迭代更新终止条件为对任意给定的极小值 ϵ_1 ,有 $|\tilde{f}_j^{h+1} - \tilde{f}_j^h| < \epsilon_1, 1 \leq j \leq J$ 。

基于BAS的TV最小化算法的具体流程如

图 2 所示。

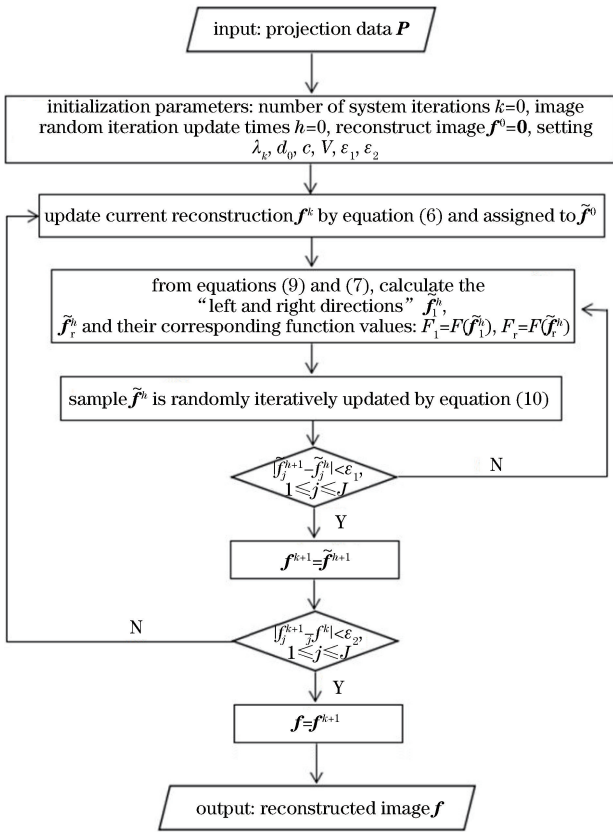


图 2 基于 BAS 的 TV 最小化算法流程图

Fig. 2 Flowchart of TV minimization algorithm based on BAS

4 重建实验结果及分析

为验证本文算法的可行性和有效性,分别对仿真投影和实际采集到的心脏投影进行内重建实验,同时考虑稀疏投影重建。本研究选用梯度下降法^[6]和软阈值法^[7]作为比较对象,在数据保真项部分采用 OS-SART 算法迭代来实现。为简单起见,这里将基于梯度下降的 TV 最小化方法表示为 OS-SART-GD,基于软阈值的 TV 最小化方法表示为 OS-SART-SOFT,本文提出的算法表示为 OS-SART-BAS。所有算法都用 Matlab 和 C++ 的混编模式执行。选用均方误差 (MSE)^[11] 和结构相似性 (SSIM)^[12] 对算法进行数量化评估。

4.1 Shepp-Logan 模型仿真实验

仿真模体选用 128×128 的 Shepp-Logan 模型,探测器包含 320 个探测器单元,在 $120 \text{ kV}_p (1.2 \times 10^5 \text{ V}_p, V_p \text{ 为 X 射线球管峰值电压})$ 的电压下用圆轨迹扇束扫描方式采集投影,扫描半径为 500 mm ,扇角大小为 0.49 rad 。3 组稀疏投影数据在 $[0, 2\pi)$

范围内分别均匀采集 30 个、60 个、90 个角度。实验将通过保留中心位置 160 个探测器单元所采集的投影作为截断投影,图 3 为圆形 ROI,为截断投影所覆盖部分。用 3 种算法分别对不同稀疏角度下的截断投影数据迭代 50 次,重建结果如图 4 所示。为进一步定量评估重建图像质量,图 5 和图 6 给出了 3 种算法在不同角度下迭代 50 次的 SSIM 和 MSE 变化曲线图。



图 3 Shepp-Logan 模型 ROI 示意图

Fig. 3 Schematic of Shepp-Logan ROI

由图 4 可以看出,OS-SART-GD 算法重建的图像中存在较多伪影;OS-SART-SOFT 算法重建效果优于 OS-SART-GD,但当采样角度为 30 个时存在明显的块伪迹;而 OS-SART-BAS 的块伪迹则明显地减少。

由图 5 和图 6 可以看出 OS-SART-SOFT 与 OS-SART-GD 的收敛速度在早期迭代中的差异并不大,随着迭代次数的增加,OS-SART-SOFT 的 SSIM 逐渐高于 OS-SART-GD, MSE 逐渐低于 OS-SART-GD,而 OS-SART-BAS 在迭代一开始就显示出优越性,与其他两种算法相比,OS-SART-BAS 在相同的迭代次数下具有较大的 SSIM 和较小的 MSE 值。综合图 4~6, OS-SART-BAS 在收敛速度和重建质量上优于 OS-SART-GD 和 OS-SART-SOFT。

4.2 实际采集到的心脏投影重建结果

实际投影数据通过使用 GE 公司生产的 DiscoveryCT750 HD 高扫描仪对心脏扫描获取,由 Wake Forest University 医学院提供。实验在 $[0, 2\pi)$ 范围内以圆轨迹螺旋扫描的方式均匀地采集了 2200 个角度下的投影,每个角度下 888 个探测器单元等角分布,扫描半径为 538.5 mm ,视场半径为 249.2 mm ,实验所得数据为一组 64 层的扇束投影,选取第 32 层的投影数据。实验将通过保留中心位置 300 个探测器单元的数据作为截断投影数据,其覆盖的圆形 ROI 如图 7 所示,半径大小为

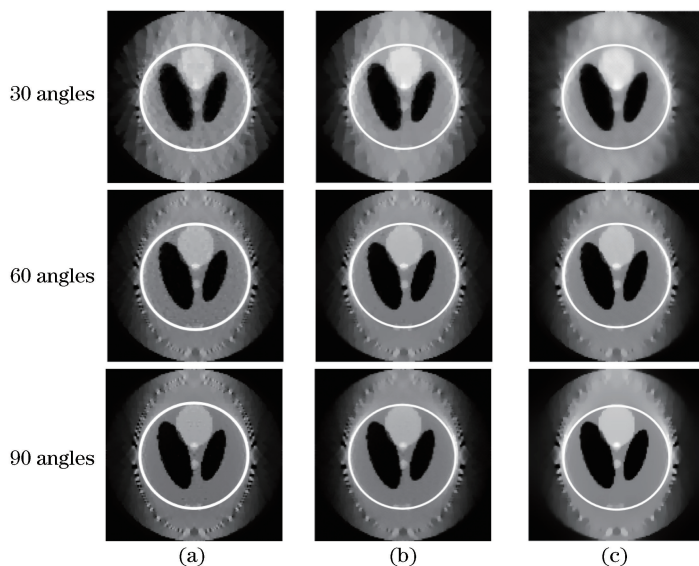


图 4 3 种算法在不同采样角度下迭代 50 次的内重建结果。(a) OS-SART-GD;(b) OS-SART-SOFT;(c) OS-SART-BAS
Fig. 4 Internal reconstructions of the three algorithms after 50 iterations under different sampling angles respectively.

(a) OS-SART-GD; (b) OS-SART-SOFT; (c) OS-SART-BAS

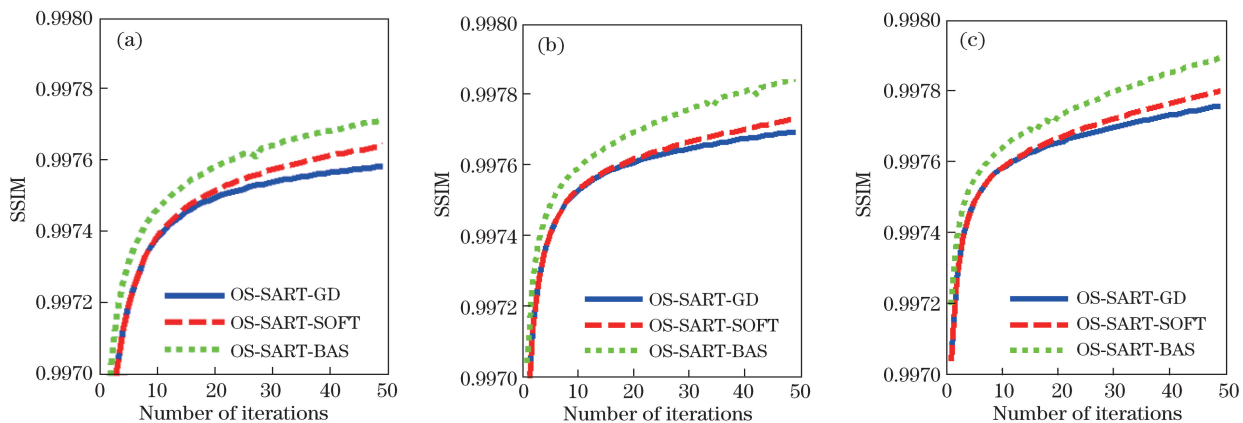


图 5 3 种算法在不同采样角度下的 SSIM 变化曲线图。(a) 30 个采样角度;(b) 60 个采样角度;(c) 90 个采样角度
Fig. 5 SSIM curves of three algorithms at different sampling angles. (a) 30 angles; (b) 60 angles; (c) 90 angles

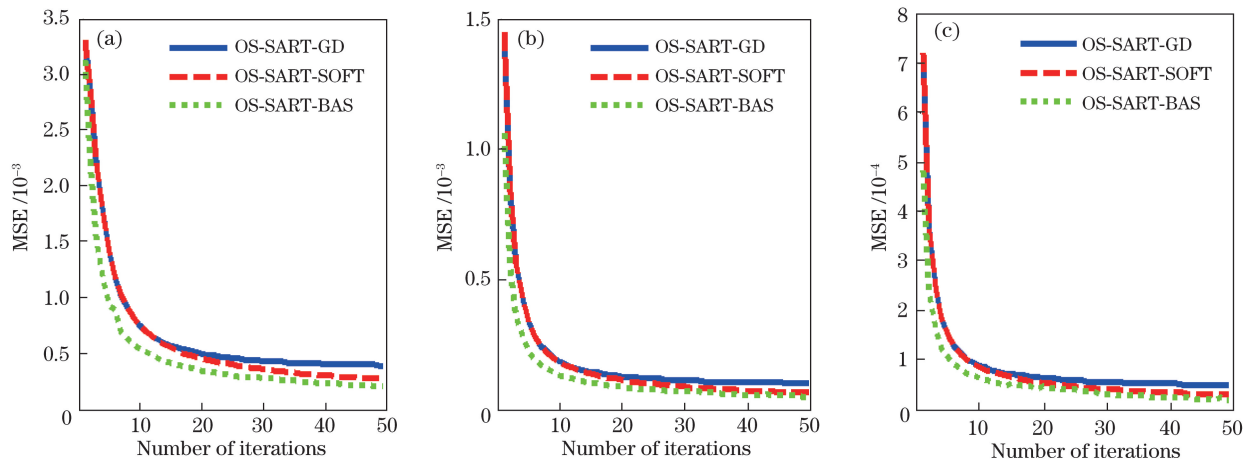


图 6 3 种算法在不同采样角度下的 MSE 变化曲线图。(a) 30 个采样角度;(b) 60 个采样角度;(c) 90 个采样角度
Fig. 6 MSE curves of three algorithms at different sampling angles. (a) 30 angles; (b) 60 angles; (c) 90 angles

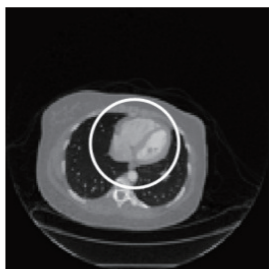


图 7 心脏参考图中 ROI 示意图

Fig. 7 ROI diagram in the heart reference map

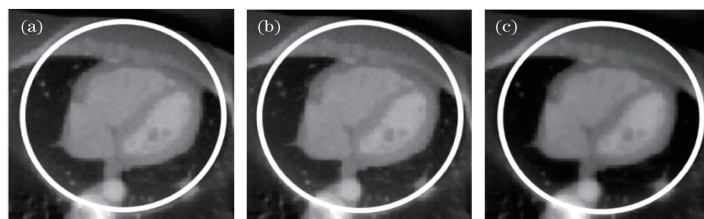


图 8 3 种算法对 220 个角度下的截断投影重建结果。(a) OS-SART-GD;(b) OS-SART-SOFT;(c) OS-SART-BAS

Fig. 8 Truncation projection reconstructions of three algorithms at 220 angles. (a) OS-SART-GD;
(b) OS-SART-SOFT; (c) OS-SART-BAS

5 结 论

主要研究稀疏角度下的内重建问题,在全变分最小化过程中将天牛须搜索智能优化算法与梯度下降法相结合,在迭代过程中根据阈值和生成的随机数随机选择梯度下降方向或基于个体“左右须”检测到的最优解方向进行迭代,实现全变分最小化,增加了搜索方向的多样性,提升了算法效率。实验结果表明,基于天牛须搜索的全变分最小化算法在收敛速度、保持重建图像边缘信息和去除伪影方面有明显优势。

参 考 文 献

- [1] Yu H Y, Wang G. Compressed sensing based interior tomography [J]. *Physics in Medicine and Biology*, 2009, 54(9): 2791-2805.
- [2] Yang J S, Yu H Y, Jiang M, *et al.* High-order total variation minimization for interior tomography [J]. *Inverse Problems*, 2010, 26(3): 035013.
- [3] Yu H Y, Wang G, Hsieh J, *et al.* Compressive sensing-based interior tomography: preliminary clinical application[J]. *Journal of Computer Assisted Tomography*, 2011, 35(6): 762-764.
- [4] Qi H L, Chen Z J, Zhou L H. CT image reconstruction from sparse projections using adaptive TpV regularization [J]. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, 2015, 2015: 354869.
- [5] Zhang X M, Xing L. Sequentially reweighted TV minimization for CT metal artifact reduction [J]. *Medical Physics*, 2013, 40(7): 071907.
- [6] Zhang H J, Kong H H, Sun Y G. Weighted NLTV reconstruction algorithm based on structural prior information for spectral CT[J]. *Acta Optica Sinica*, 2018, 38(8): 0811003.
张海娇, 孔慧华, 孙永刚. 基于结构先验的加权 NLTV 能谱 CT 重建算法 [J]. *光学学报*, 2018, 38(8): 0811003.
- [7] Yu H Y, Wang G. A soft-threshold filtering approach for reconstruction from a limited number of projections [J]. *Physics in Medicine and Biology*, 2010, 55(13): 3905-3916.
- [8] Zhang Y, Wang D. CT image reconstruction algorithm based on anisotropic Total Variation minimization[J]. *Computer Science and Application*, 2014, 4(10): 240-247.
张莹, 王丹. 一种基于各向异性总变分最小化的 CT 图像重建算法 [J]. *计算机科学与应用*, 2014, 4(10): 240-247.
- [9] Wang G, Jiang M. Ordered-subset simultaneous algebraic reconstruction techniques (OS-SART) [J]. *Journal of X-Ray Science and Technology*, 2004, 12(3): 169-177.
- [10] Jiang X Y, Li S. BAS: beetle antennae search algorithm for optimization problems [J/OL]. (2017-10-30) [2018-11-11]. <https://arxiv.org/abs/1710.10724>.
- [11] Wang Z, Bovik A C, Sheikh H R, *et al.* Image

- quality assessment: from error visibility to structural similarity [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2004, 13(4): 600-612.
- [12] Gao L L, Liu J J, Ren X, *et al.* Image quality evaluation of panoramic camera stereo pair based on structural similarity [J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2014, 51(7): 071004.
- 高露露, 刘建军, 任鑫, 等. 基于结构相似度的全景相机立体像对图像质量评价[J]. 激光与光电子学进展, 2014, 51(7): 071004.