

# 非 Kolmogorov 湍流下拉盖尔-高斯光束 传输性能数值研究

骆传凯, 卢芳, 尹晨旭, 韩香娥\*

西安电子科技大学物理与光电工程学院, 陕西 西安 710071

**摘要** 涡旋光束可以有效提高通信系统的信道容量,但大气环境下光通信信道受大气湍流的影响,因此研究涡旋光束大气湍流传输特性具有重要意义。大气湍流广泛采用 Kolmogorov 谱模型进行描述,但对大气湍流的进一步研究表明,大气湍流还具有非 Kolmogorov 谱特征。开展了非 Kolmogorov 谱湍流下涡旋光束传输特性的研究,基于数值方法研究了湍流内外尺度、广义指数因子、折射率结构常数对拉盖尔-高斯光束在不同传输距离下的螺旋谱分布、拓扑荷探测概率等参量的影响,仿真结果表明,拓扑荷探测概率与以上参量密切相关。最后,提出了一种数值计算涡旋光束闪烁指数的方法,并据此计算分析了大气湍流对通信误码率的影响。结果表明,即使在弱湍流中传输至 1000 m 处,误码率也很难达到通信要求,因此有必要采取进一步的相位校正措施。

**关键词** 大气光学; 拉盖尔高斯光束传输性能; 数值方法; 螺旋谱分解; 闪烁指数; 误码率

中图分类号 TN929.12

文献标识码 A

doi: 10.3788/LOP55.120101

## Numerical Study on Transmission Performance of Laguerre-Gaussian Beam in Non-Kolmogorov Turbulence

Luo Chuankai, Lu Fang, Yin Chenxu, Han Xiang'e\*

School of Physics and Optoelectronic Engineering, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China

**Abstract** A vortex beam can effectively improve the channel capacity of the communication system, however in the atmospheric environment, the optical communication channel is influenced obviously by the atmospheric turbulence. Thus it is of great significance to study the transmission characteristics of a vortex beam in the atmospheric turbulence. The Kolmogorov spectral model is widely used to describe the atmospheric turbulence previously, but the further researches show that the atmospheric turbulence also has the non-Kolmogorov spectral characteristics. Therefore, the investigation of the non-Kolmogorov spectral transmission characteristics for a vortex beam is conducted. Based on the numerical methods, the influence of outer- and inner-scale of turbulence, generalized exponential factor, refractive-index structure constant on the spiral spectral distributions, topological detection probabilities and others of a Laguerre-Gaussian beam after different transmission distances is investigated. The simulation results show that the topological detection probability is closely related with the above parameters. Finally, a numerical method for calculating the scintillation index is proposed, and the influence of turbulence on bit-error-rate (BER) is figured out. The results show that when the beam is propagated up to 1000 m even in a weak turbulence, the BER is still difficult to meet the communication requirements, and thus a further phase correction is quite necessary.

**Key words** atmospheric optics; transmission performance of Laguerre-Gaussian beam; numerical method; spiral spectral decomposition; scintillation index; bit error rate

**OCIS codes** 010.1330; 010.3310; 010.1300

### 1 引言

涡旋光束具有光强呈环状分布、螺旋波前结构、

携带相位奇点的特点。1992年,Allen等<sup>[1]</sup>首次发现在带有相位因子  $\exp(il\varphi)$  的光束中,每个光子都携带有  $hl$  的轨道角动量(OAM)。自此,涡旋光束

收稿日期: 2018-05-29; 修回日期: 2018-06-09; 录用日期: 2018-07-05

\* E-mail: xehan@mail.xidian.edu.cn

在光学微操控、生物医学、量子信息编码、光学信息传输等领域都得到了广泛的应用。涡旋光束的种类较多,其中,拉盖尔-高斯(LG)光束在实验中易产生,得到了广泛研究<sup>[2]</sup>。

在光学信息传输领域中,涡旋光束的优势在于其 OAM 量子数(或称拓扑荷)可以取任意整数,因此,不论是采用 OAM 编码的方式<sup>[3]</sup>,还是采用模分复用的方式<sup>[4]</sup>,涡旋光束都能极大地提高通信系统的信道容量。此外,使用涡旋光束进行通信,还具有防窃听的优点。但是,在近地光通信中,大气湍流会引起光束光强闪烁、相位畸变,从而导致通信误码率增大,系统信道容量降低。

研究大气湍流对涡旋光束的影响可以采用理论分析<sup>[5]</sup>与数值模拟的方法。由于湍流介质的复杂性,数值模拟方法已成为研究光束在大气湍流中传输问题的一种重要手段。早期,主要采用 Kolmogorov 谱模型描述湍流,然而在实际大气测量中,大量实验数据表明,大气湍流谱存在偏离 Kolmogorov 湍流谱的情况。因此, Toselli 等<sup>[6]</sup>考虑了湍流尺度的影响,提出了一种非 Kolmogorov 湍流谱模型。

继涡旋光束大气传输特性的理论研究之后,各国科研工作者们又开展了针对涡旋光束自由空间通信的研究。通信误码率与光束的闪烁指数密切相关,因此研究涡旋光束闪烁指数具有重要意义。2010年, Eyyuboğlu 等<sup>[7]</sup>利用解析方法给出了拉盖尔-高斯光束在大气湍流中传输时的闪烁指数。2017年,张国庆等<sup>[8]</sup>利用数值方法研究了拉盖尔-高斯光束在大气湍流中传输时的闪烁指数,但进一步对 LG 光束通信性能的研究则鲜见报道。

本文基于相位屏的数值方法模拟了 LG 光束在大气湍流中的传输,分析了非 Kolmogorov 湍流的不同参量对 LG 光束拓扑荷的影响。根据闪烁指数的定义式给出了数值计算 LG 光束离轴闪烁指数的方法,并据此分析了湍流强度对通信误码率的影响。

## 2 基本理论

### 2.1 涡旋光束模型

LG 光束是在柱坐标系中求解傍轴亥姆霍兹方程得到的一组完全解,它是涡旋光束的一种,源平面处的光束模型可简单地表示为<sup>[9]</sup>

$$u(r, \theta, 0) = E_0 \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2}\right) L_p^{|l|}\left(\frac{2r^2}{w_0^2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}r}{w_0}\right)^{|l|} \exp(il\theta), \quad (1)$$

式中:  $E_0$  为归一化振幅;  $w_0$  为光束腰宽;  $l$  为拓扑荷数,它描述了 LG 光束的螺旋型等相位面的结构,当  $l \neq 0$  时, LG 光束的中心强度为零,光束强度呈环状分布;  $L_p^{|l|}$  为连带拉盖尔多项式。

### 2.2 大气湍流模型

激光在大气湍流中传输时,随机的折射率起伏会对光束质量造成诸多影响,为了量化这些影响, Andrews 提出了一种非 Kolmogorov 湍流谱模型,其  $\Phi_n(\kappa)$  可表示为

$$\Phi_n(\kappa) = A(\alpha) \tilde{C}_n^2 \frac{\exp[-(\kappa^2/\kappa_m^2)]}{(\kappa^2 + \kappa_0^2)^{\frac{\alpha}{2}}}, \quad 0 \leq \kappa < \infty, 3 < \alpha < 4, \quad (2)$$

式中:  $A(\alpha) = \frac{[\Gamma(\alpha-1)\cos(\alpha\pi/2)]}{4\pi^2}$ ,  $\kappa_0 = 2\pi/L_0$ ,  $L_0$  为大气湍流外尺度;  $\kappa_m = c(\alpha)/l_0$ ,  $l_0$  为大气湍流内尺度;  $c(\alpha) = \left\{ \frac{\Gamma[(5-\alpha)/2]A(\alpha)2\pi}{3} \right\}^{\frac{1}{\alpha-3}}$ ,  $\Gamma$  为伽马函数,  $\alpha$  为广义指数参量,  $\tilde{C}_n^2$  为广义结构常数,单位为  $m^{3-\alpha}$ 。当  $\alpha = 11/3$ ,  $L_0 = \infty$ ,  $l_0 = 0$  时,得到  $A(11/3) = 0.033$ ,  $\tilde{C}_n^2 = C_n^2$ , 此时  $\Phi_n(\kappa)$  退化为 Kolmogorov 大气湍流功率谱密度模型。

### 2.3 光束大气传输的数值方法

大气湍流对光场相位的影响一般远大于对强度的影响,因此在大气湍流对激光传输特性影响的研究中,一般采用多层相位屏法数值模拟大气湍流中光场的传播,数值模拟光束传播示意图如图 1 所示。

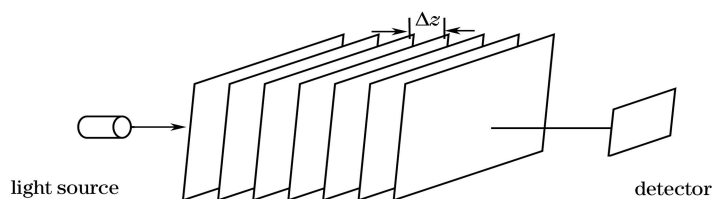


图 1 数值模拟光束传播示意图

Fig. 1 Schematic of beam propagation by numerical simulation

数值模拟相位屏的方法有功率谱反演法、“Zernike”多项式法<sup>[10]</sup>、分形法<sup>[11]</sup>等,这里采用功率谱反演法<sup>[12]</sup>。

## 2.4 光束螺旋谱分解

为了更好地阐明轨道角动量的成分,Torner等<sup>[13]</sup>提出将光束展开成螺旋谐波函数的  $\exp(il\varphi)$  线性叠加,得到轨道角动量谱。将任意光场分布  $u(r, \varphi, z)$  按螺旋谐波展开,得到

$$u(r, \varphi, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l(r, z) \exp(il\varphi), \quad (3)$$

式中:  $a_l(r, z)$  为螺旋谐波谱,可表示为

$$a_l(r, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} u(r, \varphi, z) \exp(-il\varphi) d\varphi. \quad (4)$$

初始拓扑荷  $l$  对应的权重因子,即拓扑荷探测概率为

$$p_l = \frac{P_l}{P_0} = \frac{\int_0^{\infty} |a_l(r, z)|^2 r dr}{\sum_l \int_0^{\infty} |a_l(r, z)|^2 r dr}, \quad (5)$$

式中:  $P_0$  为初始光束的总功率;  $P_l$  为接收平面处拓扑荷态为  $l$  的功率。螺旋谱越弥散,拓扑荷态的探测概率就越低。

## 2.5 闪烁指数及通信误码率

对于基于二进制启闭键控(OOK)调制的数字通信系统<sup>[14]</sup>,其误码率表达式为

$$\begin{aligned} R_{\text{BE}} &= P_r(0) \cdot P_r(1 | 0) + P_r(1) \cdot P_r(0 | 1) = \\ &= \frac{1}{2} P_r(1 | 0) + \frac{1}{2} P_r(0 | 1) = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \operatorname{erfc} \left( \frac{R_{\text{SN}}}{2\sqrt{2}} \right) \right], \end{aligned} \quad (6)$$

式中:  $\operatorname{erfc}(\cdot)$  表示误差函数;  $P_r(\cdot)$  表示概率函数;  $R_{\text{SN}}$  为考虑湍流影响时的系统信噪比,可表示为

$$R_{\text{SN}} = \frac{R_{\text{SN}0}}{\sqrt{\frac{P_{s0}}{\langle P_l \rangle} + \sigma_I^2 R_{\text{SN}0}^2}}, \quad (7)$$

其中,  $R_{\text{SN}0}$ 、 $P_{s0}$  分别为不考虑湍流时的系统信噪比和信号功率,  $\langle P_l \rangle$  为考虑湍流时平均信号功率,  $\sigma_I^2 = \frac{\langle I^2 \rangle}{\langle I \rangle^2} - 1$  为不同光强  $I$  时光束的闪烁指数,  $I$  为光束光强。

## 3 仿真结果

### 3.1 仿真参数选取

由于大气湍流中光传输的随机性,拓扑荷探测概率及闪烁指数需要仿真多次后得到统计结果,这里仿真次数均为 500 次。数值仿真中的参数如表 1 所示,以下的仿真不进行特殊说明时默认参量选择为  $L_0 = 5 \text{ m}$ 、 $l_0 = 0.01 \text{ m}$ 、 $\alpha = 11/3$ 。

表 1 数值仿真中的参数

Table 1 Parameters for numerical simulation

Parameter	Data	Parameter	Data
Wavelength	1550	Beam waist	10
$\lambda$ /nm		$w_0$ /mm	
Topological charge $l$	3	Light field plane size /m	$0.2 \times 0.2$
Number of samples	$512 \times 512$	Outer scale $L_0$ /m	1-10
Inner scale $l_0$ /m	0.01-0.1	Turbulence intensity	$1 \times 10^{-16}$
Genera lindex $\alpha$	3-4	$C_n^2$ / $\text{m}^{-2/3}$	$1 \times 10^{-15}$
		Grid size of phase screen /m	0.001

### 3.2 大气湍流对螺旋谱分解结果的影响

当  $C_n^2 = 1 \times 10^{-15}$  时,传输距离分别为 0, 600, 200, 1800 m 处的螺旋谱分解结果如图 2 所示。在真空中传输时, LG 光束的螺旋谱分解结果不随传输距离的增大发生变化,如图 2(a)所示。在大气湍流中传输时, LG 光束的螺旋谱则会随着传输距离的增大发生弥散。由图 2(d)可以看出,当传输距离达到 1800 m 时,已经无法区分出原始的拓扑荷态。

不同湍流强度下,传输 1500 m 后的螺旋谱分解结果如图 3 所示。可以看出,随着  $C_n^2$  的增大,螺旋谱分解结果逐渐弥散,当  $C_n^2$  增大至  $1 \times 10^{-15}$  时,已经无法区分出原始的拓扑荷态。

### 3.3 大气湍流不同参量对拓扑荷探测概率的影响

图 4 为大气湍流参量对拓扑荷探测概率的影响。由图 4 可以看出, LG 光束在大气湍流中传输同样的距离,  $C_n^2$  越大,则拓扑荷探测概率越低。湍流内尺度越小,外尺度越大,则拓扑荷探测概率越低,原因在于:湍流内尺度越小,外尺度越大,则湍涡的数量越多,湍流的能量越大,湍流对光束的轨道角

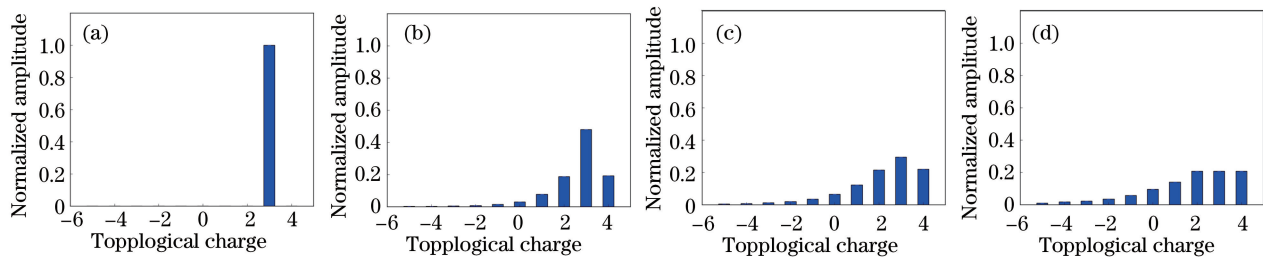


图2 不同传输距离下螺旋谱分解结果。(a) 0 m; (b) 600 m; (c) 1200 m; (d) 1800 m

Fig. 2 Helical decomposition results at different distances. (a) 0 m; (b) 600 m; (c) 1200 m; (d) 1800 m

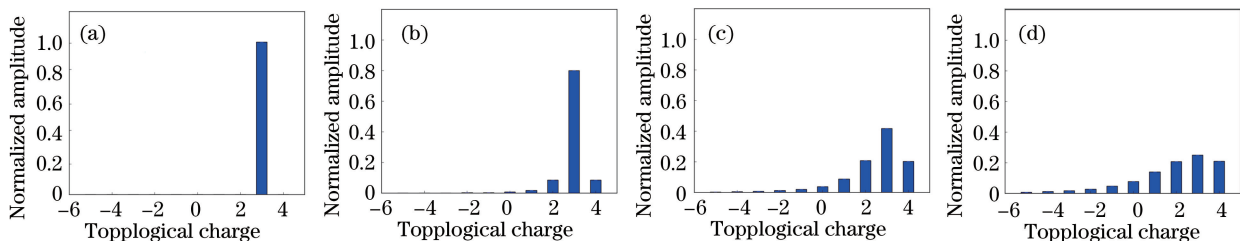


图3 不同  $C_n^2$  的大气湍流下传输 1500 m 后螺旋谱分解情况。(a)  $C_n^2=0$ ; (b)  $C_n^2=1 \times 10^{-16}$ ; (c)  $C_n^2=5 \times 10^{-16}$ ; (d)  $C_n^2=1 \times 10^{-15}$

Fig. 3 Helical decomposition results after 1500 m propagation in turbulence with different  $C_n^2$ .

(a)  $C_n^2=0$ ; (b)  $C_n^2=1 \times 10^{-16}$ ; (c)  $C_n^2=5 \times 10^{-16}$ ; (d)  $C_n^2=1 \times 10^{-15}$

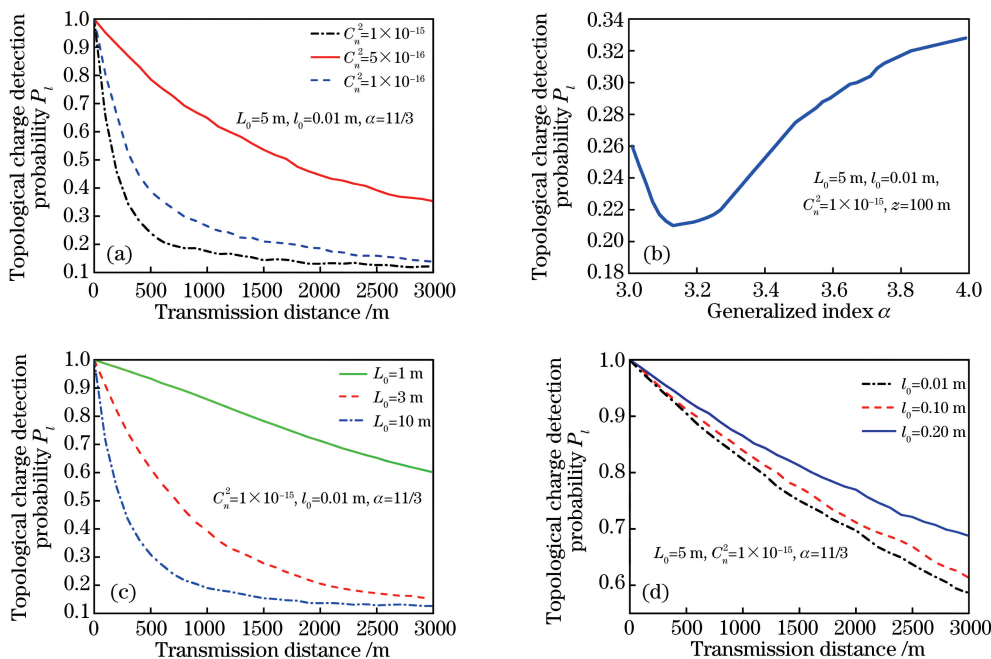


图4 大气湍流参量对拓扑荷探测概率的影响。(a)湍流强度  $C_n^2$ ; (b)广义指数  $\alpha$ ; (c)外尺度  $L_0$ ; (d)内尺度  $l_0$

Fig. 4 Influences of turbulence parameters on topological charge detection probability. (a) Turbulence intensity  $C_n^2$ ; (b) generalized index  $\alpha$ ; (c) outer scale  $L_0$ ; (d) inner scale  $l_0$

动量影响越大。拓扑荷探测概率随着广义指数  $\alpha$  的改变而改变,首先随着  $\alpha$  的增大而降低,当达到最低点( $\alpha \approx 3.2$ )后又随着  $\alpha$  的增大而增大。

### 3.4 大气湍流强度对光束半径的影响

当涡旋光束在湍流大气中传输时,衍射效应和

湍流效应均会导致光束扩展<sup>[15]</sup>。涡旋光束的半径计算方法与一般高斯光束不同,通常是将横截面上最亮圆周的半径定义为光斑半径<sup>[16]</sup>,数值计算时,选取光强最大的若干点,计算其与相位奇点的距离后取平均作为光束半径。

图 5 为不同湍流强度下 LG 光束半径传输距离的变化。不同颜色的曲线代表不同的大气湍流折射率结构常数下光束半径随传输距离变化的情况。从图 5 可以看出,在大气湍流中传输时,光斑扩展比真空中严重,且湍流越强,光束的扩展越强。当传输距离为 3000 m 时,强度为  $C_n^2=1\times 10^{-16}$  的湍流中 LG 光束的光束扩展尺寸为在真空中传输的 1.40 倍,强度为  $C_n^2=1\times 10^{-15}$  的湍流中 LG 光束的光束扩展尺寸为在真空中传输的 2.62 倍。

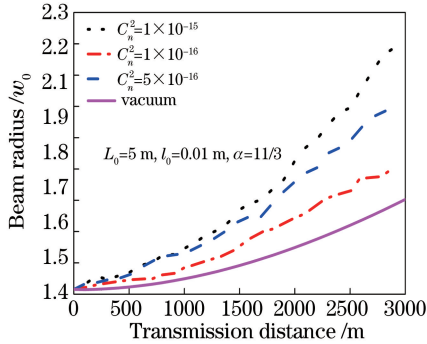


图 5 不同湍流强度下 LG 光束半径传输距离的变化

Fig. 5 LG beam radius versus propagation distance under different turbulence intensities

### 3.5 大气湍流强度对闪烁指数及通信误码率的影响

在数值计算 LG 光束的闪烁指数时,因光强呈环状分布,故取光强最大处的像素点进行计算。同时,考虑到随着距离的传输,光束半径会增大,光束半径处的像素点数也会增加,因此沿方位角均匀选取 72 个采样点,间隔均为  $5^\circ$ ,对这 72 个点的结果取平均作为闪烁指数。闪烁指数计算原理如图 6 所示,图中白色圆环为数值计算得到的光束半径。

$$S_i = \frac{\langle I_i^2 \rangle}{\langle I_i \rangle^2} - 1, \quad (8)$$

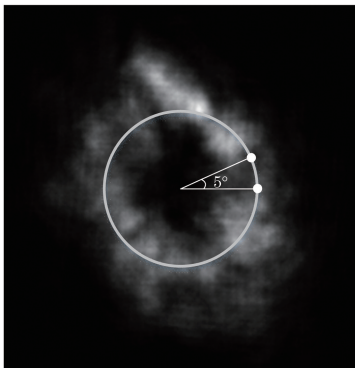


图 6 闪烁指数计算原理示意图

Fig. 6 Schematic of scintillation index calculation principle

$$S = \frac{1}{72} \sum_i^{72} S_i, \quad (9)$$

式中:  $I_n$  为第  $n$  个像素点位置处的光强值;  $S_i$  为第  $i$  个像素点处的闪烁指数;  $\langle \cdot \rangle$  为时间平均。

不同强度湍流下 LG 光束闪烁指数随传输距离的变化如图 7 所示,根据(6)式和(7)式计算可得不同强度湍流下通信误码率随  $R_{SN0}$  的变化如图 8 所示。

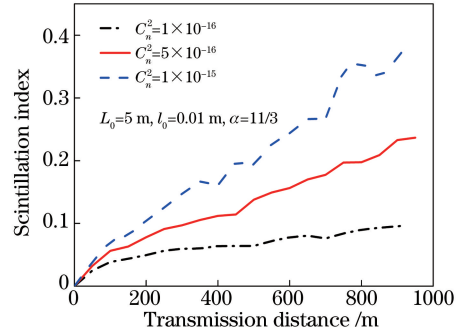


图 7 不同强度湍流下 LG 光束闪烁指数随传输距离的变化

Fig. 7 LG beam scintillation index versus propagation distance under different turbulence intensities

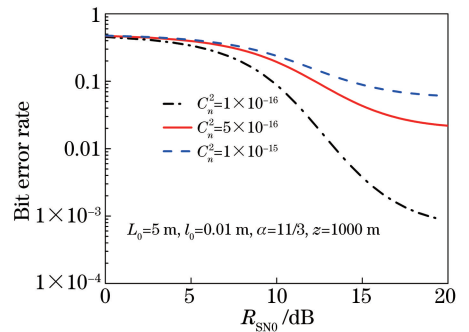


图 8 不同强度湍流下通信误码率随  $R_{SN0}$  的变化

Fig. 8 Bit error rate versus  $R_{SN0}$  under different turbulence intensities

由图 7 可以看出,闪烁指数随着湍流强度、传输距离的增大而增大,  $C_n^2=1\times 10^{-15}$  时的闪烁指数指数约为  $C_n^2=1\times 10^{-16}$  时的 3 倍。由图 8 可以看出,误码率随着湍流强度的增大而增大,同时随着无湍流时系统信噪比的增大而减小。当  $z=1000$  m 时,即使在弱湍流下也很难达到通信要求的误码率,因此,有必要采取进一步的相位校正等抗湍流效应措施。

## 4 结 论

通过相位屏法数值模拟了 LG 光束在中等强度非 Kolmogorov 湍流下的传输性质。仿真分析表明,大气湍流对 LG 光束具有一定影响,其中光斑尺寸、螺旋谱与湍流强度的关系密切。拓扑荷探测概率随着湍流外尺度的增大、内尺度的减小、湍流强度

的增大而降低,而对于广义指数  $\alpha$  而言,拓扑荷探测概率则首先随着  $\alpha$  的增大而减小,当达到最低点(对应  $\alpha \approx 3.2$ )后又随着  $\alpha$  的增大而增大。最后,提出了涡旋光束闪烁指数的数值计算方法,该方法也可以用于实验数据分析中,并简单分析了闪烁指数、误码率与湍流强度的关系,与理论符合较好,验证了数值方法分析 LG 光束传输性质的合理性。

### 参 考 文 献

- [1] Allen L, Beijersbergen M W, Spreeuw R J C, *et al.* Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes[J]. *Physical Review A*, 1992, 45(11): 8185-8189.
- [2] Xu Q, Pan F, Huang L, *et al.* Analysis of vectorial far-field characteristics of Laguerre-Gaussian beams by angular-spectrum method[J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2017, 44(8): 0805001.  
徐强, 潘丰, 黄莉, 等. 拉盖尔高斯光束矢量远场特性的角谱法分析[J]. *中国激光*, 2017, 44(8): 0805001.
- [3] Gibson G, Courtial J, Padgett M J, *et al.* Free-space information transfer using light beams carrying orbital angular momentum [J]. *Optics Express*, 2004, 12(22): 5448-5456.
- [4] Wang J, Yang J Y, Fazal I M, *et al.* Terabit free-space data transmission employing orbital angular momentum multiplexing [J]. *Nature Photonics*, 2012, 6(7): 488-496.
- [5] Ke X Z, Wang C Z. Intensity distribution of the partially coherent vortex beams propagating in atmospheric turbulence[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2016, 53(11): 110604.  
柯熙政, 王超珍. 部分相干涡旋光束在大气湍流中传输时的光强分布[J]. *激光与光电子学进展*, 2016, 53(11): 110604.
- [6] Toselli I, Andrews L C, Phillips R L, *et al.* Angle of arrival fluctuations for free space laser beam propagation through non Kolmogorov turbulence[J]. *Proceedings of SPIE*, 2007, 6551: 65510E.
- [7] Eyyuboğlu H T, Baykal Y, Ji X. Scintillations of Laguerre Gaussian beams [J]. *Applied Physics B*, 2009, 98(4): 857-863.
- [8] Zhang G Q, Tang H, Wu G H. Study on scintillation of four Laguerre-Gauss beams propagating through the atmospheric turbulence[J]. *Semiconductor Optoelectronics*, 2017, 38(3): 382-385, 391.  
张国庆, 唐华, 吴国华. 四拉盖尔高斯光束在大气湍流中传输时的闪烁研究[J]. *半导体光电*, 2017, 38(3): 382-385, 391.
- [9] Ke X Z, Chen J, Yang Y M. Study of orbital angular momentum of Laguerre Gaussian beam propagating in atmospheric turbulence in slant path [J]. *Acta Physica Sinica*, 2014, 63(15): 150301.  
柯熙政, 湛娟, 杨一明. 在大气湍流斜程传输中拉盖尔高斯光束的轨道角动量的研究[J]. *物理学报*, 2014, 63(15): 150301.
- [10] Noll R J. Zernike polynomials and atmospheric turbulence [J]. *Journal of the Optical Society of America*, 1976, 66(3): 207-211.
- [11] Wu H L, Yan H X, Li X Y, *et al.* Generation of rectangular turbulence phase screens based on fractal characteristics of distorted wavefront[J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, 29(1): 114-119.  
吴晗玲, 严海星, 李新阳, 等. 基于畸变相位波前分形特征产生矩形湍流相屏[J]. *光学学报*, 2009, 29(1): 114-119.
- [12] Long M H. Transmission characteristics and correlated imaging with partially coherent light through turbulent atmosphere [D]. Xi'an: Xidian University, 2014: 25-27.  
龙敏慧. 湍流大气中部分相干光传输特性与关联成像研究[D]. 西安: 西安电子科技大学, 2014: 25-27.
- [13] Torner L, Torres J P, Carrasco S. Digital spiral imaging[J]. *Optics Express*, 2005, 13(3): 873-881.
- [14] Andrews L C, Phillips R L. *Laser beam propagation through random media*[M]. Bellingham, WA: SPIE Press, 2005.
- [15] Ge X L, Wang B Y, Guo C S. Beam broadening of vortex beams propagating in turbulent atmosphere [J]. *Acta Optica Sinica*, 2016, 36(3): 0301002.  
葛筱璐, 王本义, 国承山. 涡旋光束在湍流大气中的光束扩展[J]. *光学学报*, 2016, 36(3): 0301002.
- [16] Ding P F, Pu J X. Propagation of Laguerre-Gaussian vortex beam [J]. *Acta Physica Sinica*, 2011, 60(9): 094204.  
丁攀峰, 蒲继雄. 拉盖尔高斯涡旋光束的传输[J]. *物理学报*, 2011, 60(9): 094204.