

基于同心圆标志的空间平面夹角测量

雷经发^{1,2}, 陈志强¹, 张淼^{1*}, 李永玲¹, 孙虹^{1,2}

¹安徽建筑大学机械与电气工程学院, 安徽 合肥 230601;

²过程装备与控制工程四川省高校重点实验室, 四川 自贡 643000

摘要 为实时准确地测量两平面之间的夹角值, 根据射影变换原理, 提出一种基于同心圆标志的空间平面夹角测量的方法。首先拟合出获取的图像中同心圆标志对应的曲线方程; 再依据交比不变及调和比原理, 先计算多个消隐点, 拟合出同心圆所在平面的消隐线方程, 以此确定两平面法线的消隐点; 最后, 结合已知的相机内部参数解算出两法线间的夹角值, 对其取补即可得到两平面间的夹角值。仿真结果说明该方法真实可行。真实图像实验表明, 该方法测量的绝对误差小于 1° , 相对误差不超过 1%。该方法仅需已知相机内部参数, 对同心圆标志尺寸及拍照位置无特殊要求, 具有较高的灵活性, 能为夹角测量提供便捷高效的技术方案。

关键词 机器视觉; 射影变换; 消隐线; 夹角测量

中图分类号 TP391 **文献标识码** A

doi: 10.3788/LOP56.151504

Measurement of Space Plane Angle Based on Concentric Circle Mark

Lei Jingfa^{1,2}, Chen Zhiqiang¹, Zhang Miao^{1*}, Li Yongling¹, Sun Hong^{1,2}

¹School of Mechanical and Electrical Engineering, Anhui Jianzhu University, Hefei, Anhui 230601, China;

²Sichuan Provincial Key Laboratory of Process Equipment and Control, Zigong, Sichuan 643000, China

Abstract This study proposes a method for the accurate and real-time measurement of the angle between two planes based on the concentric circle mark and the principle of projective transformation. First, the curve equation corresponding to the concentric circle mark in the obtained image is fitted. Second, several vanishing points are calculated according to the invariant cross and harmonic ratios. The vanishing line equation of the plane, where the concentric circles are located, is fitted to determine the vanishing points of the two plane normals. Third, the angle between the two normals is calculated by combining known camera internal parameters. The angle between the two planes is the supplementary angle. The simulation results show that the method is feasible. The actual image experiments show that the absolute error is less than 1° , while the relative error is less than 1%. This method requires only the internal parameters of the camera and has no special requirements for the size of the concentric circle mark and shoot angle. Moreover, the method has high flexibility and can provide a convenient and efficient scheme for the space angle measurement.

Key words machine vision; projective transformation; vanishing line; angle measurement

OCIS codes 150.1135; 350.6980; 120.1880

1 引言

角度是生产制造等各领域中的重要物理参量, 其测量技术广泛应用于精密制造系统中的高精度测

角^[1-2]、三维轮廓检测系统中的旋转角测量^[3]、木材节点几何重构时纤维角的测量^[4], 以及卷烟包装盒外形检测^[5]等。因此, 物体间夹角的实时准确测量具有重要的应用价值。

收稿日期: 2019-01-25; **修回日期:** 2019-03-08; **录用日期:** 2019-03-11

基金项目: 安徽省重点研究与开发计划(1804a09020009)、过程装备与控制工程四川省高校重点实验室开放基金(GK201819、GK201714、GK201613)、安徽省仿真设计与现代制造工程技术研究中心开放研究项目(SGCZXYB1806)、安徽建筑大学引进人才及博士启动基金(2018QD38)

* **E-mail:** hfutzm@163.com

测角法分为接触式和非接触式两类,接触式测角法由于测量速度快、操作繁琐等原因限制了其应用。早期的非接触式测量是基于自准直仪技术的测角法。自准直仪是一种光学仪器,通过比较目镜十字线位置与经物体反射后的十字线图像间的关系来得出角度值,该方法对被测物表面有镜面反光特性要求,因而应用场合受限^[6]。后来,为测量空间大尺寸异面角度,研究人员提出了基于线结构光传播特性的视觉测量方法,该方法多用于大型平台的生产制造,但该方法需要附加结构光投射设备^[7]。此外还有拍摄带有标记的被测物图像的视觉测角法,如:在机器人手臂末端贴上靶标,基于单目视觉求解机器人的协同位姿,该方法精度较高,但计算过程复杂^[8];在平面粘贴带有圆心的圆形标志,测量平面间的夹角,但这种方法依赖圆形标志的真实圆心^[9]。

为实现夹角的实时准确测量,摆脱以往方法过分依赖标志自身属性的特点,并降低图像处理的复杂度,本文提出一种基于同心圆标志的空间平面夹角测量方法。首先通过拍照获取两平面上各组同心圆标志图像,采用阈值分割法结合椭圆检测技术提取椭圆像素点,以拟合曲线方程;然后依据射影变换原理,得到同心圆标志所在平面上的消隐线方程,以此找出两平面法线的消隐点,再结合已知的相机内部参数,最终可计算出两平面间的夹角值。

2 空间平面夹角测量原理

2.1 同心圆标志的物像关系

假设空间中有一正圆曲线,拍照的相机一般采用针孔成像模型^[10],成像模型可描述如下:各坐标系中点以相应齐次坐标表示,即以 $(u, v, 1)$ 表示像素坐标系中任意一点,以 $(X, Y, Z, 1)$ 表示世界坐标系中任意一点。当相机拍摄时,正圆曲线上坐标为 $(X_c, Y_c, Z_c, 1)$ 的点成像到图像中坐标为 $(u_c, v_c, 1)$ 的点,两点之间的关系为

$$s \cdot \begin{bmatrix} u_c \\ v_c \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K} \cdot [\mathbf{R} \quad \mathbf{T}] \cdot \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

式中: s 为比例因子; \mathbf{K} 为相机内部参数矩阵; \mathbf{R} 、 \mathbf{T} 分别为旋转和平移矩阵。

由于拍摄角度等原因,空间正圆曲线经成像模型映射到二维图像平面中的像会变形为椭圆^[11-12],产生离心偏差^[13],椭圆中心不再是正圆圆心像点^[14]。两组同心圆标志的像是4条椭圆曲线,其曲

线一般形式可假设为 $A_i u^2 + B_i v^2 + C_i uv + D_i u + E_i v - 1 = 0, (i=1, 2, 3, 4)$ 。式中: A_i, B_i, C_i, D_i, E_i 为常数,其值可以用最小二乘法拟合像平面中的椭圆曲线得到; u, v 分别表示椭圆曲线上点的横、纵坐标; i 表示第几条曲线。

2.2 消隐线计算原理

相机成像方式是一种射影变换,广泛应用于机器视觉测量中^[15]。交比是射影变换中的重要不变量^[16],假设有一条直线 l 与空间中的同心圆 C 的内、外圆相交于 a, b, c, d 点, e 是线段 bc 之间的一点, o 是直线 l 上异于以上5点的另一点,如图1(a)所示,则交比表示为

$$\begin{cases} (l_{ae}, l_{do}) = \frac{l_{ad} \cdot l_{eo}}{l_{ed} \cdot l_{ao}} = \lambda_1 \\ (l_{be}, l_{co}) = \frac{l_{bc} \cdot l_{eo}}{l_{ec} \cdot l_{bo}} = \lambda_2 \end{cases}, \quad (2)$$

式中: l_{ae} 为图1(a)中点 a 与 e 的距离;其他类似; λ_1, λ_2 为交比值,随 l_{ae}, l_{do} 等值的变化而变化。

当空间同心圆 C 经过针孔成像模型映射到图像平面时,其像为一组中心相近的非同心椭圆 C' ;同理直线 l 的像为 l' ,以上各点对应的像分别为 a', b', c', d', e', o' ,如图1(b)所示,则在图像坐标系下交比表示为

$$\begin{cases} (l_{a'e'}, l_{d'o'}) = \frac{l_{a'd'} \cdot l_{e'o'}}{l_{e'd'} \cdot l_{a'o'}} = \lambda'_1 \\ (l_{b'e'}, l_{c'o'}) = \frac{l_{b'c'} \cdot l_{e'o'}}{l_{c'e'} \cdot l_{b'o'}} = \lambda'_2 \end{cases}, \quad (3)$$

式中: $l_{a'e'}$ 表示图1(a)中点 a' 与 e' 的距离;其他类似; λ'_1, λ'_2 表示交比值,随 $l_{a'e'}, l_{d'o'}$ 等值的变化而变化。

根据射影变换的交比不变性可知, $\lambda_1 = \lambda'_1, \lambda_2 = \lambda'_2$ 。依据交比不变及调和比原理,当 e 是线段 bc 的中点,也一定是线段 ad 的中点时,各交比值为 $\lambda_1 = \lambda'_1 = 2, \lambda_2 = \lambda'_2 = 2$;此时, o 被称为直线 l 上的无穷远点,其像点 o' 即为消隐点。

由射影几何可知,空间中方向相同的直线有相同的无穷远点,同一平面的多个无穷远点可组成无穷远直线,其像即为消隐线,平面上有且只有一条消隐线^[9];在像平面上取 N 条与标志像内外曲线相交的直线可得到 N 个消隐点,然后用最小二乘法拟合出一条直线方程,即为消隐线。假设 b', c', e', o' 在图像坐标系下的坐标分别为 $(x_{b'}, y_{b'}), (x_{c'}, y_{c'}), (x_{e'}, y_{e'}), (x_{o'}, y_{o'})$,则消隐点坐标可以通过以下公式计算:

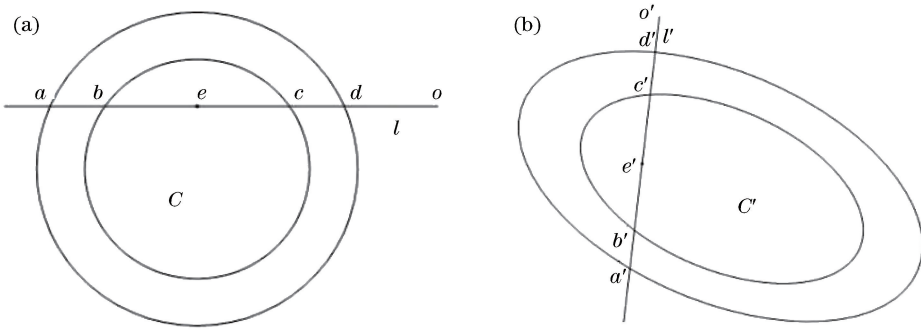


图1 物像关系示意图。(a)空间直线与标志交点;(b)直线像与标志像交点

Fig. 1 Diagrams of relationship between object and image. (a) Intersection points of space straight line and marks; (b) intersection points of straight line image and mark images

$$\begin{cases} x_{o'} = \frac{x_{e'}(x_{b'} + x_{c'}) - 2 \cdot x_{b'} \cdot x_{c'}}{2 \cdot x_{e'} - x_{b'} - x_{c'}} \\ y_{o'} = \frac{y_{e'}(y_{b'} + y_{c'}) - 2 \cdot y_{b'} \cdot y_{c'}}{2 \cdot y_{e'} - y_{b'} - y_{c'}} \end{cases} \quad (4)$$

与标记出圆心的圆形标志相比,本文采用的同心圆标志易于图像处理,只需识别出两条成像后的同心圆曲线即可,无需识别圆心;与圆形标志依赖真实圆心像点和曲线之间的关系得到消隐线不同,本文用每条直线与内外圆4个交点间的交比关系求得 N 个消隐点拟合得到消隐线,解决了真实圆心像点难以求取的问题。

2.3 夹角测量的几何原理

已知一平面上的消隐线为 $l'_\infty = A_\infty u + B_\infty v + C_\infty = 0$,根据消隐点和直线性质,若已知消隐线上任意一点 (u_r, v_r) ,则其他任意消隐点 (u_d, v_d) 可表示为

$$[u_d, v_d, 1] = [u_r, v_r, 1] + k \cdot [B_\infty, -A_\infty, 0], \quad (5)$$

式中: k 为常数变量; B_∞, A_∞ 为消隐线方程里的系数; C_∞ 为常数。

已知两方向不同的直线的消隐点坐标和相机内部参数 \mathbf{K} ,根据相机成像模型可得两直线夹角^[9],由下式表示,假设消隐点坐标分别为 $(u_1, v_1, 1)$ 和 $(u_2, v_2, 1)$,

$$\cos \theta = |s_1| |s_2| \cdot [u_1, v_1, 1] \cdot \mathbf{K}^{-\text{T}} \mathbf{K}^{-1} \cdot [u_2, v_2, 1]^{\text{T}}, \quad (6)$$

式中: θ 为两直线夹角; s_1, s_2 为两直线消隐点的比例因子,参见(1)式; u, v 为消隐点的横、纵坐标; T 表示转置。

当 $\theta = 0^\circ$,即 θ 为同方向直线间的夹角时,可得如下关系,

$$|s_j| |s_j| \cdot [u_j, v_j, 1] \cdot \mathbf{K}^{-\text{T}} \mathbf{K}^{-1} \cdot [u_j, v_j, 1]^{\text{T}} = 1, \quad (j=1, 2), \quad (7)$$

式中: s_j 为比例因子; u_j, v_j 为消隐点的横、纵坐标;

j 表示第几个点。

当 $\theta = 90^\circ$,即 θ 为方向垂直的直线间的夹角时,若存在一条直线 l'_i 与消隐线 l'_∞ 垂直,则这条直线为消隐线所在平面的法线,设 l'_i 方向的消隐点为 (u_l, v_l) ,可得

$$|s_l| |s_d| \cdot [u_l, v_l, 1] \cdot \mathbf{K}^{-\text{T}} \mathbf{K}^{-1} \cdot [u_d, v_d, 1]^{\text{T}} = 0, \quad (8)$$

式中: s_d, s_l 为比例因子。

将(5)式代入(8)式,所得公式对于任意常数变量 k 都成立,则

$$\begin{cases} [u_l, v_l, 1] \cdot \mathbf{K}^{-\text{T}} \mathbf{K}^{-1} \cdot [u_r, v_r, 1]^{\text{T}} = 0 \\ [u_l, v_l, 1] \cdot \mathbf{K}^{-\text{T}} \mathbf{K}^{-1} \cdot [B_\infty, -A_\infty, 0]^{\text{T}} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

由式(9)可解出 (u_l, v_l) ,将结果代入(7)式可得与 (u_l, v_l) 对应的常数 s_l ;同理,解算另一平面法线方向消隐点和对应的常数,再利用(6)式解出两平面法线间的夹角,然后进行取补即为两平面夹角。但根据文献[9]所述,法线消隐点对应常数的符号无法确定,解出的结果可能与真实值互补,因此需根据待测平面的实际情况进行简单判断。

2.4 测量方案及步骤

本文方法无需知道标志的内外圆直径或其比例,仅需标定出相机内部参数即可,整个步骤流程如图2所示。

拍取图像时需事先在待测两平面上分别贴上同心圆标志,无需标记出圆心;用已知内部参数的相机,在保证可拍摄到标志的前提下,任意拍摄一张图像;再对图像进行阈值分割,提取椭圆曲线的像素点,用最小二乘法拟合曲线方程得到参数 A_i, B_i, C_i, D_i, E_i ;然后根据本文方法,取 N 条直线进而拟合出消隐线,结合(5)、(6)、(7)、(8)式解出各平面法线方向的消隐点;再根据(6)式得到角度,结合被测两平面的实际情况简单判断即可得到真实空间平面间的夹角。

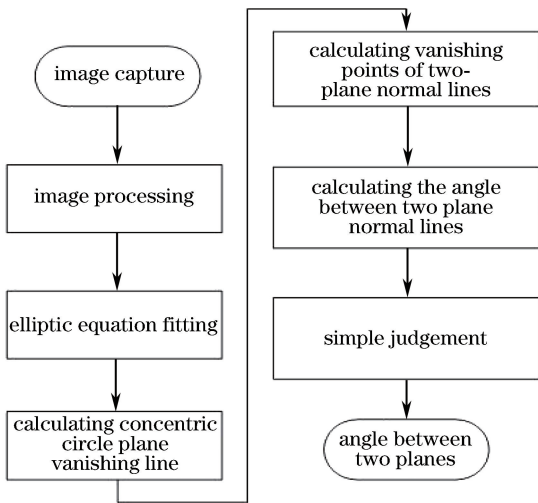


图 2 测量方案流程图

Fig. 2 Flow chart of measurement scheme

本文方法具有稳健性好、图像处理简单的特点，且整个过程多为线性运算，计算过程较为简洁，对拍照位置无特殊要求，灵活性高，因此可以实现在线实时测量。

3 两平面夹角测量方法实验

本文以 MATLAB 为平台进行实验，实验分为仿真实验和真实图像实验。

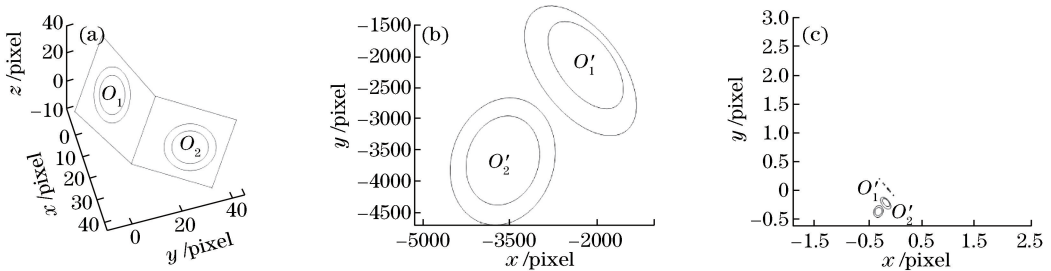


图 3 第一次仿真图。(a)待测物仿真图；(b)待测物上标志对应的像；(c)部分消隐点

Fig. 3 First simulation diagrams. (a) Simulated objects to be measured; (b) images of marks on object to be measured; (c) partial vanishing points

表 1 第一次仿真实验数据

Table 1 Data of first simulation experiment

Normal vector	Radius /pixel	Rotation matrix	Translation matrix	Theoretical value /($^{\circ}$)	Simulation result /($^{\circ}$)
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	10, 7	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -0.996 & 0 & 0.087 \\ -0.087 & 0 & -0.996 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -20 & -20 & 35 \end{bmatrix}$	125.264	54.736

Note: 10 and 7 is the radius of excircle and inner circle, respectively.

在此次仿真中，拟合消隐线过程选取的直线条数 $N=20$ ；经判断，两平面夹角是钝角，因此最终结果为 $180^{\circ}-54.736^{\circ}=125.264^{\circ}$ ，与理论值一致。

第二次设置理论值为锐角，图 4 显示了仿真的

3.1 仿真实验

进行仿真实验时，相机内部参数矩阵 K 依据实际标定出的拍照工具参数设定为

$$K = \begin{bmatrix} 3100.5 & 0 & 2053.1 \\ 0 & 3087.7 & 1550.1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

利用基于法向量空间圆曲线方程生成两组同心圆，通过法向量之间的关系可以得到两组同心圆所在平面的夹角，作为理论值。由于内外圆之间的关系对测量精度有一定的影响^[17]，因此内外半径应保持适当距离。随机生成相机的旋转矩阵 R 和平移矩阵 T ；然后依据针孔成像模型，即(1)式，将空间两组同心圆转换为像平面上的两组椭圆曲线。

准备工作完成后，拟合出 4 条椭圆曲线的方程 $A_i u^2 + B_i v^2 + C_i uv + D_i u + E_i v - 1 = 0, (i = 1, 2, 3, 4)$ ，依据前文所述方法取 N 条直线，结合(4)式，拟合出两组椭圆所对应的平面的消隐线，然后利用(5)、(6)、(7)、(8)式解算出夹角值，并与理论值进行对比。

第一次设置理论值为钝角，图 3 显示了仿真的实际空间同心圆位置与其图像坐标系下对应的曲线位置关系，以及计算出的部分消隐点。

旋转矩阵 R 和平移矩阵 T 等预先设置参数及仿真结果如表 1 所示。

实际空间同心圆位置与其图像坐标系下对应的曲线位置关系，以及计算出的部分消隐点；旋转矩阵 R 和平移矩阵 T 等预先设置参数及仿真结果如表 2 所示。

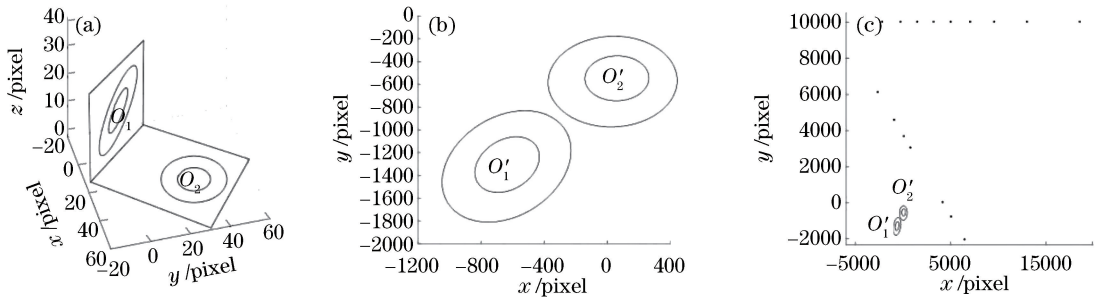


图4 第二次仿真图。(a)待测物仿真图;(b)待测物上标志对应的像;(c)部分消隐点

Fig. 4 First simulation diagrams. (a) Simulated objects to be measured; (b) Images of marks on object to be measured; (c) partial vanishing points

表2 第二次仿真实验数据

Table 2 Data of second simulation experiment

Normal vector	Radius / pixel	Rotation matrix	Translation matrix	Theoretical value / (°)	Simulation result / (°)
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	16, 8	$\begin{bmatrix} 0.075 & -0.996 & -0.044 \\ -0.863 & -0.087 & 0.499 \\ -0.500 & 0 & -0.866 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -80 & -90 & 140 \end{bmatrix}$	70.529	109.471

Note: 10 and 7 is the radius of excircle and inner circle, respectively.

在此次仿真中,拟合消隐线过程选取的直线条数 $N=20$;经判断,两平面夹角是锐角,因此最终结果为 $180^\circ - 109.4712^\circ = 70.5288^\circ$,与理论值一致。仿真实验结果证明了本文方法的可行性。

3.2 真实图像实验

同心圆标志用 A4 纸制作,虽不需要知道内外圆半径值或其比例关系,但根据前文所述,为了保证精度,适当设置外圆半径约为 1 cm,内圆半径约为 0.5 cm。实验过程中将标志粘在待测平面上,如图

5(a)、(b)所示;图 5(c)、(d)为对应图像提取到的同心圆标志的椭圆曲线;拍照工具选择通用摄像工具,其内部参数经过标定作为已知量,使用 MATLAB 标定工具标定得到其内部参数矩阵

$$K = \begin{bmatrix} 3083.4 & 0 & 2075.4 \\ 0 & 3070.3 & 1551.8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

实验共测量了 6 个不同的角度,保证了空间平面夹角的一般性;两平面间的夹角先使用 300 mm

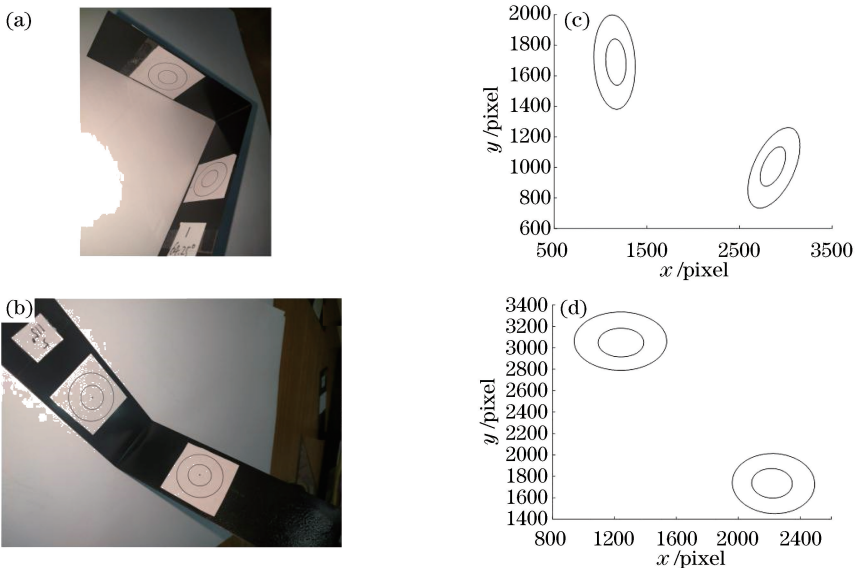


图5 实际拍摄图片。(a)(b)待测平面图像;(c)(d)待测平面上标志的像

Fig. 5 Pictures taken practically. (a)(b) Plane images to be measured; (c)(d) images of marks on plane to be measured

数字式测量投影仪进行测量,此仪器角度测量分辨率为 0.01° ,测量结果可作为角度标准值进行对比。然后使用内部参数已经标定出的通用摄像工具拍照,最后用本文方法计算夹角值,结果如表3所示。

表3 实验结果

Table 3 Experimental results

Number of experiments	Standard value /($^\circ$)	Measured value /($^\circ$)	Absolute error /($^\circ$)	Relative error /%
1	64.25	63.83	0.42	0.658
2	79.45	79.84	0.39	0.488
3	91.45	91.73	0.28	0.305
4	104.05	104.59	0.54	0.516
5	114.90	114.32	0.58	0.507
6	138.70	138.42	0.28	0.202

从实验测量结果可以看出,测量绝对误差小于 1° ,相对误差小于1%,精度满足实际应用需求。本文方法多为线性运算,计算速度快,可满足生产制造等领域中夹角实时测量需求。经过分析,测量过程误差产生的原因主要为:标志所在平面不平整,拍照工具本身畸变和拍照获取图像的质量等,且本文采用的拟合方法也会带来一定的误差。

总的来说,与接触式测量方法(如以三坐标测量机为代表的空间平面测角法,其测量原理是通过测得平面上多个点来拟合平面方程,以此得到平面法线,进而得到两平面间的夹角值,测量精度较高,但由于是接触式测量,对环境 and 操作要求较高)相比,本文方法成本低,操作简便,算法简单,精度可以接受,可用于导轨垂直度检测和机械臂空间精准定位等场合。

4 结 论

采用简单易识别的同心圆作为识别标志,图像处理过程简便。根据射影变换原理,提出基于同心圆标志的空间平面夹角测量方法。无需知道内外圆半径或其比例关系,只需标定出相机内部参数矩阵,对拍照位置无要求,灵活性高。实验结果表明,本文方法简单可行,测量绝对误差小于 1° ,相对误差不超过1%。总体满足生产制造等领域中夹角测量的要求。

本文研究还存在一些不足之处,如拍摄图片中标志曲线缺损,待测面之间的夹角过小,待测夹角表面反光等复杂情况下的测量问题,同心圆标志内外圆半径比例关系对测量结果的影响等。这些问题的研究将在后续工作中展开,以进一步提高本文方法的测量精度,并使其更好地适应复杂的检测条件。

参 考 文 献

- [1] Huang J H, Wang Z, Gao J M, *et al.* Modeling and analysis of phase fluctuation in a high-precision roll angle measurement based on a heterodyne interferometer[J]. *Sensors*, 2016, 16(8): 1214.
- [2] Kim J A, Kim J W, Kang C S, *et al.* Absolute angle measurement using a phase-encoded binary graduated disk[J]. *Measurement*, 2016, 80: 288-293.
- [3] Wang X J, Liu B C. Rotation detection of prosthetic joint surface profile based on projection light knife [J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2018, 55(9): 091205.
王小娟, 刘丙才. 基于投影光刀的关节面轮廓旋转检测[J]. *激光与光电子学进展*, 2018, 55(9): 091205.
- [4] Kandler G, Lukacevic M, Füssl J. An algorithm for the geometric reconstruction of knots within timber boards based on fibre angle measurements [J]. *Construction and Building Materials*, 2016, 124: 945-960.
- [5] Zhang Q, Xia Y W, Wang S, *et al.* A method for measuring degree of square of cigarette packet based on computer vision [J]. *Tobacco Science & Technology*, 2017, 50(11): 87-92.
张勃, 夏营威, 王澍, 等. 基于计算机视觉的卷烟包装方正度测量方法[J]. *烟草科技*, 2017, 50(11): 87-92.
- [6] Yu L F, Pedrini G, Osten W, *et al.* Three-dimensional angle measurement based on propagation vector analysis of digital holography [J]. *Applied Optics*, 2007, 46(17): 3539-3545.
- [7] Hu W C, Qiu Z R, Zhang G X. Algorithm design and realization for large scale space angle measurement based on linear structured light [J]. *Journal of Optoelectronics · Laser*, 2013, 24(2): 329-335.
胡文川, 裘祖荣, 张国雄. 基于线结构光的大尺寸空间角度检测算法设计与实现[J]. *光电子·激光*, 2013, 24(2): 329-335.
- [8] Lü Y Y, Gu Y Y, Gao Z Y, *et al.* Design and experiment of the monocular vision measurement system based on spatial cooperation pose [J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2017, 54(12): 121505.
吕耀宇, 顾营迎, 高瞻宇, 等. 空间协同位姿单目视觉测量系统设计与实验[J]. *激光与光电子学进展*, 2017, 54(12): 121505.
- [9] Lei J F, Wang D H, Yuan Z F. A measurement method of plane angle based on machine vision [J].

- Journal of South China University of Technology (Natural Science Edition), 2011, 39(8): 54-59.
- 雷经发, 王德麾, 袁中凡. 基于机器视觉的平面夹角测量方法[J]. 华南理工大学学报(自然科学版), 2011, 39(8): 54-59.
- [10] Zhao X C, He H, Tang H Y. Computer vision in action with MATLAB [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2018: 173-187.
- 赵小川, 何灏, 唐弘毅. MATLAB 计算机视觉实战[M]. 北京: 清华大学出版社, 2018: 173-187.
- [11] Kwon B K, Teng Z, Roh T J, *et al.* Fast ellipse detection based on three point algorithm with edge angle information [J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2016, 14(3): 804-813.
- [12] Yang M, Da F P. Circular control points detection based on circumscribed rectangle of an ellipse [J]. Acta Optica Sinica, 2018, 38(12): 1215007.
- 杨恣, 达飞鹏. 基于椭圆外切矩形性质的圆形标志点检测[J]. 光学学报, 2018, 38(12): 1215007.
- [13] An J J, Gao N, Chen C, *et al.* Correcting method and evaluation of eccentricity error of circle target [J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2017, 54(4): 041203.
- 安晶晶, 高楠, 陈超, 等. 圆环标识的离心偏差校正方法与评价[J]. 激光与光电子学进展, 2017, 54(4): 041203.
- [14] Chen T F, Zhao J B, Wang Y L, *et al.* Calculation for imaging center of circular array target based projective transform[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2015, 36(4): 895-902.
- 陈天飞, 赵吉宾, 王银灵, 等. 基于射影变换圆阵靶标中心像点的计算[J]. 仪器仪表学报, 2015, 36(4): 895-902.
- [15] Zhang G J. Machine vision [M]. Beijing: Science Press, 2005: 14-27.
- 张广军. 机器视觉[M]. 北京: 科学出版社, 2005: 14-27.
- [16] Li D D, Wen G J, Qiu S H. Cross-ratio-based line scan camera calibration using a planar pattern [J]. Optical Engineering, 2016, 55(1): 014104.
- [17] Chen X Y, Ma Z, Hu Y, *et al.* A new method for accurate location of concentric circles in visual measurement[J]. Journal of Optoelectronics • Laser, 2013, 24(8): 1524-1528.
- 陈新禹, 马孜, 胡英, 等. 视觉测量中圆形标记点的高精度定位[J]. 光电子·激光, 2013, 24(8): 1524-1528.