

# 基于因子分析法的三维点云配准算法

唐志荣<sup>1\*</sup>, 蒋悦<sup>2</sup>, 苗长伟<sup>1</sup>, 赵成强<sup>1</sup>

<sup>1</sup>成都理工大学核技术与自动化工程学院, 四川 成都 610059;

<sup>2</sup>四川大学电气信息学院, 四川 成都 610065

**摘要** 针对数据排列无序、随机缺失及伴随白噪声等问题, 提出一种基于因子分析法的三维点云配准方法。将点云数学模型扩展为正交因子模型, 从而将点云的配准问题转换为对模型参数的求解问题; 采用高斯混合模型对点云进行拟合, 并通过最大期望算法(EMA)求解出正交因子模型的因子载荷矩阵; 利用因子载荷矩阵完成对点云的配准。在仿真实验中, 因子分析算法对随机丢失和带噪声的点云的配准情况, 与经典迭代最近点(ICP)算法的配准精度相当, 配准效率相比于 ICP 算法提升了 70% 以上。因子分析算法不会陷入局部最小值, 在快速精确配准和稳定性方面有明显的改进和提高。

**关键词** 机器视觉; 点云配准; 因子分析; 白噪声; 极大似然估计

中图分类号 TP391.9

文献标识码 A

doi: 10.3788/LOP56.191503

## Three-Dimensional Point Cloud Registration Algorithm Based on Factor Analysis

Tang Zhirong<sup>1\*</sup>, Jiang Yue<sup>2</sup>, Miao Changwei<sup>1</sup>, Zhao Chengqiang<sup>1</sup>

<sup>1</sup> College of Nuclear Technology and Automation Engineering, Chengdu University of Technology,  
Chengdu, Sichuan 610059, China;

<sup>2</sup> School of Electrical Engineering and Information, Sichuan University,  
Chengdu, Sichuan 610065, China

**Abstract** To deal with disordered data involving white noise and random missing points, a three-dimensional point cloud registration method based on factor analysis was proposed. First, the mathematical model of a point cloud was extended to an orthogonal factor model, transforming the point cloud registration problem into the model parameter solution problem. Then, a Gaussian mixture model was used to fit the point clouds, and the factor load matrix of an orthogonal factor model was obtained via the exponential moving average (EMA) method. Finally, the factor load matrix was used to perform point cloud registration. In a simulation experiment, the registration accuracy of the factor analysis algorithm for noisy point cloud data with missing points was found to be equal to that of the classical iterative closest point (ICP) algorithm, and 70% higher than that of the classical ICP algorithm. The factor analysis algorithm did not fall into local minima and could yield clear improvements in efficiency, registration accuracy, and stability.

**Key words** machine vision; point cloud registration; factor analysis; white noise; maximum likelihood estimation

**OCIS codes** 150.6910; 150.1135; 110.6880; 110.3010

## 1 引言

点云配准技术已经运用到各行各业, 如逆向工程、三维重建、自动导航、产品检测、人脸识别、遥感

影像及地质测绘等领域。在点云配准算法中, 最经典的为 Besl 等<sup>[1]</sup>在 1992 年提出迭代最近点(ICP)算法, 该方法以四元素运算模型为基础, 寻找源点云与目标点云之间的具有匹配关系的最近点, 利用欧

收稿日期: 2019-03-25; 修回日期: 2019-04-12; 录用日期: 2019-04-19

基金项目: 2019 年四川省科技创新苗子工程培育项目(2019019)

\* E-mail: 913865538@qq.com

氏距离的目标函数进行迭代搜索,但此算法迭代时间过长,计算复杂度高,且在沒有较好的初始状态时,易陷入局部最小值。

为有效地提升 ICP 算法的配准效率和精度,He 等<sup>[2]</sup>提出一种主成份分析(PCA)法,将高维数据转换到低维子空间进行配准,为 ICP 算法提供良好的初始位置,但该算法对带有噪声的点云数据,可能得不到较好的初始配准。Yang 等<sup>[3]</sup>提出一种基于 7 维空间迭代的 Scale-ICP 算法,该算法具有较快的收敛速度,且能适应不同尺度的配准。虽然在迭代速度和配准精度上 ICP 算法得到了不同程度的改进,但改进后的 ICP 算法仍然依赖于迭代过程,存在算法收敛比较缓慢的问题。Sharp 等<sup>[4]</sup>提出使用不变特征迭代最接近点(ICPIF)算法,该算法利用被测目标的欧氏空间不变量(曲率、矩不变量、球谐函数不变量等)确定点对,提高了寻找点对的正确率。Yang 等<sup>[5-6]</sup>提出全局最优解(Go-ICP)算法,该算法采用全局优化与 ICP 结合的方式直接实现精细配准,而不是通过对局部算法设置初始值的方式实现全局最优配准,保证配准精度的同时加快了收敛速度,但容易陷入局部最小值。

在文献[7-9]中均提出一种遗传算法(GA),该算法采用将点云转换为三角网搜寻最近点的方法实现点云配准,具有较高的配准效率,但配准精度有待提升,适合为经典 ICP 算法提供初始配准。Yu 等<sup>[10]</sup>提出一种基于最大可行子系统框架的全局优化算法,用于点云数据的稳健成对配准。Myronenko 等<sup>[11]</sup>提出一种相干点漂移(CPD)算法,该算法结合高斯混合模型(Gaussian Mixture Models, GMM)对有噪声、异常值、缺失点的情况下的点云准确配准,但是对点云数据存在缺失和无序的情况的配准比较困难,且配准后会导致待配点云失真。在文献[12-14]中均采用高斯混合模型对点云模型进行拟合,是一种能以任意精度逼近点云的数学模型,但在保证精度的同时,会以牺牲效率为代价。Zhang 等<sup>[15]</sup>提出一种基于双向最大相关熵准则的稳健三维点云配准算法,该算法采用双向措施使重叠部分最大化,避免了将配准结果陷入局部最小值。

Luo 等<sup>[16]</sup>从特征检测和匹配得到的点入手,引入由刚性变换欧几里得不变量导出的距离差矩阵,提出一种快速有效的剪枝方法,以消除异常值对应,特别是尖点对应。在文献[17-19]中提出一种基于关键点的点云配准方法,根据关键点不变的特性实

现精确配准,然而每个点的特征计算量很大,时间消耗较多。Persad 等<sup>[20]</sup>提出一种从不同平台获取的三维点云自动粗配准方法,该方法对点云的高度图像进行二维关键点匹配,具有较高的配准效率,但当数据存在缺失或噪声的情况下,可能无法进行有效的配准。

王畅等<sup>[21]</sup>提出一种基于结构特征的点云快速配准方法,该算法提高了配准精度和配准效率,但当点云数不够的情况下,可能会导致算法的配准结果不理想。赵敏等<sup>[22]</sup>提出一种基于  $l^p$  空间力学模型点云配准算法,其中,  $l$  表示线性赋范空间,  $p$  表示空间维度。该算法收敛速度快,具有良好的配准效果。基于关键点的配准算法<sup>[23]</sup>的配准精度较高,然而每个点都需要计算其特征,导致算法的效率不高。

本文提出一种基于因子分析(FA)法的点云配准算法。将点云数学模型扩展为正交因子模型,从而将点云的配准问题转换为对模型参数的求解问题;采用高斯混合模型对点云进行拟合,并通过最大期望算法(EMA)求解出正交因子模型的因子载荷矩阵,利用因子载荷矩阵完成对点云的配准。在实验中,与其他几种算法相比,在点云无序、数据存在遮挡、缺失不完整及噪声环境下,本文算法可实现快速精确配准,收敛速度快。

## 2 基于因子分析法的点云配准

### 2.1 点云的正交因子数学模型

源点云  $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  和目标点云  $Q = (q_1, q_2, \dots, q_m)$  的元素均属于  $\mathbb{R}^3$ , 用正交因子数学模型表示为

$$\begin{cases} P = A_P F_P + \varepsilon_P + \bar{p} I_{1 \times n} \\ Q = A_Q F_Q + \varepsilon_Q + \bar{q} I_{1 \times m} \end{cases}, \quad (1)$$

式中:  $A_P, A_Q$  为因子载荷矩阵,  $A_P \in \mathbb{R}^{3 \times z}$ ,  $A_Q \in \mathbb{R}^{3 \times z}$ ,  $\mathbb{R}^3$  为三维空间,  $z$  为维度;  $F_P, F_Q$  为公共因子向量组成的矩阵,  $F_P \in \mathbb{R}^{z \times n}$ ,  $F_Q \in \mathbb{R}^{z \times m}$ ,  $n$  为点云  $P$  的点数,  $m$  为点云  $Q$  的点数;  $\varepsilon_P, \varepsilon_Q$  为特殊因子向量组成的矩阵,  $\varepsilon_P \in \mathbb{R}^{3 \times n}$ ,  $\varepsilon_Q \in \mathbb{R}^{3 \times m}$ ;  $I_{1 \times n}, I_{1 \times m}$  为元素全为 1 的行矩阵。  $\bar{p} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ ,  $\bar{q} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ , 即

$$\begin{cases} \bar{p} = \sum_{i=1}^n p_i / n \\ \bar{q} = \sum_{j=1}^m q_j / m \end{cases}, \quad (2)$$

式中,  $p_i$  为点云  $P$  中心点,  $q_j$  为点云  $Q$  中心点,  $i, j$  为数据位置。

通常假定因子变量  $\mathbf{F}_P, \mathbf{F}_Q$  中的元素互不相关,  $\boldsymbol{\varepsilon}_P, \boldsymbol{\varepsilon}_Q$  中的元素互不相关, 即

$$\begin{cases} E(\mathbf{F}_P) = 0 \\ E(\boldsymbol{\varepsilon}_P) = 0 \\ \text{Var}(\mathbf{F}_P) = \mathbf{I} \\ \text{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}_P) = \boldsymbol{\varphi}_P = \text{diag}(\delta_{P1}^2, \delta_{P2}^2, \delta_{P3}^2) \\ \text{Cov}(\mathbf{F}_P, \boldsymbol{\varepsilon}_P) = 0 \\ E(\mathbf{F}_Q) = 0 \\ E(\boldsymbol{\varepsilon}_Q) = 0 \\ \text{Var}(\mathbf{F}_Q) = \mathbf{I} \\ \text{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}_Q) = \boldsymbol{\varphi}_Q = \text{diag}(\delta_{Q1}^2, \delta_{Q2}^2, \delta_{Q3}^2) \\ \text{Cov}(\mathbf{F}_Q, \boldsymbol{\varepsilon}_Q) = 0 \end{cases}, \quad (3)$$

式中,  $E(\cdot)$  为期望值,  $\text{Var}(\cdot)$  为方差,  $\text{diag}(\cdot)$  为对角矩阵,  $\text{Cov}(\cdot)$  为协方差,  $\boldsymbol{\varphi}_P, \boldsymbol{\varphi}_Q$  为方差矩阵,  $\mathbf{I}$  为单位矩阵,  $\delta_{P1}^2, \delta_{P2}^2, \delta_{P3}^2$  为对角元素,  $\delta_{Q1}^2, \delta_{Q2}^2, \delta_{Q3}^2$  为对角元素。

根据正交因子数学模型, 源点云  $\mathbf{P}$  和目标点云  $\mathbf{Q}$  的协方差矩阵为

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Sigma}_P = \text{Var}(\mathbf{P}) = \text{Var}(\mathbf{P} - \bar{\mathbf{p}}\mathbf{I}_{1 \times n}) = \\ E(\mathbf{A}_P \mathbf{F}_P + \boldsymbol{\varepsilon}_P)(\mathbf{A}_P \mathbf{F}_P + \boldsymbol{\varepsilon}_P)^T = \\ \mathbf{A}_P \text{Var}(\mathbf{F}_P) \mathbf{A}_P^T + \text{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}_P) = \mathbf{A}_P \mathbf{A}_P^T + \boldsymbol{\varphi}_P, \\ \boldsymbol{\Sigma}_Q = \text{Var}(\mathbf{Q}) = \text{Var}(\mathbf{Q} - \bar{\mathbf{q}}\mathbf{I}_{1 \times m}) = \\ E(\mathbf{A}_Q \mathbf{F}_Q + \boldsymbol{\varepsilon}_Q)(\mathbf{A}_Q \mathbf{F}_Q + \boldsymbol{\varepsilon}_Q)^T = \\ \mathbf{A}_Q \text{Var}(\mathbf{F}_Q) \mathbf{A}_Q^T + \text{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}_Q) = \mathbf{A}_Q \mathbf{A}_Q^T + \boldsymbol{\varphi}_Q \end{cases}. \quad (4)$$

## 2.2 点云配准

根据 2.1 节, 可认为  $\boldsymbol{\varepsilon}_P$  和  $\boldsymbol{\varepsilon}_Q$  为高斯白噪声, 则  $\boldsymbol{\varphi}_P$  和  $\boldsymbol{\varphi}_Q$  为高斯白噪声的协方差矩阵。此时源点云  $\mathbf{P}$  和目标点云  $\mathbf{Q}$  的实际协方差矩阵为

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Sigma}_P^* = \mathbf{A}_P \mathbf{A}_P^T \\ \boldsymbol{\Sigma}_Q^* = \mathbf{A}_Q \mathbf{A}_Q^T \end{cases} \quad (5)$$

源点云  $\mathbf{P} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n)$  和目标点云  $\mathbf{Q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_m)$  之间的刚性几何变换为

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{R}\mathbf{q}_j + \mathbf{t}, \quad i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, m, \quad (6)$$

式中,  $\mathbf{R}$  为旋转矩阵,  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , 且  $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$ ;  $\mathbf{t}$  为平移向量,  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ 。将两点云中心换到同一坐标系下, 得到点云  $\tilde{\mathbf{P}} = (\tilde{\mathbf{p}}_1, \tilde{\mathbf{p}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{p}}_n)$  和  $\tilde{\mathbf{Q}} = (\tilde{\mathbf{q}}_1, \tilde{\mathbf{q}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{q}}_m)$ , 即

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{p}}_i = \mathbf{p}_i - \bar{\mathbf{p}} \\ \tilde{\mathbf{q}}_j = \mathbf{q}_j - \bar{\mathbf{q}} \end{cases}, \quad (7)$$

点云  $\mathbf{P}$  和  $\mathbf{Q}$  的关系为

$$\mathbf{P} = \mathbf{R}\mathbf{Q}. \quad (8)$$

两个点云实际协方差之间的关系为

$$\boldsymbol{\Sigma}_P^* = \mathbf{R}\boldsymbol{\Sigma}_Q^* \mathbf{R}^T. \quad (9)$$

将  $\boldsymbol{\Sigma}_P^*$  和  $\boldsymbol{\Sigma}_Q^*$  对角化表示为

$$\begin{cases} \mathbf{A}_P = \mathbf{U}_P^T \boldsymbol{\Sigma}_P^* \mathbf{U}_P \\ \mathbf{A}_Q = \mathbf{U}_Q^T \boldsymbol{\Sigma}_Q^* \mathbf{U}_Q \end{cases}, \quad (10)$$

式中:  $\mathbf{A}_P, \mathbf{A}_Q$  分别是  $\boldsymbol{\Sigma}_P^*, \boldsymbol{\Sigma}_Q^*$  的特征值对应的对角矩阵;  $\mathbf{U}_P, \mathbf{U}_Q$  分别是  $\boldsymbol{\Sigma}_P^*, \boldsymbol{\Sigma}_Q^*$  的特征值对应的单位正向特征矩阵,  $\mathbf{U}_P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \mathbf{U}_Q \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , 满足  $\mathbf{U}_P^T \mathbf{U}_P = \mathbf{I}, \mathbf{U}_Q^T \mathbf{U}_Q = \mathbf{I}$ 。因为点云的旋转和平移不改变矩阵的特征值, 所以

$$\mathbf{A}_P = \mathbf{A}_Q. \quad (11)$$

综上所述, 可得

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{U}_P \mathbf{U}_Q^T, \quad (12)$$

$$\mathbf{t}_0 = \bar{\mathbf{p}} - \mathbf{R}_0 \bar{\mathbf{q}}. \quad (13)$$

将  $\mathbf{R}_0$  和  $\mathbf{t}_0$  作为初始值, 代入经典 ICP 算法中进行迭代, 直至收敛。经典 ICP 算法可表示为

$$\begin{cases} (\mathbf{R}^{(v+1)}, \mathbf{t}^{(v+1)}) = \underset{\mathbf{R}^{(v)} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \mathbf{t}^{(v)} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}}{\text{argmin}} \|\mathbf{R}^{(v)} \mathbf{Q} + \mathbf{t}^{(v)} \mathbf{I}_m - \boldsymbol{\Theta}^{(v)}\|_{\text{F}}^2 \\ \mathbf{R}^{(0)} = \mathbf{R}_0, \mathbf{t}^{(0)} = \mathbf{t}_0 \end{cases} \quad (14)$$

式中:  $\mathbf{R}^{(v)}, \mathbf{R}^{(v+1)}$  为  $v$  时刻和  $v+1$  时刻的值;  $\mathbf{t}^{(v)}, \mathbf{t}^{(v+1)}$  为  $v$  时刻和  $v+1$  时刻的值;  $\mathbf{I}_m$  为元素全为 1 的行矩阵;  $\boldsymbol{\Theta}^{(v)}$  是  $\mathbf{R}^{(v)} \mathbf{Q}$  在源点云  $\mathbf{P}$  中第  $v$  次找出的对应点组成的点云;  $v$  是迭代次数;  $\|\cdot\|_{\text{F}}$  为 Frobenius 范数。

## 3 参数求解

由第 2.2 节可知, 需要求解的参数为  $\boldsymbol{\Sigma}_P^*$  和  $\boldsymbol{\Sigma}_Q^*$  (这里统一为  $\boldsymbol{\Sigma}$ ), 所以需要估计参数  $\mathbf{A}_P$  和  $\mathbf{A}_Q$  (这里

统一为  $\mathbf{A}$ )。为得到较为精确的估计值, 这里采用极大似然估计。

### 3.1 极大似然估计

对样本  $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N)$  进行极大似然估计的前提是样本需要满足正态性。由于点云样本数据不一定符合正态分布, 为使样本分布满足正态性假定, 故采用高斯混合模型对点云数据样本的分布规律进行拟合,

$$P(\mathbf{X} | \boldsymbol{\mu}, \mathbf{A}, \boldsymbol{\varphi}) = \sum_{k=1}^K \alpha_k \prod_{l'=1}^N (2\pi)^{-D/2} \cdot \left| \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^T + \boldsymbol{\varphi}_k \right|^{-1/2} \cdot \exp \left[ \frac{-(\mathbf{x}_{l'} - \boldsymbol{\mu}_k)^T (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^T + \boldsymbol{\varphi}_k)^{-1} (\mathbf{x}_{l'} - \boldsymbol{\mu}_k)}{2} \right], \quad (15)$$

式中,  $\boldsymbol{\mu}$  为中心点,  $\boldsymbol{\varphi}$  为噪声矩阵,  $\boldsymbol{\varphi}_k$  为第  $k$  个噪声矩阵,  $\alpha_k$  为第  $k$  个权重,  $K$  为模型个数,  $l'$  为数据位置,  $N$  为数据总数,  $\mathbf{x}_{l'}$  为第  $l'$  个数据,  $\mathbf{A}_k$  为第  $K$  个

因子矩阵,  $\boldsymbol{\mu}_k$  为第  $k$  个模型的均值点,  $D$  为样本观测数据的维度。

### 3.2 EMA 迭代

为求解混合模型的最大值和算法的收敛速度, 这里采用随机采样最大期望算法(EMA)对上述问题进行求解, EMA 包括: 1) 计算完整数据的对数似然函数的期望值, 2) 通过最大化中间量的值来获得新的参数值。

在 EMA 下的代价函数为

$$L(\mathbf{X} | \boldsymbol{\theta}) = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} \sum_{l'=1}^N \sum_k^K \gamma_{l'k} \lg \frac{\alpha_k \cdot \varphi(\mathbf{x} | \boldsymbol{\theta}_k)}{\gamma_{l'k}} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} \sum_{l'=1}^N \sum_k^K \gamma_{l'k} \cdot \lg \left\{ \alpha_k \cdot (2\pi)^{-D/2} \left| \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^T + \boldsymbol{\varphi}_k \right|^{-1/2} \exp \left[ \frac{-(\mathbf{x}_{l'} - \boldsymbol{\mu}_k)^T (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^T + \boldsymbol{\varphi}_k)^{-1} (\mathbf{x}_{l'} - \boldsymbol{\mu}_k)}{2} \right] \right\} \cdot \gamma_{l'k}^{-1}, \quad (16)$$

式中,  $\varphi(\cdot)$  为高斯函数,  $\boldsymbol{\theta}$  为待求解参数,  $\boldsymbol{\theta} = \{\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2, \dots, \boldsymbol{\theta}_K\}$ ,  $\boldsymbol{\theta}_k = \{\boldsymbol{\mu}_k, \mathbf{A}_k, \boldsymbol{\varphi}_k\}$ ,  $\gamma_{l'k}$  为中间隐藏变量的观测值。

1) 计算中间隐藏变量的观测值, 即

$$\gamma_{l'k} = \frac{\alpha_k \varphi(\mathbf{X} | \boldsymbol{\theta}_k)}{\sum_{k=1}^K \alpha_k \varphi(\mathbf{X} | \boldsymbol{\theta}_k)}. \quad (17)$$

2) 通过对参数求偏导来更新  $\boldsymbol{\theta}$  的  $\boldsymbol{\varphi}_k$  值, 使代价函数值最大。对  $\boldsymbol{\mu}_k$  求偏导并令其等于 0, 则

$$\frac{\partial L(\mathbf{X} | \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\mu}_k} = \sum_{l'=1}^N \gamma_{l'k} \left\{ -\frac{1}{2} \left\{ [(\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^T + \boldsymbol{\varphi}_k)^{-1}]^T + (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^T + \boldsymbol{\varphi}_k)^{-1} \right\} (\mathbf{x}_{l'} - \boldsymbol{\mu}_k) \right\} = 0, \quad (18)$$

得

$$\boldsymbol{\mu}_k = \frac{\sum_{l'=1}^N \gamma_{l'k} \mathbf{x}_{l'}}{\sum_{l'=1}^N \gamma_{l'k}}. \quad (19)$$

对  $\mathbf{A}_k$  求偏导

$$\frac{\partial L(\mathbf{X} | \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{A}_k} = \sum_{l'=1}^N \gamma_{l'k} \left[ (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^T + \boldsymbol{\varphi}_k)^{-1} \mathbf{A}_k + (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^T + \boldsymbol{\varphi}_k)^{-1} (\mathbf{x}_{l'} - \boldsymbol{\mu}_k) (\mathbf{x}_{l'} - \boldsymbol{\mu}_k)^T (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^T + \boldsymbol{\varphi}_k)^{-1} \mathbf{A}_k \right], \quad (20)$$

并令其等于 0, 得到

$$\sum_{l'=1}^N \gamma_{l'k} \mathbf{A}_k = \sum_{l'=1}^N \gamma_{l'k} (\mathbf{x}_{l'} - \boldsymbol{\mu}_k) \cdot (\mathbf{x}_{l'} - \boldsymbol{\mu}_k)^T (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^T + \boldsymbol{\varphi}_k)^{-1} \mathbf{A}_k, \quad (21)$$

因为(21)式为非线性方程, 所以在此步采用迭代的方式即可。对  $\boldsymbol{\varphi}_k$  求偏导

$$\frac{\partial L(\mathbf{X} | \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\varphi}_k} =$$

$$\sum_{l'=1}^N \gamma_{l'k} \left[ (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^T + \boldsymbol{\varphi}_k)^{-1} + (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^T + \boldsymbol{\varphi}_k)^{-1} \cdot (\mathbf{x}_{l'} - \boldsymbol{\mu}_k) (\mathbf{x}_{l'} - \boldsymbol{\mu}_k)^T (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^T + \boldsymbol{\varphi}_k)^{-1} \right], \quad (22)$$

令其等于 0, 得到  $\boldsymbol{\varphi}_k$  的更新公式为

$$\boldsymbol{\varphi}_k = \text{diag} \left\{ \frac{\sum_{l'=1}^N \gamma_{l'k} \left[ (\mathbf{x}_{l'} - \boldsymbol{\mu}_k) (\mathbf{x}_{l'} - \boldsymbol{\mu}_k)^T - \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^T \right]}{\sum_{l'=1}^N \gamma_{l'k}} \right\}. \quad (23)$$

式中,  $\text{diag}(\cdot)$  为取矩阵主对角线元素构成新的对角矩阵。

令

$$L(\boldsymbol{\alpha}) = L(\mathbf{X} | \boldsymbol{\theta}) - N \left( \sum_{k=1}^K \alpha_k - 1 \right), \quad (24)$$

式中,  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ 。对  $\alpha_k$  求偏导, 并令其等于 0, 得

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_k} = \sum_{l'=1}^N \gamma_{l'k} \times \frac{1}{\alpha_k} - N = 0, \quad (25)$$

获得  $\alpha_k$  的更新公式为

$$\alpha_k = \frac{\sum_{l'=1}^N \gamma_{l'k}}{N}. \quad (26)$$

只需重复(19)式、(21)式、(23)式、(26)式直至收敛, 即可按成对参数  $\boldsymbol{\mu}_k, \mathbf{A}_k, \boldsymbol{\varphi}_k, \alpha_k$  进行更新。可将权重  $\boldsymbol{\alpha}$  的值作为模型估计值的可信度, 所以选取权重最大值  $\max \alpha_k (1 \leq k \leq K)$  对应模型的估计值可行度比较高。

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^T \Big|_{\max \alpha_k}, \quad (27)$$

参数  $\Sigma$  即为所求参数。

本文因子分析算法流程如下。

输入:点云  $P$  和点云  $Q$ ,其中  $Q$  可以存在随机丢失和有序排列的情况。

输出:配准后的点云  $Q$ ,旋转矩阵  $R$  和平移向量  $t$ 。

1) 选取适当模型个数  $K$ ,采用极大似然法,通过迭代(17)式、(21)式、(23)式直至收敛,分别求出参数  $\gamma_l, A, \varphi$ ;

2) 根据(5)式计算降噪后的协方差矩阵  $\Sigma_P^*$  和  $\Sigma_Q^*$ ;

3) 根据(10)式和(12)式求解初始旋转矩阵  $R_0$ ;

4) 由(2)式和(13)式求出平移向量  $t_0$ ;

5) 将  $R_0$  和  $t_0$  代入(14)式求解精确旋转矩阵  $R$  和平移向量  $t$ 。

## 4 实验

实验采用 Stanford 大学提供的 Armadillo (34526)、Bunny (31607)、Dragon (43768) 和 Elephant (24955) 三维点云数据进行仿真。在 MATLAB 2017a 版本、i7-6700HQ 四核处理器和 GTX965M 环境下进行实验。

### 4.1 经典配准

在实际过程中,源点云与目标点云的数据没有一一对应,且在目标点云中可能存在白噪声。在仿真中,对 Armadillo 和 Elephant 点云随机旋转和平移得到目标点云,并且使目标点云数据随机丢失 10%,再加上 30 dB 的高斯白噪声对点云进行偏移,红色代表源点云,蓝色代表目标点云,如图 1 所示。

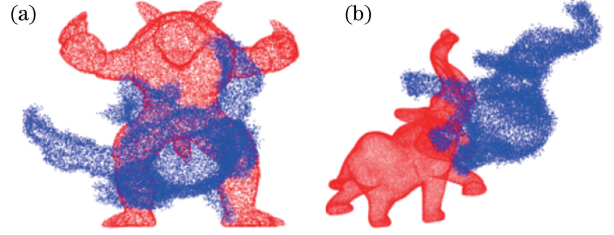


图 1 点云的初始状态。(a) Armadillo;(b) Elephant

Fig. 1 Initial states of point clouds. (a) Armadillo; (b) Elephant

因为 Scale-ICP 和 ICP 算法需要初始配准,所以直接采用 FA 算法作为初配准,再与 FA 算法、CPD 和 Go-ICP 算法的配准时间和精度进行比对。对 Armadillo 和 Elephant 点云的配准效果如图 2 所示。

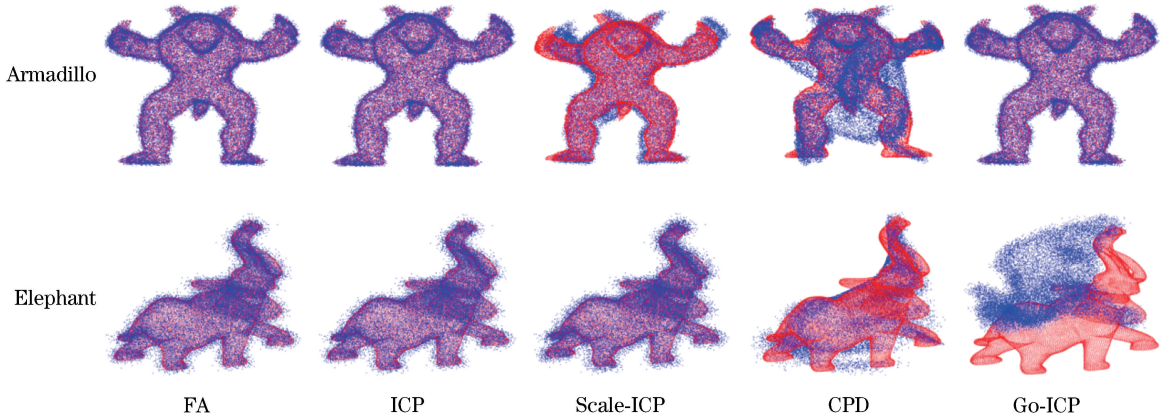


图 2 5 种算法对 Armadillo 和 Elephant 点云的配准效果

Fig. 2 Registration effects of Armadillo and Elephant point clouds by five algorithms

利用三角剖分网络寻找对应点,则对应点之间

的均方根误差( $E_{RMSE}$ )为

$$E_{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{o=1}^n [(x_o^Q - x_o^P)^2 + (y_o^Q - y_o^P)^2 + (z_o^Q - z_o^P)^2]}, \quad (28)$$

式中: $o$  表示第  $o$  个对应数据点; $n$  为对应的个数; $x_o^Q, y_o^Q, z_o^Q$  为点云  $Q$  第  $o$  个点的三维坐标; $x_o^P, y_o^P, z_o^P$  为点云  $P$  第  $o$  个点的三维坐标。

各算法配准误差和配准时间如表 1 所示。

从图 2 可知,FA 算法、经典 ICP 算法和 Go-

ICP 算法相比于 Scale-ICP 算法和 CPD 算法都具有很好的配准效果,且 FA 算法、经典 ICP 算法和 Go-ICP 算法对 Armadillo 点云的配准效果相当,但 Go-ICP 算法对 Elephant 点云不能进行配准。从表 1 可以看出,对 Armadillo 点云,FA 算法、经典 ICP 算

表 1 5 种算法的配准时间和配准误差

Table 1 Registration time and registration error of five algorithms

Algorithm	Time /s		$E_{RMSE}/mm$	
	Armadillo	Elephant	Armadillo	Elephant
FA	40.8	27.5	0.7457	0.0092
ICP	161.2	78.3	0.7425	0.0092
Scale-ICP	6.2	6.1	2.5781	0.0106
CPD	157.9	111.8	2.5886	0.0178
Go-ICP	31.2	28.7	0.7513	0.1504

法和 Go-ICP 算法 3 者的配准精度相差很小,只在 0.01 mm 级别,但 FA 算法和经典 ICP 算法优于 Go-ICP 算法。Scale-ICP 算法和 CPD 算法的配准精度远远低于 FA 算法,FA 算法的配准效率相比于经典 ICP 算法提高了 74.7%。对 Elephant 点云,FA 算法与经典 ICP 算法的配准精度相等,Scale-ICP 算法

比 FA 算法配准误差高了 0.0014 mm,在 FA 算法配准的基础上精度有所下降。CPD 算法与 Go-ICP 算法的配准精度很差,且 Go-ICP 算法配准精度与 CPD 算法配准精度相比较可以看出 Go-ICP 算法陷入了局部最小值。

4.2 不同白噪声下的配准

算法的抗噪声能力也是评价算法的一个重要指标,为验证 FA 算法的抗噪声能力,将 Bunny 点云随机旋转、平移得到目标点云,并且给目标点云分别添加 30 dB,25 dB,20 dB,15 dB 的白噪声对目标点云进行偏移。用 GA 算法对经典 ICP、Scale-ICP 算法作初始配准,将 FA 算法与经典 ICP、Scale-ICP、CPD 和 Go-ICP 算法在 4 组不同噪声环境下的配准精度和配准时间作对比。红色代表源点云,蓝色代表目标点云,配准效果如图 3 所示。

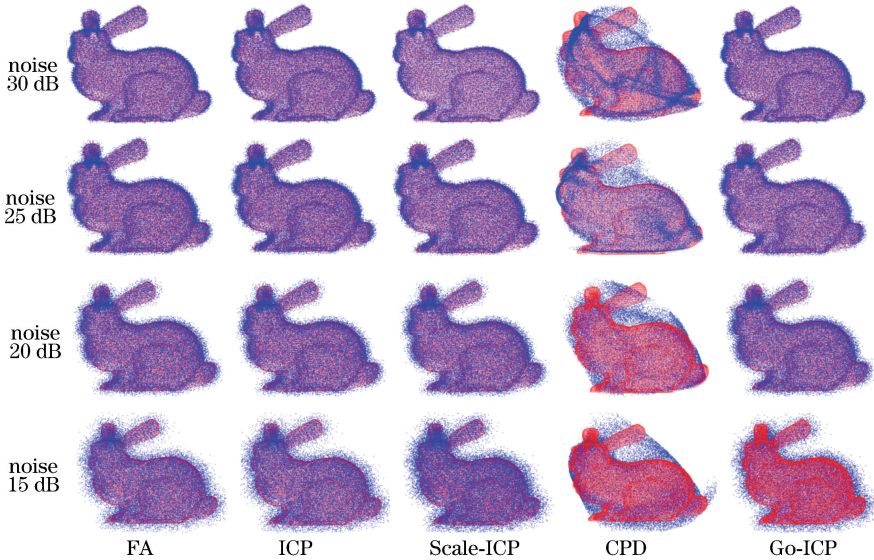


图 3 不同白噪声环境下的 Bunny 点云配准效果

Fig. 3 Registration effect of Bunny point cloud in different white noise environments

5 种算法的配准时间与配准误差如图 4 所示。

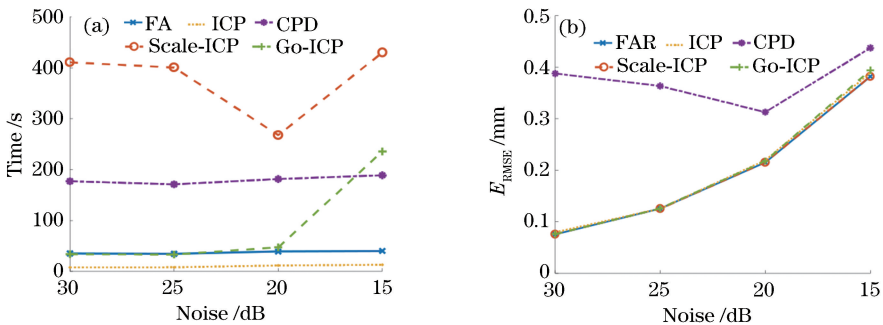


图 4 不同白噪声环境下的 Bunny 点云配准误差和配准时间。(a)配准时间;(b)配准误差

Fig. 4 Registration error and registration time of Bunny point cloud in different white noise environments.

(a) Registration time; (b) registration error

从图 3 可以看出 FA 算法对白噪声具有一定的抗干扰能力,在不同白噪声环境下均能完成配准,与经典 ICP、Scale-ICP 和 Go-ICP 算法的配准效果大致相同,而 CPD 算法的配准效果很差。从图 4(a)可知 FA 算法的配准效率仅次于 Scale-ICP 算法,经典 ICP 算法的配准时间最长,其次是 CPD 算法。Go-ICP 算法在白噪声超过 20 dB 时,配准效率大幅度下降。图 4(b)说明 FA 算法的抗噪能力与 ICP、Scale-ICP 和 Go-ICP 算法一致,CPD 算法的抗噪能力较差。随着白噪声的不断增大,5 种算法的精度有所下降,但都比较稳定。

### 4.3 不同数据缺失下的配准

当被扫描物体存在反光等因素时,扫描数据可能存在遮挡和缺失,导致数据不完整。在仿真实验中,将 Dragon 点云随机旋转和平移得到目标点云,并且对目标点云分别作随机丢失 10%、20%、30%、40% 的处理,再加 45 dB 白噪声进行偏置。将 FA 算法与经典 ICP、Scale-ICP、CPD 和 Go-ICP 算法在 4 组不同丢失环境下的配准精度和配准时间作对比。红色代表源点云,蓝色代表目标点云,配准效果如图 5 所示。

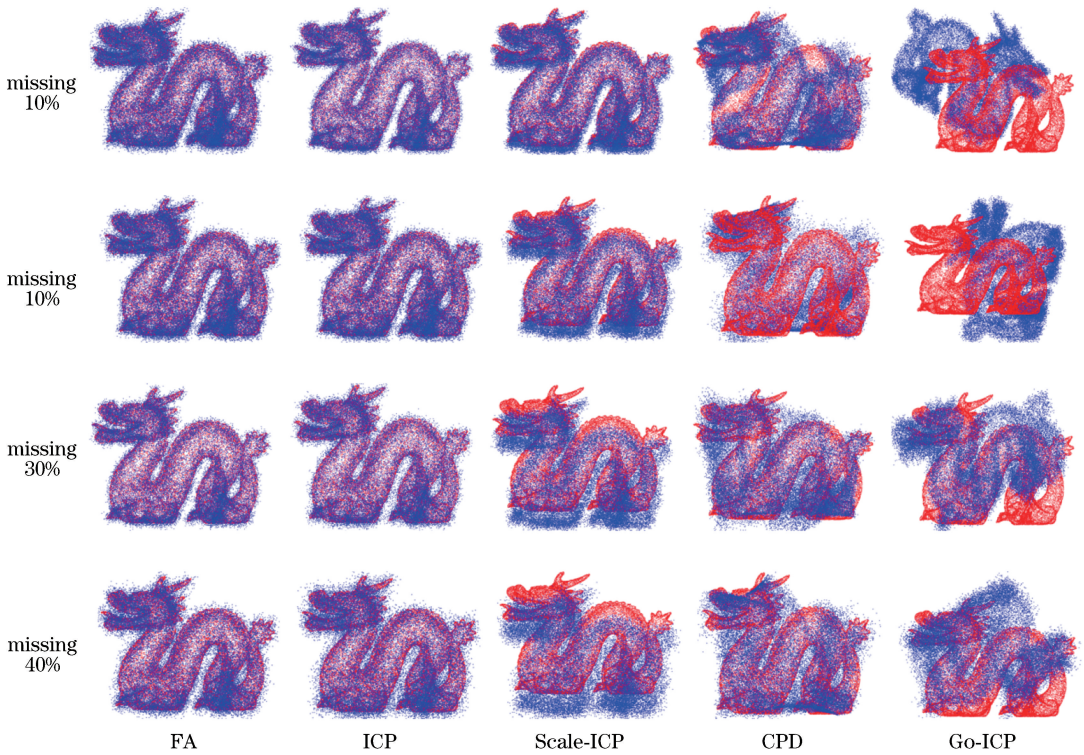


图 5 不同数据缺失环境下的 Dragon 点云配准效果

Fig. 5 Registration effect of Dragon point cloud in different data missing environments

5 种算法的配准时间与配准误差如图 6 所示。

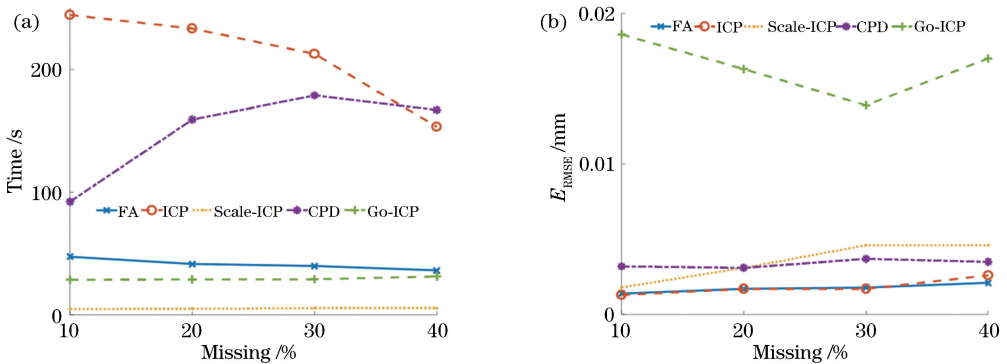


图 6 不同数据缺失环境下的 Dragon 点云配准误差和配准时间。(a)配准时间;(b)配准误差

Fig. 6 Registration error and registration time of Dragon point cloud in different data missing environments.

(a) Registration time; (b) registration error

从图 5 可以看出 FA 算法和经典 ICP 算法配准效果相较于其他 3 种算法好,随着数据丢失的增加,Scale-ICP 算法的配准效果逐渐变差,CPD 算法的配准效果比较稳定,Go-ICP 算法不能完成对 Dragon 点云的配准。从图 6(a)可以看出目标点云数据丢失得越多,FA 算法与经典 ICP 算法的配准时间越小,Scale-ICP 算法和 Go-ICP 算法的配准时间保持稳定,而 CPD 算法的配准时间呈上升趋势。从图 6(b)可以得到 FA 算法与经典 ICP 算法的配准精度相当,而 Scale-ICP 算法的配准精度逐渐变低,CPD 算法配准精度比较稳定,但相比于 FA 算法精度较低。Go-ICP 算法配准精度最低。

#### 4.4 实物配准

为证明 FA 算法具有实用性,采用三维激光扫描仪 HandySCAN 700 分别从不同角度对 Bottle 和 Box 实物进行扫描,采集到两组点云数据,如图 7 所示。其中,Bottle 点云数据,源点云(红色)有 21450 个点,目标点云(蓝色)有 21430 个点;Box 点云数据,源点云(红色)有 45271 个点,目标点云(蓝色)有 46370 个点。Bottle 点云和 Box 点云初始状态如图 8 所示。

利用 FA 算法对经典 ICP 算法和 Scale-ICP 算

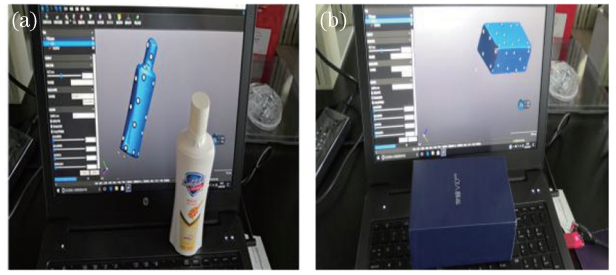


图 7 实物图。(a) Bottle;(b) Box

Fig. 7 Pictures of actual object. (a) Bottle; (b) Box

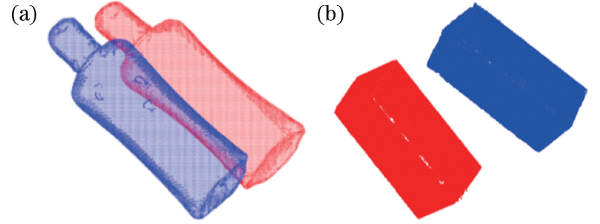


图 8 点云初始状态。(a) Bottle;(b) Box

Fig. 8 Initial states of point clouds. (a) Bottle;

(b) Box

法实现粗配准,再将 FA 算法与经典 ICP 算法、Scale-ICP 算法、Go-ICP 算法和 CPD 算法进行比较。5 种算法配准效果如图 9 所示。

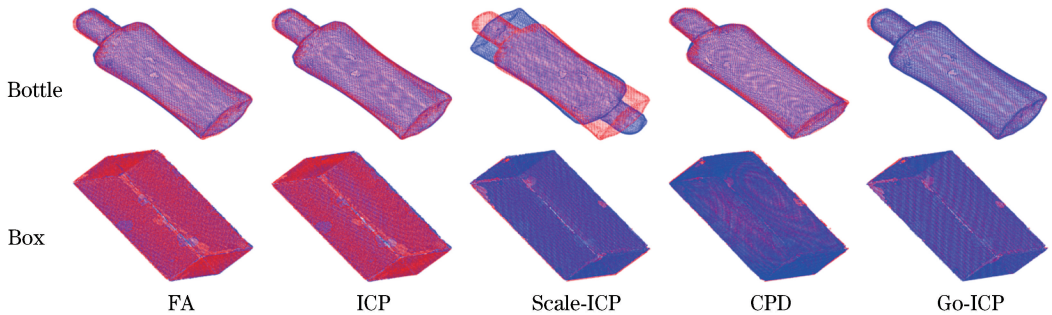


图 9 5 种算法配准效果

Fig. 9 Registration effects of five algorithms

5 种算法对 Bottle 和 Box 点云的配准时间和配准误差如表 2 所示。

从图 9 可以看出,FA 算法的配准效果与经典 ICP、CPD、Go-ICP 算法的配准效果一致,Scale-ICP 算法不能完成对 Bottle 点云的配准。从表 2 可知,在对两组点云的配准中,FA 算法的配准精度与经典 ICP 和 Go-ICP 算法的配准精度一致。Scale-ICP 算法具有高效的配准效率,但配准精度最差。CPD 算法的配准精度略低于 FA 算法。FA 算法对 Bottle 点云的配准效率相较于经典 ICP 算法,提升了 93.5%,FA 算法对 Box 点云的配准效率相较于经典 ICP 算法,提升了 91.1%。

表 2 5 种算法对 Bottle 和 Box 点云的配准误差和时间  
Table 2 Registration error and registration time of five algorithms for Bottle and Box point clouds

Algorithm	Time /s		$E_{RMSE}/mm$	
	Bottle	Box	Bottle	Box
FA	23.3	33.8	0.4829	0.4851
ICP	360.5	380.1	0.4643	0.4840
Scale-ICP	4.3	7.4	3.2711	0.5878
CPD	68.7	235.1	0.5433	0.5377
Go-ICP	27.8	29.3	0.4783	0.4752

## 5 结 论

针对数据存在白噪声、缺失及无序问题的三维



点云,提出一种基于因子分析法的点云配准算法。将带白噪声的点云数学模型扩展为正交因子模型,从而将点云配准问题转换为对模型参数的求解;为使模型参数更加精确,采用高斯混合模型对点云进行逼近,通过 EMA 求解出正交因子模型的因子载荷矩阵;利用因子载荷矩阵完成对点云的配准。实验验证因子分析算法在配准精度上和经典 ICP 算法相当,但配准效率有较大提升。与 Scale-ICP 算法、Go-ICP 算法和 CPD 算法相比,因子分析算法具有较好的稳定性。

### 参 考 文 献

- [1] Besl P J, McKay N D. A method for registration of 3-D shapes [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1992, 14(2): 239-256.
- [2] He S J, Zhao S T, Bai F, *et al.* A method for spatial data registration based on PCA-ICP algorithm [J]. Advanced Materials Research, 2013, 718/719/720: 1033-1036.
- [3] Ying S, Peng J, Du S, *et al.* A scale stretch method based on ICP for 3D data registration [J]. IEEE Transactions on Automation Science & Engineering, 2009, 6(3):559-565.
- [4] Sharp G C, Lee S W, Wehe D K. ICP registration using invariant features [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2002, 24(1): 90-102.
- [5] Yang J L, Li H D, Campbell D, *et al.* Go-ICP: a globally optimal solution to 3D ICP point-set registration [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2016, 38(11): 2241-2254.
- [6] Yang J L, Li H D, Jia Y D. Go-ICP: solving 3D registration efficiently and globally optimally [C] // 2013 IEEE International Conference on Computer Vision, December 1-8, 2013, Sydney, Australia. New York: IEEE, 2013: 1457-1464.
- [7] Ji S, Ren Y, Ji Z, *et al.* An improved method for registration of point cloud [J]. Optik, 2017, 140: 451-458.
- [8] Yan S J, Zhou Y F, Peng F Y, *et al.* Research on the localisation of the workpieces with large sculptured surfaces in NC machining [J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2004, 23(5/6): 429-435.
- [9] Huang W, Sullivan J M, Jr, Kulkarni P, *et al.* Automatic 3D image registration using voxel similarity measurements based on a genetic algorithm [J]. Proceedings of SPIE, 2006, 6144: 614430.
- [10] Yu C, Ju D. A maximum feasible subsystem for globally optimal 3D point cloud registration [J]. Sensors, 2018, 18(2): 544.
- [11] Myronenko A, Song X B. Point set registration: coherent point drift [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2010, 32(12): 2262-2275.
- [12] Campbell D, Petersson L. GOGMA: globally-optimal Gaussian mixture alignment [C] // 2016 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), June 27-30, 2016, Las Vegas, NV, USA. New York: IEEE, 2016: 5685-5694.
- [13] Li Q S, Xiong R, Vidal-Calleja T. A GMM based uncertainty model for point clouds registration [J]. Robotics and Autonomous Systems, 2017, 91: 349-362.
- [14] Jian B, Vemuri B C. Robust point set registration using Gaussian mixture models [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2011, 33(8): 1633-1645.
- [15] Zhang X T, Jian L B, Xu M F. Robust 3D point cloud registration based on bidirectional Maximum Correntropy Criterion [J]. PLoS One, 2018, 13(5): e0197542.
- [16] Luo N, Wang Q. Effective outlier matches pruning algorithm for rigid pairwise point cloud registration using distance disparity matrix [J]. IET Computer Vision, 2018, 12(2): 220-232.
- [17] Prakhya S M, Liu B B, Lin W S. B-SHOT: a binary feature descriptor for fast and efficient keypoint matching on 3D point clouds [C] // 2015 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS), September 28-October 2, 2015, Hamburg, Germany. New York: IEEE, 2015: 1929-1934.
- [18] Ge X M. Automatic markerless registration of point clouds with semantic-keypoint-based 4-points congruent sets [J]. ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing, 2017, 130: 344-357.
- [19] Quan S W, Ma J, Hu F Y, *et al.* Local voxelized structure for 3D binary feature representation and robust registration of point clouds from low-cost sensors [J]. Information Sciences, 2018, 444: 153-171.

- [20] Persad R A, Armenakis C. Automatic co-registration of 3D multi-sensor point clouds[J]. ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing, 2017, 130: 162-186.
- [21] Wang C, Shu Q, Yang Y X, *et al.* Quick registration algorithm of point clouds using structure feature[J]. Acta Optica Sinica, 2018, 38(9): 0911005.  
王畅, 舒勤, 杨赟秀, 等. 利用结构特征的点云快速配准算法[J]. 光学学报, 2018, 38(9): 0911005.
- [22] Zhao M, Shu Q, Chen W, *et al.* Three-dimensional point cloud registration algorithm based on  $l^p$  spatial mechanics model[J]. Acta Optica Sinica, 2018, 38(10): 1010005.  
赵敏, 舒勤, 陈蔚, 等. 基于  $l^p$  空间力学模型的三维点云配准算法[J]. 光学学报, 2018, 38(10): 1010005.
- [23] Zhang Z, Xu H L, Yin H. A fast point cloud registration algorithm based on key point selection[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2017, 54(12): 121001.  
张哲, 许宏丽, 尹辉. 一种基于关键点选择的快速点云配准算法[J]. 激光与光电子学进展, 2017, 54(12): 121001.