

基于隐式低秩表示的联合投影学习算法及图像识别

牛强*, 陈秀宏

江南大学数字媒体学院, 江苏 无锡 214122

摘要 隐式低秩表示(LatLRR)作为经典的无监督特征提取算法已应用于模式识别领域。然而该算法得到的特征维数无法降低,且由于算法分别学习 2 个低秩矩阵,因此无法保证整体最优;另外,算法忽略了样本在学习过程中存在的残差。为解决这些问题,提出了一种基于隐式低秩表示的联合投影学习算法。使用投影矩阵和恢复矩阵近似地表示隐式低秩表示中的投影矩阵,使算法在降维的同时可提取判别特征;联合学习投影矩阵、恢复矩阵和低秩矩阵,矩阵间相互提升,从获得的投影中可以提取出更多的判别特征,同时在算法模型中约束样本在投影学习中存在的残差;最后采用交替迭代方法求解该模型。在多个数据集上进行实验,结果说明算法在有效降维的同时能进一步提高判别能力。

关键词 图像处理; 模式识别; 特征提取; 人脸识别; 隐式低秩表示

中图分类号 TP391

文献标识码 A

doi: 10.3788/LOP56.141006

Image Recognition Using Joint Projection Learning Algorithm Based on Latent Low-Rank Representation

Niu Qiang*, Chen Xiuhong

School of Digital Media, Jiangnan University, Wuxi, Jiangsu 214122, China

Abstract The latent low-rank representation (LatLRR) is applied in the field of pattern recognition as a classical unsupervised feature extraction algorithm. However, the dimensions of the features obtained using the algorithm cannot be reduced. Two low-rank matrices are separately learned by the algorithm such that the overall optimality cannot be guaranteed. Furthermore, the algorithm ignores the samples' residuals in the learning process. This study proposes a joint projection learning algorithm based on the LatLRR to address these problems. First, projection and reconstruction matrices are used to approximate the low-rank projection matrix in the LatLRR such that the algorithm can extract discriminative features while reducing the samples' dimensions. Second, the projection, reconstruction, and low-rank matrices are jointly learned by the algorithm such that they can be mutually boosted. The obtained projection can extract more discriminative features. Simultaneously, the samples' residuals in the process of learning are constrained in the algorithm model. Third, the alternating iterative method is used to solve the model. Experiments on multiple datasets show that the algorithm can effectively reduce the samples' dimensions while further improving the discriminative ability.

Key words image processing; pattern recognition; feature extraction; face recognition; latent low-rank representation

OCIS codes 100.5010; 100.3010; 100.3008

1 引言

特征提取在人脸识别、数据挖掘和计算机视觉等领域发挥着重要作用^[1-3]。学者们针对特征提取

提出了许多算法,较为经典的算法有主成分分析(PCA)^[4]和线性判别分析(LDA)^[5]。PCA以重构为目的,将训练样本投影到低维子空间,使投影后样本的方差最大,达到降维的目的。基于Fisher准则

收稿日期: 2018-12-07; 修回日期: 2019-01-16; 录用日期: 2019-02-19

基金项目: 2017年江苏省研究生实践创新计划(SJCX17_0506)

* E-mail: 6161611014@vip.jiangnan.edu.cn

的 LDA 算法寻找一组将高维样本投影到低维空间的最佳鉴别矢量,使所有投影后样本的类内离散度最小而类间离散度最大。上述算法不能很好地揭示数据局部流形的内在几何结构,因此出现了很多基于邻接图的流形学习算法,如邻域保持嵌入法(NPE)^[6]和局部保留投影法(LPP)^[7]。以上算法都可以归入图嵌入框架。

近些年来,基于表示性学习的特征提取算法成为了学者们研究的热点。稀疏表示(SR)^[8]作为一种热门分类方法已经成功地应用到模式识别中,并且能实现较高的识别率,它通过训练样本线性或非线性地表示出测试样本,随后通过误差分析完成分类识别。但是,当训练样本受到破坏或光照等噪声影响时,SR 方法的性能降低。低秩表示(LRR)^[9]因其对含噪声数据的稳健性受到了学者们的广泛关注,其目标是对系数矩阵增加低秩约束而获得数据的重构系数矩阵,因此能捕获数据集的整体结构信息,且其能纠正误差并能将所有样本分配到对应的子空间中。LRR 能稳健地捕获数据整体判别结构。Zhang 等^[10]提出低秩保留嵌入法(LRPE),利用 LRR 构建数据关系图并将捕获的高维数据的整体几何信息和判别结构保持到低维嵌入子空间中。文献^[11]提出低秩稀疏保持投影法(LSPP),保留了数据的几何结构,通过 LRR 学习稳健性的权矩阵,降低了异常值的影响,获得了较好的性能。由于高维数据结构复杂、信息丰富,往往存在隐含的信息,隐含信息的挖掘对其应用有一定作用。Liu 等^[12]提出了一种子空间分割和特征提取的隐式低秩表示方法(LatLRR),其主要目的是使用被观测的数据信息分别从横向和纵向不同方面有效地恢复出主要信息和隐藏的显著信息,通过对破坏数据、噪声数据进行低秩子空间分割,有效地恢复隐含信息,该算法已应用于人脸识别中^[13]。基于隐式低秩表示算法,学者们提出了许多拓展算法。文献^[14]中提出的双低秩表示(DLRR)可同时从行和列两个方向获得信息,解决了 LatLRR 中仅提取显著特征而忽略主成分信息的问题,该算法学习的投影可提取主成分信息,同时保留了数据的全局表示结构,但算法学习得到的特征维度与原样本的维度相同使其无法降维。文献^[15]中提出的增强近似低秩投影学习算法(EALPL),利用恢复矩阵和投影矩阵近似表示 LatLRR 算法中的低秩投影矩阵,在有效降维的同时提取了更多的判别特征。然而,上述算法具有一些不足,使它们并没有获得很好的性能:1) LatLRR

算法中分别独立学习 2 个低秩矩阵,矩阵间不能相互联合学习,使算法的性能受限;2) LatLRR 算法和 DLRR 算法学习得到的特征维度与原始数据的维度相同,即 2 种算法得到的特征维度并不能减少,使算法无法降维;3) LatLRR、DLRR 和 EALPL 算法模型中未充分考虑数据自表示中存在的残差。文献^[16]中提出的算法用 2 个矩阵近似表示低秩矩阵从而得到投影矩阵,不仅可以提取更多的判别特征,还能有效地降维,具有较好的性能,但该算法未考虑数据的整体结构信息。

鉴于此,本文提出一种基于隐式低秩表示的联合投影学习算法。1) 用投影矩阵和恢复矩阵近似表示 LatLRR 中的投影矩阵,克服 LatLRR 算法无法降维的缺点,使算法能选择适应的维数用于提取更有判别性的特征;2) 联合学习低秩矩阵、投影矩阵和恢复矩阵,在学习过程中矩阵间相互提升,使算法获得最优解时能够提取更多的判别特征,同时在算法模型中约束样本在投影学习中存在的残差;3) 模型通过交替迭代方法求解,并在多个数据集上进行实验,验证了新算法的有效性。

2 理论分析

设给定训练样本矩阵 $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^{m \times n}$, m 为样本的维数, n 为训练样本的个数。

2.1 低秩表示

作为子空间聚类方法,LRR 寻找样本集在给定字典上的最低秩表示,即

$$\min_{\mathbf{Z}} \text{rank}(\mathbf{Z}), \text{ s.t. } \mathbf{X} = \mathbf{AZ}, \quad (1)$$

式中: \mathbf{A} 是线性张成样本矩阵 \mathbf{X} 的字典; $\mathbf{Z} = [z_1, z_2, \dots, z_n]$ 为系数矩阵; $\text{rank}(\cdot)$ 为矩阵的秩;s.t. 表示约束条件。(1)式是一个组合优化问题,可松弛为凸优化问题,即

$$\min_{\mathbf{Z}} \|\mathbf{Z}\|_*, \text{ s.t. } \mathbf{X} = \mathbf{AZ}, \quad (2)$$

式中: $\|\mathbf{Z}\|_*$ 为 \mathbf{Z} 的核范数,即 \mathbf{Z} 的奇异值之和。为提取数据的内在结构,在实际应用中通常选择样本矩阵本身作为字典,这产生了数据的自表示特性,反映了所有成对样本之间的关系,这些关系结构表示了整体数据集的结构。此时,(2)式可表示为

$$\min_{\mathbf{Z}} \|\mathbf{Z}\|_*, \text{ s.t. } \mathbf{X} = \mathbf{XZ}. \quad (3)$$

当数据样本中含有噪声或误差时,(3)式的稳健性表示为

$$\min_{\mathbf{Z}} \|\mathbf{Z}\|_* + \lambda \|\mathbf{E}\|_1, \text{ s.t. } \mathbf{X} = \mathbf{XZ} + \mathbf{E}, \quad (4)$$

式中: $\mathbf{E} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 为数据样本中的噪声矩阵; $\|\cdot\|_1$

为矩阵的 L_1 范数。LRR 所学习到的权矩阵 \mathbf{Z} 能捕获样本数据的一些内在几何特性和样本数据的判别结构,并且对应的图还能捕获数据的整体结构。

2.2 隐式低秩表示

在实际应用中,数据绝大多数情况下会受外界因素的影响而被破坏或受到噪声的干扰。Liu 等^[12]在低秩表示的基础上提出 LatLRR 方法,其主要目的是通过对给定的样本矩阵从横向和纵向两个方面有效地恢复出主要信息和隐藏的显著信息,从而对破坏数据和噪声数据进行低秩子空间分割。对含有噪声的样本数据,其隐式低秩表示的优化模型可表示为

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{Z}} \quad & \|\mathbf{Z}\|_* + \|\mathbf{L}\|_* + \lambda \|\mathbf{E}\|_1, \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{X} = \mathbf{XZ} + \mathbf{LX} + \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (5)$$

式中: $\mathbf{L} \in \mathbf{R}^{m \times m}$ 表示投影矩阵。文献[12]中的实验结果表明:由 \mathbf{XZ} 表示的特征类似于 PCA 的主成分特征,而 \mathbf{LX} 表示的特征是显著特征,例如人脸中的眼睛、鼻子等特征。但是,LatLRR 从行和列两个视图所使用的两个低秩矩阵之间没有关联性,且忽略了样本在自表示和特征提取过程中对残差的约束,从而导致学习得到的投影矩阵不是最优的。特征提取的主要目的是提取出更具有判别性的特征,然而(5)式中 \mathbf{LX} 学习到的特征维数与 \mathbf{X} 相同,算法并没有实现降维,且提取的特征不能保持全局结构和数据的主要能量。

2.3 基于隐式低秩表示的联合投影学习

LatLRR 算法没有实现对数据样本的降维,为此本文通过联合使用恢复矩阵 \mathbf{P} 和投影矩阵 \mathbf{Q} 来取代 LatLRR 中的单个低秩投影矩阵 \mathbf{L} ,使得样本在自表示和特征提取过程中的残差达到最小,建立以下基于隐式低秩表示的投影学习(LatLRR-PL)优化模型:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{Z}, \mathbf{E}} \quad & \frac{1}{2} \|\mathbf{X} - \mathbf{XZ} - \mathbf{PQ}^T \mathbf{X}\|_{\text{F}}^2 + \\ & \frac{1}{2} \alpha \|\mathbf{Q}\|_{\text{F}}^2 + \beta \|\mathbf{E}\|_1 + \omega \|\mathbf{Z}\|_*, \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{X} = \mathbf{XZ} + \mathbf{PQ}^T \mathbf{X} + \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (6)$$

式中: $\mathbf{Q} \in \mathbf{R}^{m \times d}$ 表示投影矩阵; $\mathbf{P} \in \mathbf{R}^{m \times d}$ 表示重构矩阵; $d (d < m)$ 是降维后特征的维数; $\|\cdot\|_{\text{F}}$ 为矩阵的 Frobenius 范数。(6)式中:目标函数的第 1 项为样本与自表示和重构之间的残差,用来同时学习最优投影矩阵 \mathbf{Q} 和重构矩阵 \mathbf{P} ,线性变换 $\mathbf{Q}^T \mathbf{X}$ 用于提取特征,使得到的特征的维数较小,其维数 d 是可变的;第 2 项用来增强算法的稳定性并提高其泛化

能力;第 3 项用来保证噪声矩阵是稀疏的;第 4 项保证学习到的系数权矩阵是低秩的,可使数据的整体结构得到很好的保留;参数 α 、 β 和 ω 是分别用于平衡各项的正则化参数。由于 $\text{rank}(\mathbf{P}) \leq d < m$, $\text{rank}(\mathbf{Q}) \leq d < m$,所以 $\text{rank}(\mathbf{PQ}^T) \leq d$,表明 \mathbf{PQ}^T 为低秩矩阵。为了避免(6)式出现平凡解,增加矩阵 \mathbf{P} 的正交约束得

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{Z}, \mathbf{E}} \quad & \frac{1}{2} \|\mathbf{X} - \mathbf{XZ} - \mathbf{PQ}^T \mathbf{X}\|_{\text{F}}^2 + \\ & \frac{1}{2} \alpha \|\mathbf{Q}\|_{\text{F}}^2 + \beta \|\mathbf{E}\|_1 + \omega \|\mathbf{Z}\|_*, \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{X} = \mathbf{XZ} + \mathbf{PQ}^T \mathbf{X} + \mathbf{E}, \mathbf{P}^T \mathbf{P} = \mathbf{I}, \end{aligned} \quad (7)$$

式中: \mathbf{I} 为单位矩阵。

模型(7)式分别用 \mathbf{XZ} 和 $\mathbf{PQ}^T \mathbf{X}$ 恢复数据的列和行空间信息。然而,在模型的学习过程中 \mathbf{P} 、 \mathbf{Q} 和 \mathbf{Z} 没有进行联合学习,因此它们不能相互提升各自的作用。为了准确地恢复样本矩阵的列空间和行空间信息,可使用 $\mathbf{PQ}^T \mathbf{XZ}$ 对 \mathbf{P} 、 \mathbf{Q} 和 \mathbf{Z} 进行联合学习,得到以下基于隐式低秩表示的联合投影学习(LatLRR-JPL)优化模型,通过联合学习同时恢复样本数据的列和行空间信息:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{Z}, \mathbf{E}} \quad & \frac{1}{2} \|\mathbf{X} - \mathbf{PQ}^T \mathbf{XZ}\|_{\text{F}}^2 + \\ & \frac{1}{2} \alpha \|\mathbf{Q}\|_{\text{F}}^2 + \beta \|\mathbf{E}\|_1 + \omega \|\mathbf{Z}\|_*, \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{X} = \mathbf{PQ}^T \mathbf{XZ} + \mathbf{E}, \mathbf{P}^T \mathbf{P} = \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (8)$$

模型(8)式为由(7)式改进的 LatLRR-PL 模型,可使用自适应惩罚的交替法来求解,与(7)式的求解方法类似。

首先,在模型(8)式中引入辅助变量 \mathbf{H} 使得目标函数可分,可得到

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{Z}, \mathbf{E}, \mathbf{H}} \quad & \frac{1}{2} \|\mathbf{X} - \mathbf{PQ}^T \mathbf{XZ}\|_{\text{F}}^2 + \\ & \frac{1}{2} \alpha \|\mathbf{Q}\|_{\text{F}}^2 + \beta \|\mathbf{E}\|_1 + \omega \|\mathbf{H}\|_*, \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{X} = \mathbf{PQ}^T \mathbf{XZ} + \mathbf{E}, \mathbf{P}^T \mathbf{P} = \mathbf{I}, \mathbf{Z} = \mathbf{H}, \end{aligned} \quad (9)$$

其增广 Lagrange 函数定义为

$$\begin{aligned} L(\mathbf{P}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2) = \\ \frac{1}{2} \|\mathbf{X} - \mathbf{PQ}^T \mathbf{XZ}\|_{\text{F}}^2 + \frac{1}{2} \alpha \|\mathbf{Q}\|_{\text{F}}^2 + \beta \|\mathbf{E}\|_1 + \\ \omega \|\mathbf{H}\|_* + \text{tr}[\mathbf{C}_1^T (\mathbf{X} - \mathbf{PQ}^T \mathbf{XZ} - \mathbf{E})] + \\ \text{tr}[\mathbf{C}_2^T (\mathbf{Z} - \mathbf{H})] + \\ \frac{\mu}{2} (\|\mathbf{X} - \mathbf{PQ}^T \mathbf{XZ} - \mathbf{E}\|_{\text{F}}^2 + \|\mathbf{Z} - \mathbf{H}\|_{\text{F}}^2) = \\ \frac{1}{2} \|\mathbf{X} - \mathbf{PQ}^T \mathbf{XZ}\|_{\text{F}}^2 + \frac{1}{2} \alpha \|\mathbf{Q}\|_{\text{F}}^2 + \beta \|\mathbf{E}\|_1 + \end{aligned}$$

$$\omega \| \mathbf{H} \|_* + \frac{\mu}{2} \left(\| \mathbf{X} - \mathbf{P}\mathbf{Q}^T \mathbf{X}\mathbf{Z} - \mathbf{E} + \frac{1}{\mu} \mathbf{C}_1 \|_{\mathbb{F}}^2 + \| \mathbf{Z} - \mathbf{H} + \frac{1}{\mu} \mathbf{C}_2 \|_{\mathbb{F}}^2 \right) - \frac{1}{2\mu} (\| \mathbf{C}_1 \|_{\mathbb{F}}^2 + \| \mathbf{C}_2 \|_{\mathbb{F}}^2), \quad (10)$$

式中: \mathbf{C}_1 和 \mathbf{C}_2 是 Langrange 乘子矩阵; $\mu > 0$ 为惩罚参数; α, β, ω 为正则化参数。采用交替法求解(8)式过程如下。

当 $\mathbf{Q}, \mathbf{Z}, \mathbf{H}, \mathbf{E}$ 固定时求 \mathbf{P} , 模型(8)式可转化为以下优化问题:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{P}} \quad & \frac{1}{2} \| \mathbf{X} - \mathbf{P}\mathbf{Q}^T \mathbf{X}\mathbf{Z} \|_{\mathbb{F}}^2 + \\ & \frac{\mu}{2} \| \mathbf{X} - \mathbf{P}\mathbf{Q}^T \mathbf{X}\mathbf{Z} - \mathbf{E} + \frac{1}{\mu} \mathbf{C}_1 \|_{\mathbb{F}}^2, \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{P}^T \mathbf{P} = \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (11)$$

利用 Lagrange 乘子法得

$$\begin{aligned} \mathbf{P} = & (\mu \mathbf{T}_1 \mathbf{Z}^T \mathbf{X}^T \mathbf{Q} + \mathbf{X}\mathbf{Z}^T \mathbf{X}^T \mathbf{Q}) \cdot \\ & [(\mu + 1)(\mathbf{Q}^T \mathbf{X}\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T \mathbf{X}^T \mathbf{Q}) - 2\lambda \mathbf{I}]^{-1}, \end{aligned} \quad (12)$$

式中: 中间矩阵 $\mathbf{T}_1 = \mathbf{X} - \mathbf{E} + \frac{1}{\mu} \mathbf{C}_1$; $\lambda > 0$ 为 Lagrange 乘子。

当 $\mathbf{P}, \mathbf{Z}, \mathbf{H}, \mathbf{E}$ 固定时求 \mathbf{Q} , 此时(8)式转化为

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{Q}} \quad & \frac{1}{2} \| \mathbf{X} - \mathbf{P}\mathbf{Q}^T \mathbf{X}\mathbf{Z} \|_{\mathbb{F}}^2 + \\ & \frac{1}{2} \alpha \| \mathbf{Q} \|_{\mathbb{F}}^2 + \frac{\mu}{2} \| \mathbf{T}_1 - \mathbf{P}\mathbf{Q}^T \mathbf{X}\mathbf{Z} \|_{\mathbb{F}}^2. \end{aligned} \quad (13)$$

目标函数关于 \mathbf{Q} 求偏导并令其等于 0 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} = & [(\mu + 1)(\mathbf{X}\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T \mathbf{X}^T) + \alpha \mathbf{I}]^{-1} \cdot \\ & (\mu \mathbf{X}\mathbf{Z}\mathbf{T}_1^T \mathbf{P} + \mathbf{X}\mathbf{Z}\mathbf{X}^T \mathbf{P}). \end{aligned} \quad (14)$$

当 $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{H}, \mathbf{E}$ 固定时求 \mathbf{Z} , 求(8)式可得

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{Z}} \quad & \frac{1}{2} \| \mathbf{X} - \mathbf{P}\mathbf{Q}^T \mathbf{X}\mathbf{Z} \|_{\mathbb{F}}^2 + \\ & \frac{\mu}{2} (\| \mathbf{T}_1 - \mathbf{P}\mathbf{Q}^T \mathbf{X}\mathbf{Z} \|_{\mathbb{F}}^2 + \| \mathbf{Z} + \mathbf{T}_2 \|_{\mathbb{F}}^2), \end{aligned} \quad (15)$$

式中: 中间矩阵 $\mathbf{T}_2 = \frac{1}{\mu} \mathbf{C}_2 - \mathbf{H}$ 。目标函数关于 \mathbf{Z} 求偏导并令其等于 0 得

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} = & [(\mu + 1)(\mathbf{X}^T \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T \mathbf{X}) + \mu \mathbf{I}]^{-1} \cdot \\ & (\mathbf{X}^T \mathbf{Q}\mathbf{P}^T \mathbf{X} + \mu \mathbf{X}^T \mathbf{Q}\mathbf{P}^T \mathbf{T}_1 - \mu \mathbf{T}_2). \end{aligned} \quad (16)$$

当 $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{H}, \mathbf{E}$ 固定时求 \mathbf{H} , 此时(8)式转化为

$$\min_{\mathbf{H}} \omega \| \mathbf{H} \|_* + \frac{\mu}{2} \| \mathbf{Z} - \mathbf{H} + \frac{1}{\mu} \mathbf{C}_2 \|_{\mathbb{F}}^2. \quad (17)$$

该问题可通过奇异值阈值(SVT)算子^[17]来求

解。对矩阵 $\mathbf{Z} + \frac{1}{\mu} \mathbf{C}_2$ 奇异值分解可得

$$\mathbf{Z} + \frac{1}{\mu} \mathbf{C}_2 = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T, \quad (18)$$

式中: \mathbf{U} 和 \mathbf{V} 均为列正交的矩阵; $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$; $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ 是奇异值且均为正数, 则(17)式的解为

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = & \mathbf{U} \text{diag}[\max(\sigma_1 - \omega/\mu, 0), \max(\sigma_2 - \omega/\mu, 0), \\ & \dots, \max(\sigma_r - \omega/\mu, 0)] \mathbf{V}^T. \end{aligned} \quad (19)$$

当 $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{Z}, \mathbf{H}$ 固定时求 \mathbf{E} , 由(9)式可得

$$\min_{\mathbf{E}} \beta \| \mathbf{E} \|_1 + \frac{\mu}{2} \| \mathbf{T}_1 - \mathbf{E} \|_{\mathbb{F}}^2. \quad (20)$$

由文献[18]可知

$$\mathbf{E} = \text{shrink}_{\frac{\beta}{\mu}}(\mathbf{T}_1), \quad (21)$$

式中: $\text{shrink}_{\frac{\beta}{\mu}}(\mathbf{T}_1)$ 是软阈值收缩算子, 它对矩阵逐元素进行操作, 其定义为

$$\text{shrink}_{\frac{\beta}{\mu}}(\mathbf{T}_1) = \begin{cases} T_{i,j} - \frac{\beta}{\mu}, & T_{i,j} - \frac{\beta}{\mu} > 0 \\ T_{i,j} + \frac{\beta}{\mu}, & T_{i,j} + \frac{\beta}{\mu} < 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (22)$$

式中: $T_{i,j}$ 为矩阵 \mathbf{T}_1 中的元素; i 为矩阵 \mathbf{T}_1 的行数; j 为矩阵 \mathbf{T}_1 的列数。

最后, 关于(10)式的 Langrange 乘子矩阵 \mathbf{C}_1 、 \mathbf{C}_2 和惩罚参数 μ 的迭代规则为

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_1 + \mu(\mathbf{X} - \mathbf{P}\mathbf{Q}^T \mathbf{X}\mathbf{Z} - \mathbf{E}), \quad (23)$$

$$\mathbf{C}_2 = \mathbf{C}_2 + \mu(\mathbf{Z} - \mathbf{H}), \quad (24)$$

$$\mu = \min(\rho\mu, \mu_{\max}), \quad (25)$$

式中: ρ 和 μ_{\max} 都为常数。本文实验中首先通过 PCA 初始化正交矩阵 \mathbf{P} 以便提高算法速度, 实验计算最近 2 次迭代中, 若 2 个目标函数值的差值的绝对值小于 0.001, 则判定为收敛, 结束迭代。综上所述, 得到本文 LatLRR-JPL 算法, 步骤如下。

输入: 样本集 \mathbf{X} , 维数 d , 参数 a, b 和 ω ;

输出: 投影矩阵 \mathbf{Q} 。

1) 通过 PCA 初始化正交矩阵 \mathbf{P} , 初始化 $\mathbf{H} = \mathbf{0}, \mathbf{Q} = \mathbf{0}, \mathbf{E} = \mathbf{0}, \mathbf{Z} = \mathbf{0}, \mathbf{C}_1 = \mathbf{0}, \mathbf{C}_2 = \mathbf{0}, \mu = 0.1, \rho = 1.01, \mu(\max) = 10^5$;

2) 固定 $\mathbf{Q}, \mathbf{Z}, \mathbf{H}, \mathbf{E}$, 通过(12)式更新矩阵 \mathbf{P} ;

3) 固定 $\mathbf{P}, \mathbf{Z}, \mathbf{H}, \mathbf{E}$, 通过(14)式更新矩阵 \mathbf{Q} ;

4) 固定 $\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \mathbf{H}, \mathbf{E}$, 通过(16)式更新矩阵 \mathbf{Z} ;

5) 固定 $\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \mathbf{Z}, \mathbf{E}$, 通过(19)式更新矩阵 \mathbf{H} ;

6) 固定 $\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \mathbf{Z}, \mathbf{H}$, 通过(21)式更新矩阵 \mathbf{E} ;

7) 通过(23), (24), (25)式分别更新矩阵 \mathbf{C}_1 , \mathbf{C}_2 和 μ ;

8) 重复步骤 2)~7), 循环更新矩阵和惩罚参数, 直至(8)式目标函数收敛结束, 输出投影矩阵 Q 。

本文算法的流程如图 1 所示。在进行图像识别时, 将训练样本作为数据集 X , 根据上述步骤求出投

影矩阵 Q , 并对测试样本进行降维。对于每一个投影子空间上的测试样本点, 选择该点与训练样本的低维映射数据集距离最小的点标签作为类别标签, 直到完成所有测试样本的分类。

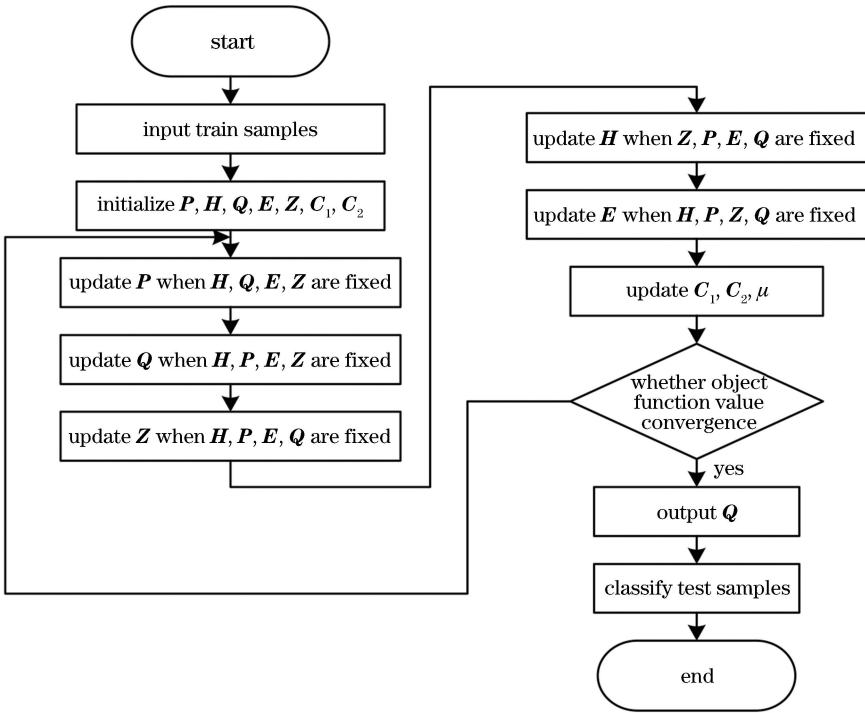


图 1 算法流程图

Fig. 1 Flow chart of algorithm

2.4 时间复杂度分析

本文 LatLRR-JPL 算法的耗时部分主要集中于计算矩阵 H 时的 SVD 操作以及计算矩阵 P 、 Q 和 Z 时的矩阵乘法和求逆操作。在上述算法过程中, 计算矩阵 H 的时间复杂度为 $O(n^3)$, 计算矩阵 Q 和 Z 的时间复杂度均为 $O(m^3)$, 计算矩阵 P 的时间复杂度为 $O(d^3)$, 所以 LatLRR-JPL 算法的时间复杂度为 $O[T(d^3 + 2m^3 + n^3)]$, 其中: T 为迭代的次数。由文献[12]可知 LatLRR 的时间复杂度为 $O(n^3 + m^3)$ 。当 $d \ll m$ 时, 本文算法的时间复杂度与 LatLRR 的时间复杂度接近。

3 实验结果与分析

为了验证本文算法的有效性, 分别在 BioID、COIL20 和 AR^[19] 数据集上进行了仿真实验, 将结果与 LPP^[7]、LatLRR^[12]、EALPL^[15] 和 LRLE (low rank linear embedding)^[16] 进行比较, 实验中在 3 个数据集上的维数 d 的值分别取 200、180 和 200, 设置参数 $\mu = 0.1$, $\rho = 1.01$ 和 $\mu_{\max} = 10^5$ 。实验首先将图像压缩成 32 pixel \times 32 pixel 大小的灰度图, 并

将其每列相连构成大小为 1024 维的向量, 并作归一化处理。所有实验均独立随机进行 20 次, 采用以欧氏距离作为度量的最近邻分类器, 计算人脸的平均识别率。本文实验运行环境为 Windows 7, Inter Xeon 3.3 GHz CPU, 内存为 8G, 编程环境为 MATLAB 2014b, 以识别率作为主要的性能评价标准。

3.1 数据集

1) BioID (<https://www.bioid.com/facedb/>) 人脸数据被广泛应用于人脸识别的研究中。其包含了 1521 幅灰度图像, 每一幅图像来自于 23 个不同的测试人员的正面角度的人脸, 这些图片的光照条件、背景以及其中的人脸大小均有很大差异。实验使用了其中 22 个人的图像, 每人 25 张, 共 550 张, 分别选取每人的 10、13、17、21 和 23 幅图像作为训练样本, 剩余图像作为测试样本。

2) COIL20 (<http://www.cs.columbia.edu/CAVE/software/softlib/coil-20.php>) 数据集包含 20 个对象的 1440 幅图像, 每个对象有 72 幅不同姿态的图像, 实验从每个对象中分别取 10、15、20、25

和 30 个样本作为训练样本,其余的作为测试样本。

3) AR 人脸库采集了 126 人的 4000 多幅人脸图像。这些图像分两次采集(间隔两周以上),包含了不同表情、不同光照和不同遮挡等条件下的正面

人脸图像。实验使用了其中 120 人的图像,每人 26 张,共 3120 张图像,每人分别选取 5、8、11、14 和 17 幅图像作为训练样本,其余的作为测试样本。

3 种数据集的示例图像如图 2 所述。

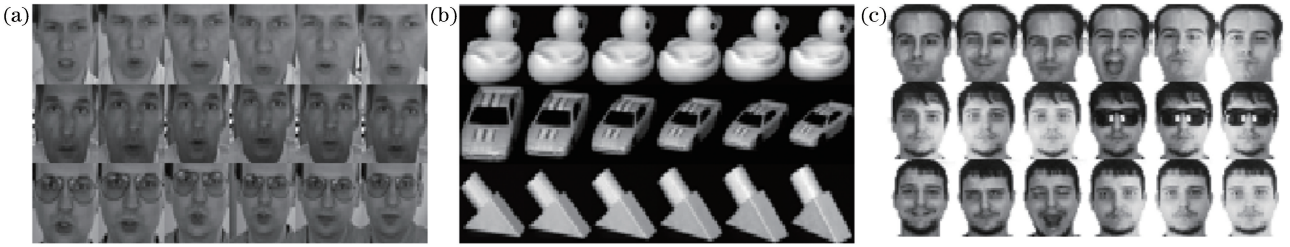


图 2 数据集的示例图像。(a) BioID 人脸库;(b) COIL20 数据集;(c) AR 人脸库

Fig. 2 Sample images of datasets. (a) BioID face database; (b) COIL20 dataset; (c) AR face database

3.2 算法的收敛性实验及其正则化参数对实验的影响

为了研究正则化参数 α 、 β 和 ω 对算法识别率的影响,分别在 3 个数据集上进行实验。其中:在 BioID 人脸库上每人选取 13 幅图像作为训练样本;在 COIL20 图像数据集上每人选择 15 幅图像作为训练样本;在 AR 人脸库上每人选择 11 幅图像作为训练样本,其余图像作为测试样本。实验得到的迭代次数和目标函数值的关系如图 3 所示,横坐标表示迭代次数,纵坐标表示目标函数的值。为了便于比较,均对目标函数的值进行归一化处理。

由图 3 可知,随着迭代次数的增加,本文算法的目标函数值经过几次波动后快速下降并达到稳定,尽管 LatLRR-JPL 目标函数值波动较大,但最终在图中皆趋于平稳,不再有明显的变化。为分析 LatLRR-JPL 算法中正则化参数对实验的影响,因 β 控制着噪声的稀疏程度,实验中取值区间为 $[0.001, 0.0001]$,正则化参数 α 和 ω 的取值区间为 $[0.0001, 1000]$,图 4 所示为实验在 BioID 和 AR 人脸库上得到的平均识别率与两个参数的关系。

由图 4 可知,算法 α 取值区间为 $[0.001, 1]$, ω 取值区间为 $[0.01, 1]$ 时算法达到最佳效果,之后

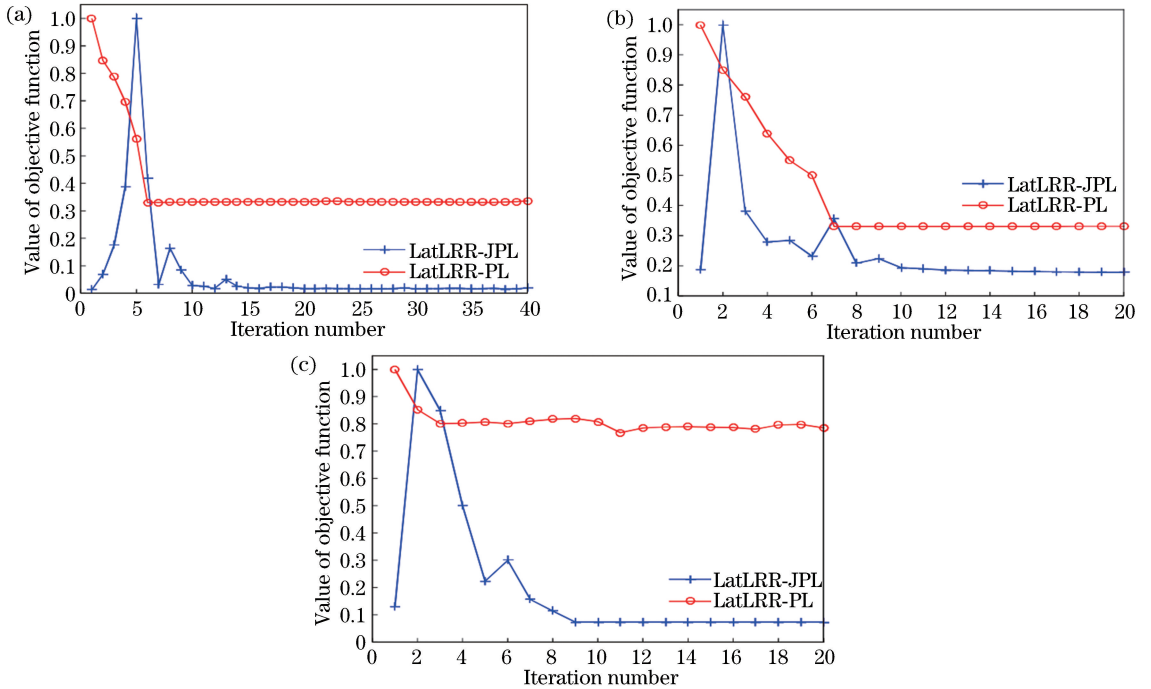


图 3 迭代次数和目标函数值的关系图。(a) BioID 人脸库;(b) COIL20 数据集;(c) AR 人脸库

Fig. 3 Iteration number versus value of objective function. (a) BioID face database; (b) COIL20 dataset; (c) AR face database

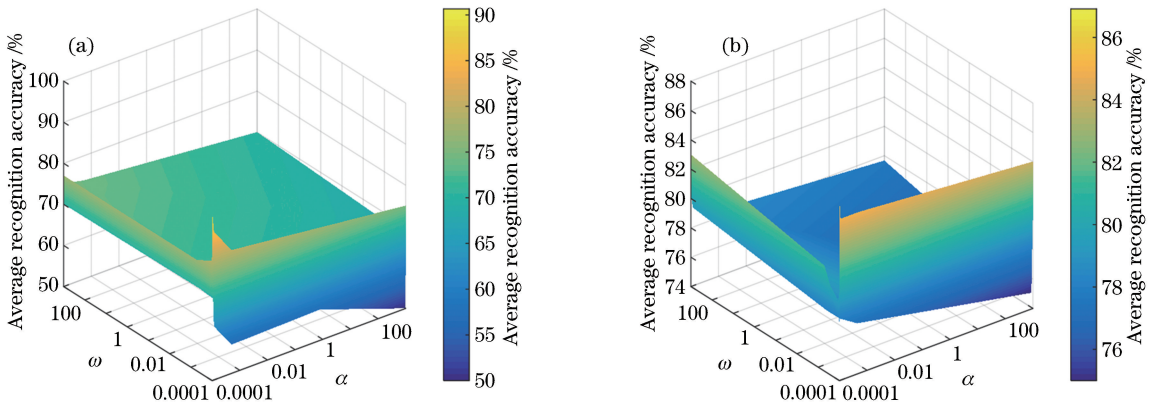


图 4 平均识别率与正则化参数的关系图。(a) BioID 人脸库; (b) AR 人脸库

Fig. 4 Average recognition rate as a function of regularization parameters. (a) BioID face database; (b) AR face database

随着两个参数的增加,识别率呈现不同程度的下降。如何选择算法的最优参数依然是一个待解决的问题。本文实验为了获得最佳效果,在数据集上设置 α 取值区间为 $[0.001, 1]$, ω 取值区间为 $[0.01, 1]$ 。

3.3 识别性能分析

3.3.1 重构图像分析

为验证本文算法的有效性,对图像进行重构实验。图 5、图 6 分别表示 BioID 和 AR 人脸库上原图与 LatLRR-JPL 算法的重构图像对比。

由图 5(b) 和图 6(b) 重构图像可知, LatLRR-JPL 算法能够较好地重构原图像,说明该算法使得

投影矩阵和恢复矩阵在整体学习过程中可以相互提升,获得更多的判别特征,同时约束了数据整体学习中存在的残差,通过选择相应的维数可用于降维,提取了有用的特征。

本文基于 LatLRR 算法提出的 LatLRR-JPL 算法通过对样本数据隐含信息的挖掘,从行和列两个方向同时恢复隐含信息,该算法对含噪声数据或含腐蚀数据具有较好的稳健性,从上述实验可知, LatLRR-JPL 算法能够较好地重构原图像。在针对有遮挡或者有光照影响等含噪声图像的实际应用中,本文算法具有较好的识别性能。

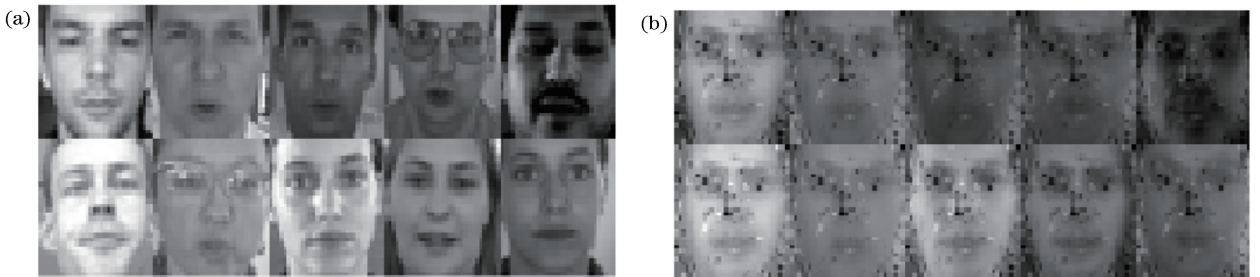


图 5 BioID 人脸库的重构图像对比。(a) BioID 人脸库图像; (b) LatLRR-JPL 算法重构图像

Fig. 5 Comparison of reconstructed images based on the BioID face database. (a) Images from BioID face database; (b) reconstructed images by LatLRR-JPL algorithm

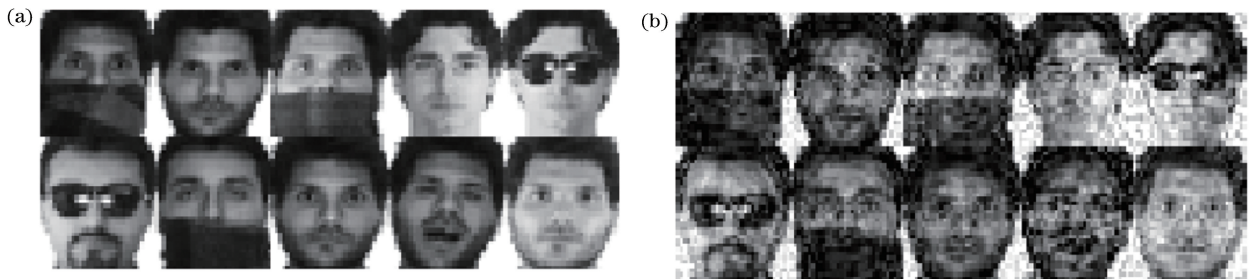


图 6 AR 人脸库的重构图像对比。(a) AR 人脸库图像; (b) LatLRR-JPL 算法重构图像

Fig. 6 Comparison of reconstructed images based on the AR face database. (a) Images from AR face database; (b) reconstructed images by LatLRR-JPL algorithm

3.3.2 特征维数对实验的影响

在 BioID 人脸库上每人随机选取 17 幅图像进行训练,在 COIL20 数据集上每个对象随机选择 15 幅图像进行训练,在 AR 人脸库上每人随机选取 11 幅图像进行训练,其余的图像作为测试样本。图 7 给出了 5 种方法在不同数据集上提取的特征向量维数与平均识别率的关系。

由图 7 可知,LatLRR-JPL 算法在 3 个数据集上在最高维时识别性能最优。LatLRR-JPL 算法在 BioID 和 COIL20 数据集上低维时识别率较低,

随着特征维数的增加,算法的识别率都高于其他算法,这是因为算法将投影矩阵、恢复矩阵和低秩矩阵进行联合学习,使得它们在学习过程中可以相互提升,以便提取更多的判别特征,同时算法中通过约束最小化图像在投影和恢复过程中存在的残差,使得算法能获得最优投影矩阵和恢复矩阵,从而提高了识别性能。尽管 LatLRR 算法能够提取有效特征,但其提取特征的维数与原样本的维数相同,算法无法降维,故在图 7 中并未展示其在低维时的识别结果。

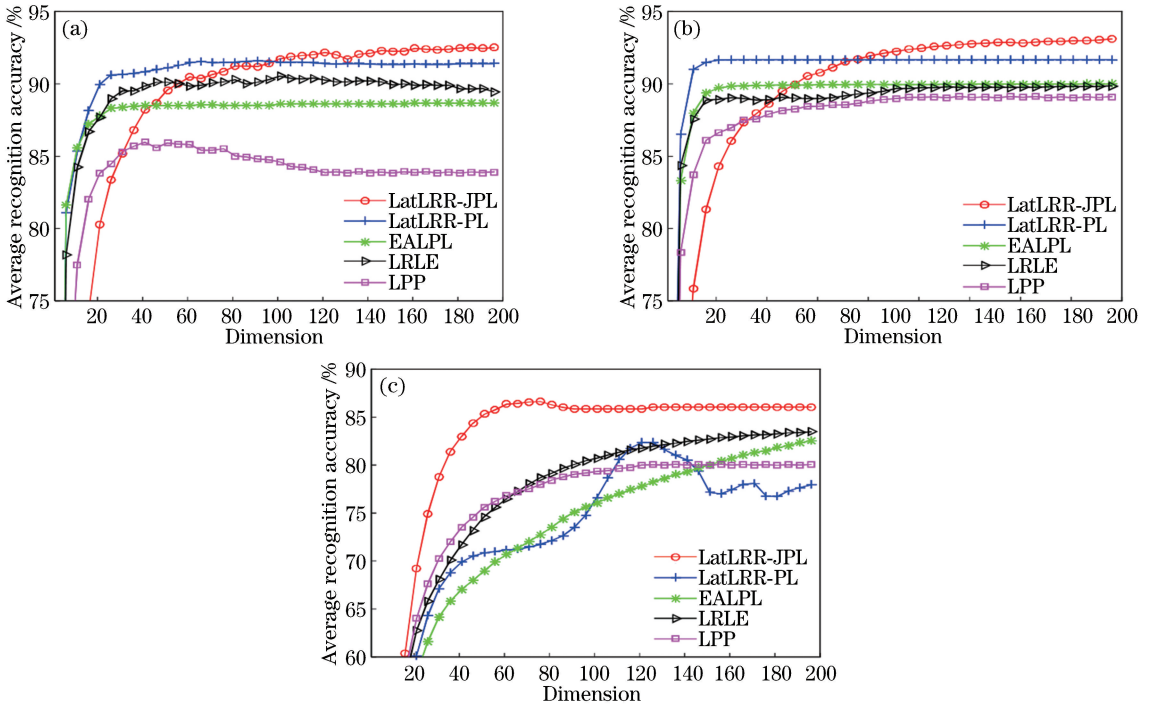


图 7 平均识别率与特征维数的关系图。(a) BioID 人脸库;(b) COIL20 数据集;(c) AR 人脸库

Fig. 7 Average recognition rate as a function of the number of feature dimensions. (a) BioID face database; (b) COIL20 dataset; (c) AR face database

3.3.3 样本数对实验的影响

在 BioID 人脸库上每人随机选取 10、13、17、21 和 23 幅图像进行训练,在 COIL20 数据集上每人随机选择 10、15、20、25 和 30 幅图像进行训练,在 AR

人脸库上每人随机选取 5、8、11、14 和 17 幅图像进行训练,其余的图像作为测试样本。表 1~3 列出了算法取得的最佳平均识别率和标准差,表 4 列出了各算法在数据集上所用时间。

表 1 BioID 人脸库上各算法的平均识别率和标准差

Table 1 Average recognition rates and standard deviations of different algorithms on BioID face database %

| Number of samples | LatLRR-JPL | LatLRR-PL | EALPL | LRLE | LatLRR | LPP |
|-------------------|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 10 | 85.21±1.8 | 83.65±1.4 | 80.16±1.9 | 83.03±2.1 | 78.09±1.5 | 73.50±2.5 |
| 13 | 90.65±1.6 | 88.54±1.7 | 84.43±2.2 | 86.80±2.0 | 82.80±2.0 | 80.68±1.9 |
| 17 | 92.50±1.8 | 91.61±1.4 | 88.66±1.7 | 90.56±1.8 | 86.22±2.0 | 86.22±2.3 |
| 21 | 93.29±3.3 | 92.40±3.9 | 89.31±3.2 | 90.75±3.1 | 87.61±3.4 | 89.77±4.2 |
| 23 | 95.53±2.8 | 94.38±3.2 | 91.25±3.4 | 94.77±3.0 | 89.43±4.6 | 92.50±3.3 |

表2 COIL20数据集上各算法的平均识别率和标准差

Table 2 Average recognition rates and standard deviations of different algorithms on COIL20 dataset

%

| Number of samples | LatLRR-JPL | LatLRR-PL | EALPL | LRLE | LatLRR | LPP |
|-------------------|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 10 | 89.37±1.6 | 87.73±1.5 | 85.34±1.6 | 86.09±1.5 | 82.20±1.4 | 83.86±1.8 |
| 15 | 93.25±1.0 | 91.67±1.1 | 89.99±1.1 | 89.89±1.0 | 86.69±1.2 | 89.13±0.6 |
| 20 | 95.27±0.7 | 94.10±0.5 | 92.37±0.9 | 92.01±0.6 | 88.81±0.9 | 91.68±0.2 |
| 25 | 96.36±1.0 | 96.87±0.9 | 94.14±1.2 | 93.55±0.9 | 90.05±1.2 | 92.03±0.7 |
| 30 | 97.65±0.7 | 97.98±0.6 | 95.49±0.9 | 95.02±0.7 | 91.33±0.9 | 93.12±0.8 |

表3 AR人脸库上各算法的平均识别率和标准差

Table 3 Average recognition rates and standard deviations of different algorithms on AR face database

%

| Number of samples | LatLRR-JPL | LatLRR-PL | EALPL | LRLE | LatLRR | LPP |
|-------------------|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 5 | 78.16±1.6 | 63.12±2.3 | 65.48±1.3 | 64.16±1.3 | 46.66±1.1 | 64.75±0.7 |
| 8 | 80.39±1.6 | 66.65±0.9 | 76.09±0.8 | 75.37±0.8 | 56.06±0.8 | 76.89±1.0 |
| 11 | 86.65±1.6 | 82.51±1.4 | 82.74±1.1 | 83.53±1.1 | 62.69±0.8 | 80.07±1.5 |
| 14 | 90.11±1.5 | 87.91±1.9 | 87.44±0.6 | 88.94±0.7 | 67.95±1.2 | 86.76±1.1 |
| 17 | 96.51±0.5 | 90.48±1.7 | 93.28±1.4 | 92.53±0.8 | 71.77±1.4 | 91.83±1.5 |

如表1~3所示,在COIL20数据集上当训练样本为25和30时,LatLRR-PL算法的识别率最高,同时可知LatLRR-JPL算法的识别率整体上较高且相对稳定。LatLRR-JPL算法比LatLRR-PL算法的识别率高,这是因为其将投影矩阵、恢复矩阵和低秩矩阵进行联合学习,使其在学习过程中可以相互提升,提取了更多的判别特征,而LatLRR-PL中的各个矩阵均独立学习,无法达到整体最优。EALPL算法的识别率比LatLRR-JPL低是因为其未考虑算法在投影和恢复过程中存在的残差,约束残差最小化可使得算法获得最优的投影矩阵和恢复矩阵,更利于后续的分类与识别。LatLRR-JPL算法的识别率比LRLE、LatLRR和LPP高,这是因为LRLE

算法尽管可以提取有效特征进行降维,但由于该算法没有考虑到图像在学习过程中存在的残差,故不能提取出显著的特征,LatLRR提取的特征维数与原样本的维数相同,该算法无法用于降维,而LatLRR-JPL可以选择对应的维数用于降维,可提取出更多判别特征。

表4列出了在BioID和COIL20数据集上分别用不同训练样本得到的各个算法的运行时间。由表4可知,除了用时较少的LPP算法外,本文两种算法仍具有优势。与LRLE和LatLRR算法相比,本文的算法所用时间明显较少,这主要是因为其具有较好的收敛性,算法经过数次迭代后能够快速收敛。

表4 BioID人脸库和COIL20数据集上算法的运行时间

Table 4 Running time of different algorithms on BioID face database and COIL20 dataset

s

| Dataset | Number of samples | LatLRR-JPL | LatLRR-PL | EALPL | LRLE | LatLRR | LPP |
|---------|-------------------|------------|-----------|-------|-------|--------|------|
| BioID | 13 | 5.62 | 5.76 | 4.64 | 36.47 | 17.61 | 0.03 |
| | 17 | 6.54 | 7.03 | 5.29 | 41.33 | 18.29 | 0.04 |
| COIL20 | 10 | 3.66 | 4.51 | 3.15 | 30.92 | 15.02 | 0.02 |
| | 15 | 5.03 | 6.14 | 4.17 | 36.01 | 16.30 | 0.04 |

4 结 论

基于隐式低秩表示算法提出了LatLRR-PL与LatLRR-JPL两种有效的特征提取算法,LatLRR-JPL算法因联合学习投影矩阵、恢复矩阵和低秩矩阵,在共同学习过程中使算法获得最优解的同时能提取判别特征,弥补了LatLRR算法在实际应用中无法降维和计算时间长的缺点。在不同数据集上的实验结果表明,本文算法的识别率相比其他算法明显提高,证明该算法能有效地进行图像识别。由于

提出的算法复杂度相对较高,在实际应用中如何降低复杂度并选取最优的参数值得进一步研究。

参 考 文 献

- [1] Yang H X, Chen Y, Zhang F, *et al.* Face recognition based on improved gradient local binary pattern [J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2018, 55(6): 061004.
- 杨恢先, 陈永, 张翥, 等. 基于改进梯度局部二值模式的人脸识别[J]. *激光与光电子学进展*, 2018, 55

- (6): 061004.
- [2] Fu J P, Chen X H, Ge X Q. Face recognition by generalized kernel discriminant analysis via $L_{2,1}$ -norm regularization[J]. Journal of Frontiers of Computer Science & Technology, 2017, 11(1): 124-133.
傅俊鹏, 陈秀宏, 葛晓倩. $L_{2,1}$ 范数正则化的广义核判别分析及其人脸识别[J]. 计算机科学与探索, 2017, 11(1): 124-133.
- [3] Liu K, Bi D Y, Wang S P, *et al.* Single image dehazing based on sparse feature extraction[J]. Acta Optica Sinica, 2018, 38(3): 0310001.
刘坤, 毕笃彦, 王世平, 等. 基于稀疏特征提取的单幅图像去雾[J]. 光学学报, 2018, 38(3): 0310001.
- [4] Ye Z, Bai L. Hyperspectral image classification based on principal component analysis and local binary patterns [J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2017, 54(11): 111006.
叶珍, 白璘. 基于主成分分析与局部二值模式的高光谱图像分类[J]. 激光与光电子学进展, 2017, 54(11): 111006.
- [5] Mao Z C, Chen Q. Recognition and tracking of AGV multi-branch path based on PCA-LDA and SVM[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2018, 55(9): 091005.
茅正冲, 陈强. 基于 PCA-LDA 与 SVM 的 AGV 多分支路径识别与跟踪[J]. 激光与光电子学进展, 2018, 55(9): 091005.
- [6] He X F, Cai D, Yan S C, *et al.* Neighborhood preserving embedding[C]//Tenth IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV'05) Volume 1, October 17-21, 2005, Beijing, China. New York: IEEE, 2005: 1208-1213.
- [7] Zhou B, He Y Q, Wang J. Face recognition based on adaptive neighborhood locality preserving projection algorithm [J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2018, 55(3): 031010.
周博, 何宇清, 王建. 基于自适应近邻局部保持投影算法的人脸识别[J]. 激光与光电子学进展, 2018, 55(3): 031010.
- [8] Dong A G, Li J X, Zhang B, *et al.* Hyperspectral image classification algorithm based on spectral clustering and sparse representation[J]. Acta Optica Sinica, 2017, 37(8): 0828005.
董安国, 李佳逊, 张蓓, 等. 基于谱聚类和稀疏表示的高光谱图像分类算法[J]. 光学学报, 2017, 37(8): 0828005.
- [9] Liu G C, Lin Z C, Yan S C, *et al.* Robust recovery of subspace structures by low-rank representation [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2013, 35(1): 171-184.
- [10] Zhang Y P, Xiang M, Yang B. Low-rank preserving embedding[J]. Pattern Recognition, 2017, 70: 112-125.
- [11] Xie L F, Yin M, Yin X Y, *et al.* Low-rank sparse preserving projections for dimensionality reduction [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2018, 27(11): 5261-5274.
- [12] Liu G C, Yan S C. Latent low-rank representation for subspace segmentation and feature extraction[C]// 2011 International Conference on Computer Vision, November 6-13, 2011, Barcelona, Spain. New York: IEEE, 2011: 1615-1622.
- [13] Fang X Z, Teng S H, Lai Z H, *et al.* Robust latent subspace learning for image classification [J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2018, 29(6): 2502-2515.
- [14] Yin M, Cai S T, Gao J B. Robust face recognition via double low-rank matrix recovery for feature extraction[C]// 2013 IEEE International Conference on Image Processing, September 15-18, 2013, Melbourne, VIC, Australia. New York: IEEE, 2014: 3770-3774.
- [15] Fang X Z, Han N, Wu J G, *et al.* Approximate low-rank projection learning for feature extraction [J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2018, 29(11): 5228-5241.
- [16] Chen Y D, Lai Z H, Wong W, *et al.* Low-rank linear embedding for image recognition [J]. IEEE Transactions on Multimedia, 2018, 20(12): 3212-3222.
- [17] Cai J F, Candès E J, Shen Z W. A singular value thresholding algorithm for matrix completion [J]. SIAM Journal on Optimization, 2010, 20(4): 1956-1982.
- [18] Zou H, Hastie T, Tibshirani R. Sparse principal component analysis[J]. Journal of Computational and Graphical Statistics, 2006, 15(2): 265-286.
- [19] Martinez A, Benavente R. The AR face databases [R]. Indiana: Purdue University, 1998.