

截断光束在非 Kolmogorov 湍流中的扩展区域

陈晓文¹, 李宾中², 汤明玥², 邓涵凌^{2*}

¹ 川北医学院医学影像学院, 四川 南充 637000;

² 川北医学院基础医学院物理教研室, 四川 南充 637000

摘要 为研究截断光束在非 Kolmogorov 湍流中的扩展区域, 求解了湍流距离及瑞利区间解析式, 将传输路径划分为三个区域, 并对三段区域进行相关数值分析。研究表明, 第一区域和第二区域长度随相干参数、截断参数的增大而缩短, 第三区域起点随相干参数、截断参数的增大而减小; 相干参数、截断参数越小, 忽略湍流在瑞利区间内对光束扩展影响的可能性则更大; 三个区域内, 湍流距离随广义指数的变化依次加剧。对主要结果进行了相应的物理解释。

关键词 大气光学; 非 Kolmogorov 湍流; 截断光束; 湍流距离; 扩展区域

中图分类号 O436; TN012

文献标识码 A

doi: 10.3788/LOP56.010102

Spreading Regions of Truncated Beams in Non-Kolmogorov Turbulence

Chen Xiaowen¹, Li Binzhong², Tang Mingyue², Deng Hanling^{2*}

¹ Imaging Department, North Sichuan Medical College, Nanchong, Sichuan 637000, China;

² Department of Basic Medicine, North Sichuan Medical College, Nanchong, Sichuan 637000, China

Abstract To study the regions of spreading of truncated beams propagating through non-Kolmogorov turbulence, the expressions for turbulence distance and Rayleigh range are derived, the transport path is divided into three regions, and the relevant numerical analysis of the three regions is given. Results show that the lengths of the first region and the second region decreases with increase of coherence and truncation parameter, and the starting point of the third region reduces with increase of coherence and truncation parameter. The smaller coherence and truncation parameter are, the more likely it is to ignore the effect of turbulence on the beam propagation in Rayleigh range. In the three regions, the turbulent distance increases with the change of the generalized exponential. The corresponding physical explanations are given for the main results.

Key words atmospheric optics; non-Kolmogorov turbulence; truncated beam; turbulence distance; regions of spreading

OCIS codes 010.1330; 010.1300; 010.3310

1 引言

由湍流广义指数和广义振幅因子描述的非 Kolmogorov 湍流模型用来描述复杂的大气环境更为适合^[1]。因此, 近年来国内外科研工作者开展了大量激光束通过非 Kolmogorov 湍流的传输特性的研究工作^[2-5]。然而, 在光强分布、偏振度等传输特性中^[6-7], 光束扩展是较为重要的特性, 文献[8-11]研究了激光束传输于湍流的扩展问题。最近, 本研究小组利用相对束宽、瑞利区间和湍流距离等参量研究了各类激光

束在非 Kolmogorov 湍流中的扩展^[12-14]。研究发现, 光束参数和湍流广义指数对光束扩展产生了一定影响。深究其物理原因: 使光束扩展的物理机制为空间衍射和湍流, 那么依据这两个物理机制所划分的扩展区域是值得进一步探讨的话题。目前, 有关于光束在湍流中扩展区域的研究报道并不多见^[15]。

另一方面, 激光器所产生的激光常会受到光阑的影响, 因而截断光束常出现于实际激光束中。那么, 对于截断光束在湍流中传输特性的研究就显得非常重要。目前, 关于截断光束通过湍流大气的传

收稿日期: 2018-06-08; 修回日期: 2018-06-26; 录用日期: 2018-07-18

基金项目: 四川省教育厅资助项目(17ZB0163)、川北医学院校级科研发展计划项目(CBY17-A-YB03)、教育部留学回国人员科研启动基金资助项目(教外司[2010]1174号)

* E-mail: 56833804@qq.com

输特性已有一些研究^[16-18],但尚未涉及截断光束扩展区域的研究。

本研究给出了截断高斯-谢尔模型(GSM)光束在湍流中的湍流距离、瑞利区间的解析式,并依据湍流距离将激光束传输路径划分为三个区域,同时对三个区域的变化情况作了详尽的数值分析;另外对忽略湍流在瑞利区间内对光束扩展造成影响的可能性与光束参数之间的关系作了详细说明。本文对主要的结论给予了相关的物理解释。

2 理论模型

2.1 二阶矩束宽

截断光束是由激光束通过硬边光阑后产生的光束。本文设定 GSM 光束通过一个硬边光阑,该光阑为垂直于传输方向上半径为 h 的圆孔。那么,截断 GSM 光束通过大气湍流传输的光强可表示为^[8]

$$\langle I(x, z) \rangle = \frac{k}{2\pi z} \int_{-h}^h \int_{-h}^h dx'_1 dx'_2 W^{(0)}(x'_1, x'_2, z=0) \times \exp\left\{\left(\frac{ik}{2z}\right) [(x'_1 - x'_2) - 2(x'_1 - x'_2)x]\right\} \langle \exp[\psi^*(x'_1, x, z) + \psi(x'_2, x, z)] \rangle_m, \quad (1)$$

式中 $W^{(0)}(x'_1, x'_2, z=0)$ 为 GSM 光束在源场处的交叉谱密度函数,表示为^[8]

$$W^{(0)}(x'_1, x'_2, z=0) = \exp\left(-\frac{x'^2_1 + x'^2_2}{w_0^2}\right) \exp\left[-\frac{(x'_1 - x'_2)^2}{2\sigma_0^2}\right], \quad (2)$$

式中 w_0 和 σ_0 分别表征光束在源场处束宽和空间相干长度^[8],波数 $k=2\pi/\lambda$, $\langle \rangle_m$ 为随机介质的系综平均, $\psi(x', x, z)$ 为湍流对球面波影响的随机相位因子。且^[9]

$$\langle \exp[\psi^*(x, x'_1, z) + \psi(x, x'_2, z)] \rangle_m = \exp\left\{-4\pi^2 k^2 z \int_0^\infty k \Phi_n(k, \gamma) \times \right.$$

$$\left. [1 - J_0(\kappa \xi |x'_2 - x'_1|)] d\kappa d\xi \right\}, \quad (3)$$

式中 $\Phi_n(\kappa, \gamma)$ 为湍流的折射率起伏空间功率谱, $J_0(\cdot)$ 是零阶的贝塞尔函数^[10]。

本研究采用非 Kolmogorov 湍流功率谱描述大气湍流,该模型得到了普遍认可。在非 Kolmogorov 统计中,相关的数学表达有^[12]

$$\Phi_n(\kappa, \alpha) = A(\alpha) \tilde{C}_n^2 \frac{\exp[-(\kappa^2/\kappa_m^2)]}{(\kappa^2 + \kappa_0^2)^{\gamma/2}}, \quad 0 \leq \kappa < \infty, 3 < \alpha < 4, \quad (4)$$

$$A(\alpha) = \Gamma(\alpha - 1) \cos(\alpha\pi/2) / 4\pi^2, \quad (5)$$

$$c(\gamma) = [\Gamma(5 - \alpha/2) \cdot A(\alpha) \cdot 2/3\pi]^{1/(\gamma-5)}, \quad (6)$$

式中 $\kappa_0 = 2\pi/L_0$, $\kappa_m = c(\gamma)/l_0$, $\Gamma(\cdot)$ 为伽玛函数, α 为湍流广义指数。另外, l_0 和 L_0 分别表示湍流内、外尺度, \tilde{C}_n^2 为广义折射率结构常数。

另外,二阶矩束宽定义为^[13]

$$w^2(z) = \frac{\int x^2 I(x, z, \omega) dx}{\int I(x, z, \omega) dx}. \quad (7)$$

将(1)式代入(7)式,利用硬边光阑的窗口函数

$$H(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq h \\ 0, & |x| > h \end{cases}, H(x) \text{ 可由复高斯函数的有}$$

限级数和表示, $H(x) = \sum_{i=1}^M F_i \exp\left(-\frac{G_i x^2}{h^2}\right)$ ^[11], 并采用积分变换技术,经过复杂的积分运算可得到截断 GSM 光束在非 Kolmogorov 湍流中束宽为

$$w^2(z) = A + B \cdot z^2 + T \cdot z^3, \quad (8)$$

其中,

$$A = \frac{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M F_i F_j^* [(G_i + G_j^*)/\delta^2 + 2]^{-3/2} \cdot w_0^2}{4 \cdot \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M F_i F_j^* \left(\frac{G_i + G_j^*}{\delta^2} + 2\right)^{-1/2}}, \quad (9)$$

$$B = \frac{z^2}{k^2 w_0^2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M F_i F_j^* [(G_i + G_j^*)/\delta^2 + 2]^{-3/2} \cdot [G_i G_j^*/\delta^4 + (1 + 1/2\alpha^2)(G_i + G_j^*)/\delta^2 + 1 + 1/\alpha^2]}{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M F_i F_j^* [(G_i + G_j^*)/\delta^2 + 2]^{-1/2}}, \quad (10)$$

$$T = \frac{2\pi^2 z^3}{3} \int_0^\infty \kappa^3 \Phi_n(\kappa, \alpha) d\kappa, \quad (11)$$

式中 $\beta = \sigma_0/w_0$ 为相干参数, $\delta = h/w_0$ 为光束的截

断参数。由(8)式可知,束宽在自由空间中与光束参数($w_0, \beta, \delta, \lambda$)相关,在湍流中则还与 l_0, L_0, \tilde{C}_n^2 及 α 有关。

2.2 扩展区域

湍流对激光束扩展的影响可以用湍流距离来做定量的描述,湍流距离的定义为湍流导致光束横截面积扩展达 10%和 90%的传输距离^[15],分别用 z_{T1} 和 z_{T2} 表示。在 z_{T1} 范围内,湍流对光束扩展的影响在 10%以内,表示湍流对光束扩展的影响可以忽略;在 z_{T2} 以外,湍流对光束扩展的影响达 90%以上,表示光束扩展主要由湍流导致,其他因素可以忽略。根据湍流距离的定义,可得

$$\frac{\omega^2(z_T) - \omega_{free}^2(z_T)}{\omega^2(z_T)} = \eta, \quad (12)$$

式中 ω_{free}^2 表示自由空间中传输的光束束宽,即 $\omega_{free}^2 = A + B \cdot z^2$ 。结合(8)和(12)式,并经复杂计算,可得截断光束在非 Kolmogorov 湍流中的湍流距离 z_T 解析表达式为

$$z_T = \frac{\eta^2 P^2 + \eta BP + P^2}{3(1-\eta)PT}, \quad (13)$$

式中 $P = \{3(1-\eta)T[81\eta^2(1-\eta)^2A^2T^2 + 12\eta^4AB^3]^{1/2}/2 + 27\eta(1-\eta)^2AT^2/2 + \eta^3B^3\}^{1/3}$ 。当 $\eta=10\%$ 时,(13)式为 z_{T1} ;当 $\eta=90\%$ 时,(13)式为 z_{T2} 。

显然,光束的传输距离已被 z_{T1} 和 z_{T2} 分成了三个区域:1) 第一区域 $z < z_{T1}$,说明光束的扩展主要由空间衍射造成,湍流的影响可以忽略;2) 第二区域 $z_{T1} < z < z_{T2}$,表示光束的扩展是由空间衍射和湍流共同造成;3) 第三区域 $z > z_{T2}$,表示光束的扩展主要由湍流造成,空间衍射可以忽略。

另一方面,瑞利区间值得用来与第一区域作数值比较分析,瑞利区间表示湍流中光束的横截面积扩展到源场处两倍的传输距离^[14],即

$$\omega^2(z_R) = A + Bz_R^2 + Tz_R^3 = 2A, \quad (14)$$

求解(14)式可得:

$$z_R = \frac{1}{3T} \left(Q + \frac{B^2}{Q} - B \right), \quad (15)$$

$$Q =$$

$$\left[\frac{27}{2}AT^2 - B^3 + \frac{3}{2}T(81A^2T^2 - 12AB^3)^{1/2} \right]^{1/3}. \quad (16)$$

3 数值分析

对截断光束在非 Kolmogorov 湍流中的三个区域分别进行数值分析。计算参数为 $\tilde{C}_n^2 = 10^{-15} \text{ m}^{3-\alpha}$ 、 $w_0 = 0.02 \text{ m}$ 、 $L_0 = 10 \text{ m}$ 、 $l_0 = 0.01 \text{ m}$ 、 $\lambda = 1.06 \text{ }\mu\text{m}$ 、 $\beta = 0.5$ 、 $\delta = 0.8$ 。图 1 为湍流距离 z_{T1}

和瑞利区间 z_R 随湍流广义指数 α 的变化关系。由图 1 可知, z_{T1} 和 z_R 都随 α 的增大而先减小后增大,且在 $\alpha = 3.11$ 处出现了极小值。这是因为该处湍流出现极大值,湍流的极大必然导致瑞利区间和湍流距离的极小。另外, z_{T1} 和 z_R 两条曲线在 $\alpha = 3.74$ 处出现了一个交点。当 $\alpha > 3.74$ 时,即 $z_{T1} > z_R$,表示在瑞利区间在第一区域内,瑞利区间内湍流对光束扩展的影响可忽略不计;当 $\alpha < 3.74$ 时,即 $z_{T1} < z_R$,表示瑞利区间到达了第二区域,该区域内湍流对光束扩展有一定的影响。本研究组曾指出,不同的光束参数和湍流广义指数将决定湍流是否在瑞利区间内对光束扩展造成影响^[14],本文对其随光束参数的变化作了进一步的数值分析。图 2 为 z_{T1}/z_R 在不同相干参数 β 下随截断参数 δ 的变化(计算参数为 $\alpha = 3.8$),可以看出, z_{T1}/z_R 随 β 和 δ 的增大而减小;且三条曲线与虚线($z_{T1} = z_R$)的交点对应的 δ 越大, β 则越小。这表明, β 和 δ 越小,湍流对光束扩展的影响也越小,忽略湍流在瑞利区间内对光束扩展影响的可能性则更大。

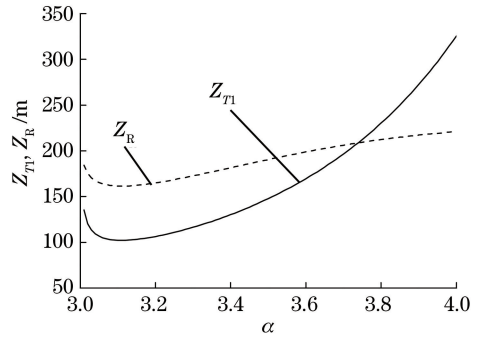


图 1 z_{T1} 、 z_R 随 α 的变化

Fig. 1 z_{T1} and z_R versus α

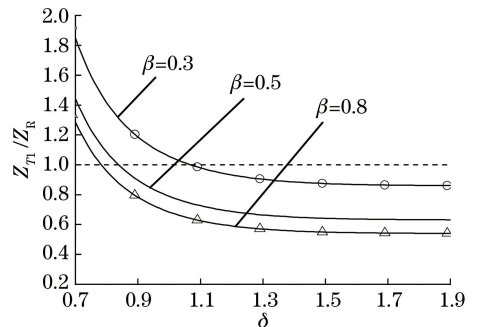


图 2 不同 β 下 z_{T1}/z_R 随 δ 的变化

Fig. 2 z_{T1}/z_R versus δ with different value of β

图 3 和图 4 分别为第二区域长度 $\Delta z_T = z_{T2} - z_{T1}$ 在不同相干参数 β 和截断参数 δ 下随湍流广义指数 α 的变化图。可以看出, Δz_T 依然随 α 的增大而先减小后增大,且 Δz_T 随 β 和 δ 的增大而减小。

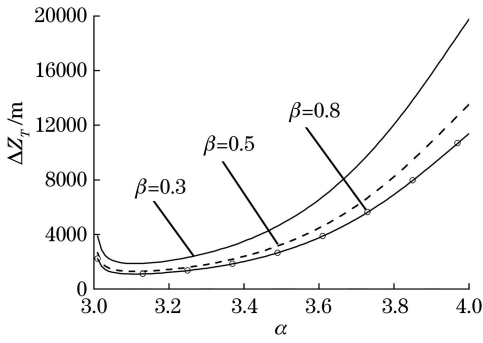


图3 不同 β 下 Δz_T 随 α 的变化

Fig. 3 Δz_T versus α with different value of β

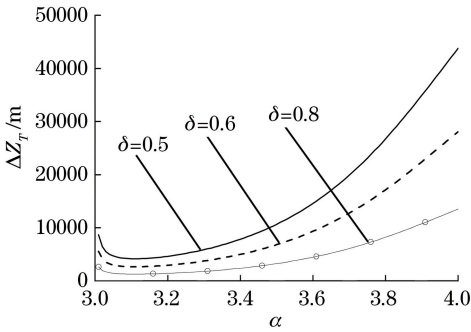


图4 不同 δ 下 Δz_T 随 α 的变化

Fig. 4 Δz_T versus α with different value of δ

这是因为 β 和 δ 越大, 湍流对光束扩展的影响则越大, 导致第二区域长度缩短。图 5 表明, z_{T2} (即第三区域的起始点) 随 α 的增大而先减小后增大; 图 6 表明, z_{T2} 随 β 和 δ 的增大而减小 (计算参数: $\alpha = 3.8$)。另外, 由图 1、图 3 及图 5 可知, 曲线在三个区域的变化趋势越来越急剧。其物理原因是湍流对光束扩展的影响有累积效应, 随着传输距离的增加, 湍流对光束的影响会急剧增加。

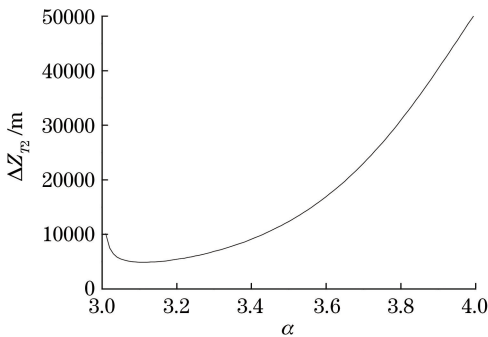


图5 z_{T2} 随 α 的变化

Fig. 5 z_{T2} versus α

4 结 论

推导出截断光束在非-Kolmogorov 湍流中的湍流距离 z_{T1} 、 z_{T2} 及瑞利区间 z_R 解析式, 根据 z_{T1} 和

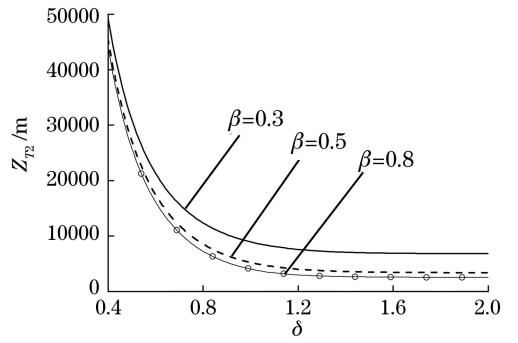


图6 不同 β 下 z_{T2} 随 δ 的变化

Fig. 6 z_{T2} versus δ with different value of β

z_{T2} 将传输区域分为三个区域, 并对三个区域作了详细的数值分析。研究表明: 1) z_{T1} 和 z_R 都随 α 的增大而先减小后增大; 2) 不同的湍流广义指数决定了湍流是否在瑞利区间内对光束扩展造成影响, 且 β 和 δ 越小, 忽略湍流在瑞利区间内对光束扩展影响的可能性则更大; 3) 第一区域和第二区域长度随 β 、 δ 的增大而缩短, 第三区域起点随 β 、 δ 的增大而减小; 4) 随着传输距离的增加, 湍流距离随广义指数变化将更为急剧。

本文所得理论结果对实际激光束在湍流中传输的相关应用具有一定指导意义。

参 考 文 献

- [1] Toselli I, Andrews L C, Phillips R L, *et al.* Free space optical system performance for laser beam propagation through non Kolmogorov turbulence for uplink and downlink paths[J]. Proceedings of SPIE, 2007, 6708: 670803.
- [2] Xu H F, Cui Z F, Qu J. Propagation of elegant Laguerre - Gaussian beam in non-Kolmogorov turbulence [J]. Optics Express, 2011, 19 (22): 21163-21173.
- [3] Tian H H, Xu Y G, Yang T, *et al.* Beam wander of partially coherent anomalous elliptical hollow Gaussian beam propagating through non-Kolmogorov turbulence [J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2017, 54(5): 050103.
田欢欢, 徐勇根, 杨婷, 等. 部分相干反常椭圆空心高斯光束在非 Kolmogorov 湍流中的光束漂移[J]. 激光与光电子学进展, 2017, 54(5): 050103.
- [4] He X M, Lü B D. Propagation properties of partially coherent Hermite: Gaussian beams through non-Kolmogorov turbulence [J]. Chinese Physics B, 2011, 20(9): 094210.
- [5] Tang M M, Zhao D M, Li X Z, *et al.* Propagation of

- radially polarized multi-cosine Gaussian Schell-model beams in non-Kolmogorov turbulence [J]. *Optics Communications*, 2018, 407: 392-397.
- [6] Li Y Q, Wang L G, Wu Z S, *et al.* Degree of polarization for partially coherent flat-topped beams in slant turbulent atmosphere[J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2016, 43(11): 1105001.
李亚清, 王利国, 吴振森, 等. 斜程湍流大气中部分相干平顶光束的偏振度研究[J]. *中国激光*, 2016, 43(11): 1105001.
- [7] Ke X Z, Wang C Z. Intensity distribution of partially coherent off-axis vortex beam propagating in atmospheric turbulence [J]. *Acta Optica Sinica*, 2017, 37(1): 0101005.
柯熙政, 王超珍. 部分相干离轴涡旋光束在大气湍流中的光强分布 [J]. *光学学报*, 2017, 37(1): 0101005.
- [8] Wu G H, Guo H, Yu S, *et al.* Spreading and direction of Gaussian-Schell model beam through a non-Kolmogorov turbulence [J]. *Optics Letters*, 2010, 35(5): 715-717.
- [9] Chen X W, Ji X L. Influence of turbulence on the spreading of annular beams[J]. *Acta Physica Sinica*, 2009, 58(4): 2435-2443.
陈晓文, 季小玲. 湍流对环状光束扩展的影响[J]. *物理学报*, 2009, 58(4): 2435-2443.
- [10] Liu F, Ji X L. Turbulence distance of partially coherent cosh-Gaussian array beams [J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2011, 38(7): 0713001.
刘飞, 季小玲. 部分相干双曲余弦高斯阵列光束的湍流距离[J]. *中国激光*, 2011, 38(7): 0713001.
- [11] Ke X Z, Zhang H J. Study on broadening characteristics of partially coherent Gaussian pulse in atmospheric turbulence[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2016, 53(8): 080603.
柯熙政, 张焕杰. 部分相干高斯脉冲在大气湍流中展宽特性的研究[J]. *激光与光电子学进展*, 2016, 53(8): 080603.
- [12] Tang M Y, Li X Q, Chen X W, *et al.* Influence of non-Kolmogorov turbulence on the Rayleigh range of partially coherent annular beams [J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2015, 52(2): 020101.
汤明玥, 李晓庆, 陈晓文, 等. 非 Kolmogorov 湍流对部分相干环状光束瑞利区间的影响[J]. *激光与光电子学进展*, 2015, 52(2): 020101.
- [13] Tang M Y, Li B Z, Wang Y F, *et al.* Influence of non-Kolmogorov turbulence on the Rayleigh range and turbulence distance of Gaussian-Schell beams[J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2014, 41(10): 1013002.
汤明玥, 李宾中, 王宇峰, 等. 非 Kolmogorov 湍流对高斯-谢尔光束的瑞利区间和湍流距离的影响[J]. *中国激光*, 2014, 41(10): 1013002.
- [14] Chen X W, Li X Q, Li B Z, *et al.* Turbulence distance of partially coherent flat-topped beams in non-Kolmogorov turbulence [J]. *High Power Lasers and Particle Beams*, 2015, 27(1): 011004.
陈晓文, 李晓庆, 李宾中, 等. 部分相干平顶光束在非 Kolmogorov 湍流中的湍流距离 [J]. *强激光与粒子束*, 2015, 27(1): 011004.
- [14] Chen X W, Li X Q, Li B Z, *et al.* Turbulence distance of partially coherent flat-topped beams in non-Kolmogorov turbulence [J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 2015, 27(1): 011004.
陈晓文, 李晓庆, 李宾中, 等. 部分相干平顶光束在非 Kolmogorov 湍流中的湍流距离 [J]. *强激光与粒子束*, 2015, 27(1): 011004.
- [15] Ji X L, Pu Z C, Ji G M, *et al.* Regions of spreading of partially coherent beams propagating through non-Kolmogorov turbulence[J]. *Optics Communications*, 2014, 322: 109-113.
- [16] Chen X W, Li B Z, Tang M Y. Directionality of apertured partially coherent beams propagating through atmospheric turbulence[J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2012, 39(9): 0913002.
陈晓文, 李宾中, 汤明玥. 受光阑限制的部分相干光通过湍流大气传输的方向性[J]. *中国激光*, 2012, 39(9): 0913002.
- [17] Lee I E, Ghassemlooy Z, Ng W P, *et al.* Effects of aperture averaging and beam width on a partially coherent Gaussian beam over free-space optical links with turbulence and pointing errors [J]. *Applied Optics*, 2016, 55(1): 1-9.
- [18] Chu X, Ni Y Z, Zhou G Q. Propagation analysis of flattened circular Gaussian beams with a circular aperture in turbulent atmosphere [J]. *Optics Communications*, 2007, 274(2): 274-280.