

一种组合式 DIC 算法在亚像素级位移测量中的应用

葛朋祥, 李桂华*

安徽大学电气工程与自动化学院, 安徽 合肥 230601

摘要 数字图像相关法(DIC)在位移测量中对搜索速度和测量精度均有较高的要求。在亚像素级测量中,一些不错的算法在速度和精度上很难兼顾。提出了一种组合式 DIC 算法,即以自适应遗传算法为基础快速得到亚像素级的最大相关系数点,然后以该点为拟合窗口,通过样条插值和二次曲面拟合得到亚像素位移值。以模拟散斑图为研究对象,对组合式 DIC 算法的测量精度、测量稳定度、搜索速度进行分析。结果表明:组合式 DIC 算法在搜索速度、测量精度、测量稳定性上比单独一个算法有明显的综合优势,可以满足 DIC 在亚像素级微小位移测量上对速度、精度的要求。

关键词 测量; 数字图像相关法; 自适应遗传算法; 亚像素位移; 曲面拟合; 样条插值

中图分类号 TN247

文献标识码 A

doi: 10.3788/LOP55.111202

Application of a Combinatorial DIC Algorithm in Sub-Pixel Displacement Measurement

Ge Pengxiang, Li Guihua*

College of Electrical Engineering and Automation, Anhui University, Hefei, Anhui 230601, China

Abstract Digital image correlation method (DIC) has higher requirement for search speed and measurement accuracy in displacement measurement. Some good algorithms in sub-pixel level measurement are difficult to take account of speed and accuracy. Therefore, a combinatorial DIC algorithm is proposed in this paper. It is based on an adaptive genetic algorithm to rapidly obtain the maximum correlation coefficient point at the sub-pixel level. Then, this point is used as a fitting window, and a sub-pixel displacement value is obtained by spline interpolation and quadric surface fitting. Taking the simulated speckle image as the research object, we analyze the measurement accuracy, measurement stability, and the search speed of the combinatorial DIC algorithm. The results show that the combinatorial DIC algorithm has obvious comprehensive advantages over a single algorithm in search speed, measurement accuracy, and measurement stability. It can meet the speed and accuracy requirements of DIC in sub-pixel micro displacement measurement.

Key words measurement; digital image correlation method; adaptive genetic algorithm; sub-pixel displacement; surface fitting; spline interpolation

OCIS codes 120.4630; 100.2960; 030.6140; 100.1160

1 引言

数字图像相关法(DIC)具有光路简单、非接触、全场测量等优点^[1-2],已在材料力学、无损检测、土木工程等领域得到了广泛应用。早期的 DIC 算法,如双参数法、爬山法、粗细搜索法、牛顿迭代法等,普遍存在搜索时间长、出现多峰值时易陷入局部最优的

情况^[3-4]。近些年来,一些智能算法,如遗传算法、粒子群算法、蚁群算法、神经网络算法等的出现提高了 DIC 的运算效率。智能算法具有全局搜索的特性,弥补了一般算法易陷入局部最优、匹配精度不稳定的缺陷,且其还可以近似地计算出亚像素级的位移值,在测量精度要求不高时是一个不错的选择。

随着对 DIC 研究的日臻完善,以及对测量精度

收稿日期: 2018-03-15; 修回日期: 2018-05-10; 录用日期: 2018-05-15

基金项目: 教育部留学回国人员科研启动基金(2015KJS010003)、安徽高校省级自然科学研究重点项目(KJ2016A037)、安徽省振兴计划项目(J05201343)、安徽大学研究生创新项目

* E-mail: guihuali1@163.com

的要求越来越高,基于智能算法的 DIC 法在整像素搜索速度上得到了大幅提高,但在亚像素级位移测量中还不能满足高精度测量的需求。因此,寻求在智能算法基础上的亚像素位移算法是 DIC 发展的方向,对保证数字图像处理的速度和精度都具有重要意义^[5]。传统的亚像素算法有牛顿迭代法、拟合法、插值法、梯度法等。根据相关文献的研究可知:牛顿迭代法的精度要优于其他几种亚像素算法^[6],但如果初值估计不合理就会陷入局部收敛,同时导致收敛速度变慢。因此,在实验中使用牛顿迭代法计算时,通常以模拟散斑图为对象,目标函数的 Hessian 矩阵选择一阶型函数。拟合法的速度比较快,但精度比较低;梯度法、插值法的精度、速度介于牛顿迭代法和拟合法之间^[7]。因此,考虑将智能算法运用在整像素搜索阶段。参考已有文献的研究,本文将自适应遗传算法(AGA)引入到 DIC 法中^[8-9],同时根据拟合法速度快、插值法精度高的特点,提出了一种将拟合法和插值法相结合的亚像素位移测量算法,称为组合式 DIC 算法;该算法在保证整像素搜索速度快的基础上,进一步提高了亚像素位移的测量精度,能够满足微小位移测量中对速度和精度的要求。

2 基于自适应遗传算法的 DIC 原理

遗传算法^[9-11]起源于生物的进化规则,基本的遗传算法是将求解问题表示为染色体的形式,一定数量的种群经过选择、交叉、变异过程后,会产生出新一代中适应度较高的个体,重新组合的种群继续进化下去,直到产生满足条件的个体,即求得最优解。编码即是把所求问题转换为染色体的形式,种群的大小关系到收敛速度的快慢,实验中可以根据需要人为设定种群的大小。种群初始化的表达式^[1]为

$$N = N_{lb} + (N_{ub} - N_{lb}) \cdot \text{rand}(S, n), \quad (1)$$

式中: N_{lb} 、 N_{ub} 分别为位移量的上下界; S 为种群量大小; n 为变量个数。

每产生一代新的解,就需要对其进行适应度评价,适应度高的个体被选择出来进入下一代,适应度低的个体则被淘汰。取适当的相关函数作为适应度高低的评价函数。

本文对交叉、变异概率进行了改进,使遗传控制参数 P_c 和 P_m 随个体适应度大小和种群的分散程度自动调整^[11]。当个体适应度接近最大值时,相应地减小交叉、变异的概率,以防止优良个体被淘汰;

当个体适应度较小时,增大交叉、变异的概率,以加快不良个体的淘汰速率。实验中的交叉概率 P_c 、变异概率 P_m 的表达式为^[12]

$$P_c = \begin{cases} k_1 \cdot \frac{f_{\max} - f'}{f_{\max} - f_{\text{avg}}}, & f' \geq f_{\text{avg}}, \\ P_{c1}, & f' \leq f_{\text{avg}} \end{cases}, \quad (2)$$

$$P_m = \begin{cases} k_2 \cdot \frac{f_{\max} - f}{f_{\max} - f_{\text{avg}}}, & f \geq f_{\text{avg}}, \\ P_{m1}, & f \leq f_{\text{avg}} \end{cases}, \quad (3)$$

式中: k_1 、 k_2 为 $[0,1]$ 之间的常数; f_{\max} 为群体的最大适应度; f_{avg} 为当代群体的平均适应度; f' 为交叉个体中较大的适应度; f 为参与变异个体的适应度; P_{c1} 为不变交叉概率,试验中取 $P_{c1} = 0.7$; P_{m1} 为不变变异概率,试验中取 $P_{m1} = 0.01$ 。

自适应遗传算法通过这种动态地调整交叉、变异概率,加快了算法的收敛速度,直接提高了 DIC 的搜索效率。DIC 的原理^[13-15]如图 1 所示,图 1(a)、(b)分别为变形前后的图像。首先,在变形前的图像中选择一个正方形区域作为参考子区,区域的中心点为待测点 (x, y) ;然后,将变形后的图像作为目标图像,在目标图像中进行相关搜索,根据相关系数的大小来衡量搜索的精度, (x', y') 即为目标图像中搜索到的最大匹配点,根据点 (x, y) 和点 (x', y') 即可求出变形量的大小,位移关系为: $x' = x + u$, $y' = y + v$ ^[16]。根据相关文献,本研究采用零均值归一化互相关函数的相关系数作为遗传算法适应度高低的的评价函数。相关系数的表达式为^[17]

$$C = \frac{\sum \sum (f_r - \bar{f}) \times (g - \bar{g})}{\sqrt{\sum \sum (f_r - \bar{f})^2} \sqrt{\sum \sum (g - \bar{g})^2}}, \quad (4)$$

式中: f_r 为参考图中像素点的灰度值; g 为目标图中像素点的灰度值; \bar{f} 和 \bar{g} 分别为 f_r 和 g 的平均值。 C 值越大,参考子区与目标图像的匹配度越好;当 $C = 1$ 时,说明参考子区与目标图像完全匹配。

3 亚像素位移测量算法原理

3.1 曲面拟合法

根据相关文献对拟合法的研究,本课题组选择二次曲面拟合法进行分析研究^[18]。拟合窗口为 $3 \text{ pixel} \times 3 \text{ pixel}$,布点如图 2 所示,点 5 为自适应遗传算法搜索到的最大相关系数点,其余的 8 个点以点 5 为中心。根据相关系数进行曲面拟合即可得到亚像素的位移量 x, y ,相关系数可用二元二次函数表示^[19]:

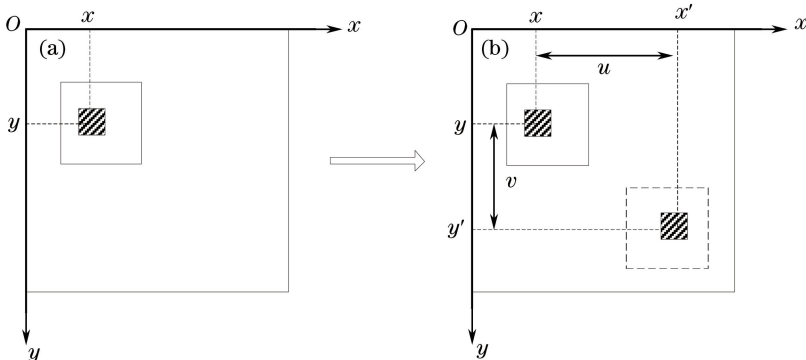


图1 DIC的基本原理。(a)变形前的图像;(b)变形后的图像

Fig. 1 Basic principle of DIC. (a) Image before deformation; (b) image after deformation

$$C(x_i, y_i) = a_0 + a_1 x_i + a_2 y_i + a_3 x_i^2 + a_4 x_i y_i + a_5 y_i^2, \quad (5)$$

式中: $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ 为二元二次函数的系数。

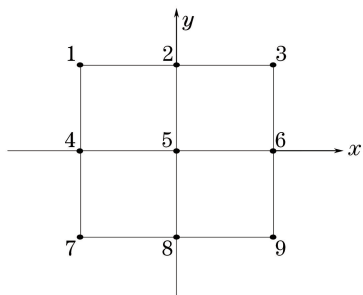


图2 二次曲面拟合示意图

Fig. 2 Diagram of quadric surface fitting

根据9个点的位置坐标,通过最小二乘法即可求得二元二次函数的系数 $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ 。函数 $C(x, y)$ 在拟合曲面的极值点处满足如下关系:

$$\begin{cases} \frac{\partial C(x, y)}{\partial x} = a_1 + 2a_3 x + a_4 y = 0 \\ \frac{\partial C(x, y)}{\partial y} = a_2 + 2a_5 y + a_4 x = 0 \end{cases}, \quad (6)$$

通过式(6)即可解得亚像素位移量为

$$\begin{cases} x = \frac{2a_1 a_5 - a_2 a_4}{a_4^2 - 4a_3 a_5} \\ y = \frac{2a_2 a_3 - a_1 a_4}{a_4^2 - 4a_3 a_5} \end{cases}. \quad (7)$$

3.2 灰度插值法

根据已有对插值法的相关研究,本课题组选择双三次样条插值^[20]进行分析研究。已知 $S(x_i, y_j)$ 具有连续的一阶、二阶导数, x_i 在 $[a, b]$ 内 ($i = 1, 2, \dots, n$), y_j 在 $[c, d]$ 内 ($j = 1, 2, \dots, m$), 插值节点 (x_i, y_j) 所对应的函数值为 $Y_{ij} = f(x_i, y_j)$ 。

首先,以 y_j 为插值节点, H_{ij} 为对应的函数值, y 为插值变量。令 $S(x, y_j) = f_i(x, y_j), y \in [y_j,$

$y_{j+1}]$, $h_j = y_j - y_{j-1}$, $S''(y_j) = M_j$ ($j = 1, 2, \dots, m$), 在 $[y_j, y_{j+1}]$ 作一维的三次样条插值:

$$S(x_i, y) = \frac{(y_j - y)^3}{6h_{j-1}} \cdot M_{j-1} + \frac{(y - y_{j-1})^3}{6h_{j-1}} \cdot M_j + \frac{y_j - y}{h_{j-1}} \cdot \left(H_{i, j-1} - \frac{M_j \cdot h_{j-1}^2}{6} \right) + \frac{y - y_{j-1}}{h_{j-1}} \cdot \left(H_{i, j} - \frac{M_j \cdot h_{j-1}^2}{6} \right), y \in (y_{j-1}, y_j), \quad (8)$$

令 $\mu_j = \frac{h_{j-1}}{h_{j-1} + h_j}$, $\lambda_j = 1 - \mu_j$, $\beta_j = \frac{6}{h_j + h_{j-1}} \cdot \left(\frac{H_{i, j+1} - H_{i, j}}{h_j} - \frac{H_{i, j} - H_{i, j-1}}{h_{j-1}} \right)$, ($j = 1, 2, \dots, m-1$),

根据边界条件 $S'(y_j + 0) = S'(y_j - 0)$, 式(8)可化简为

$$\mu_j M_{j-1} + 2M_j + \lambda_j M_{j+1} = \beta_j. \quad (9)$$

取自然边界条件,即 $M_1 = M_m = 0$, 联立式(9)即可求出 M , 将 M 代入式(8)即可求出 $S(x_i, y)$ 。

其次,以 x_i 为插值节点, $S(x_i, y)$ 为对应的函数值, x 为插值变量, 在 $[x_i, x_{i+1}]$ 作一维的三次样条插值:

$$S(x, y) = \frac{(x_i - x)^3}{6h_{j-1}} \cdot M_{j-1} + \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_{j-1}} \cdot M_j + \frac{x_i - x}{h_{j-1}} \cdot \left[S(x_i, y) - \frac{M_j \cdot h_{j-1}^2}{6} \right] + \frac{x - x_{j-1}}{h_{j-1}} \cdot \left[S(x_i, y) - \frac{M_j \cdot h_{j-1}^2}{6} \right], x \in (x_{i-1}, x_i), \quad (10)$$

令 $\mu_j = \frac{h_{j-1}}{h_{j-1} + h_j}$, $\lambda_j = 1 - \mu_j$, $\beta_j = \frac{6}{h_j + h_{j-1}} \cdot \left[\frac{S(x_{i+1}, y) - S(x_i, y)}{h_j} - \frac{S(x_i, y) - S(x_{i-1}, y)}{h_{j-1}} \right]$, ($i = 1, 2, \dots, n-1$), 根据边界条件 $S'(x_i + 0) = S'(x_i - 0)$, (10)式可化简为

$$\mu_j M_{j-1} + 2M_j + \lambda_j M_{j+1} = \beta_j. \quad (11)$$

取自然边界条件,即 $M_1 = M_n = 0$,联立(11)式即可求出 M ,将其代入(10)式即可求出 $S(x, y)$ 。

3.3 组合式 DIC 算法

正向增量型、正向组合型、反向增量型、反向组合型等匹配策略的精度高、稳定性好,在计算精度上等效,但对于微小位移测量并不是必要的选择。通过研究二次曲面拟合法和双三次样条插值法可知:曲面拟合法虽然在处理较大刚体转动和变形时的精度相对较低,但对于微小的位移量变化仍可适用;二次曲面拟合法对亚像素的处理速度比较理想,但精度只能达到 0.1 pixel 左右;双三次样条插值法的速度稍慢于二次曲面拟合法,但精度更高。因此,本课题组提出了一种组合式 DIC 算法,即以自适应遗传算法搜索到的最大相关系数点为插值中心,建立 3 pixel×3 pixel 的插值区域,进而根据相关系数对应的 x, y 值即可插值算出亚像素级的最大位移点。该算法综合了二次曲面拟合法、双三次样条插值法的优点,使得测量速度、精度都优于单独的任何一种。所提算法的具体步骤如下:

1) 通过自适应遗传算法得到低精度的亚像素

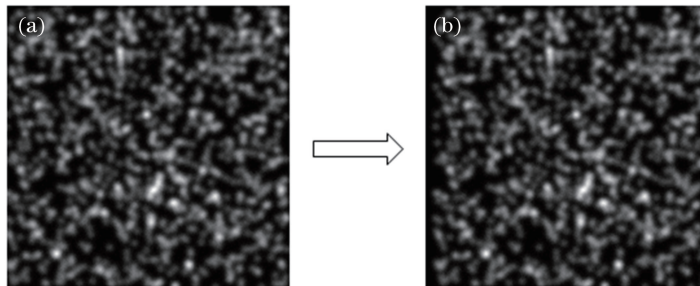


图 3 平移前后的模拟散斑图。(a) 平移前;(b) 平移后

Fig. 3 Simulated speckle pattern before and after translation. (a) Before translation; (b) after translation

在水平方向上,在 0.1~1 区间内,以 0.1 pixel 为步长生成 10 幅散斑图;在 1~10 区间内,以 1 pixel 为步长生成 10 幅散斑图。分别计算两组散斑图的 10 个位移点,参考子区窗口的大小为 51 pixel×51 pixel。数据处理分析的结果如图 4、5 所示。

从图 4、5 中可以看出:无论是在整像素还是在亚像素的微小位移测量中,组合式 DIC 算法的相对误差明显较小,表明其测量精度要优于二次曲面拟合法和双三次样条插值法;当平移量为亚像素级时,二次曲面拟合、双三次样条插值、组合式 DIC 算法这三种亚像素算法都可以测量到 0.1 pixel,但后者的相对误差明显小于前两者;当平移量为整像素时,随着位移量增大,三种亚像素算法的相对误差都近似呈现

级的最大相关系数点;

2) 根据图 2 所示的关系,以自适应遗传算法得到的最大相关系数点为点 5,建立 3 pixel×3 pixel 的拟合窗口,通过二次曲面拟合得到亚像素位移值;

3) 在步骤 2) 的基础上,以拟合得到的亚像素位移值为插值中心点,选取 3 pixel×3 pixel 的插值范围,插值间距的大小视具体情况而定,根据插值图形找出最大的插值点,即为插值以后的亚像素位移值;

4) 通过自适应遗传算法进行快速整像素匹配后,再经过二次曲面拟合法和双三次样条插值法两次亚像素位移方法计算以后,得到的最终亚像素位移值即为最优值。

4 算法验证

4.1 模拟散斑图验证

为了消除 CCD 在图像采集过程中产生的图像误差及外界因素的干扰,本课题组采用 Zhou 等^[21]提出的计算机模拟散斑图,该散斑图的尺寸为 256 pixel×256 pixel,散斑颗粒的大小为 4 pixel,散斑数为 1500。平移前后的模拟散斑图如图 3 所示。

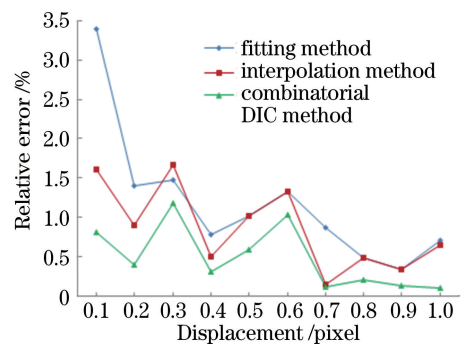


图 4 亚像素位移的相对误差

Fig. 4 Relative error of sub-pixel displacement

出减小的趋势,且组合式 DIC 算法整体上比较平稳,相对误差基本都在 0.1% 以下,可以满足亚像素测量精度的要求。对比图 4、5 还可发现,位移量为整像素

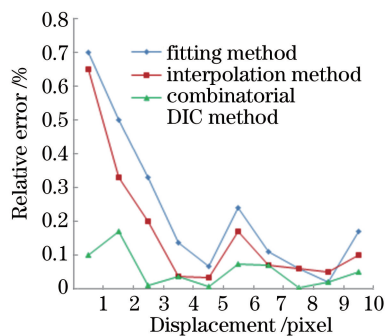


图5 整像素位移的相对误差

Fig. 5 Relative error of integer pixel displacement

时的相对误差较小,表明整像素位移时的测量精度要高于亚像素位移量时的测量精度。

由表1可知:与普通的整像素搜索算法相比,自

表2 组合式 DIC 算法的测量结果

Table 2 Measurement results of combinatorial DIC algorithm

Actual displacement /pixel	Measured displacement /pixel	Absolute error /pixel	Relative error /%
0.1	0.1016	0.0016	1.600
0.3	0.3039	0.0039	1.300
0.5	0.4971	0.0029	0.5800
0.7	0.6990	0.0010	0.1400
0.9	0.8970	0.0030	0.3300
2	1.9967	0.0033	0.1650
4	3.9985	0.0015	0.0375
6	6.0044	0.0044	0.0730
8	7.9998	0.0002	0.0025
10	10.0051	0.0051	0.0510

从表2中的数据可看出,不管设定的实际位移是整像素还是亚像素,组合式 DIC 算法测量出来的位移都可以达到亚像素级,且不同位移量时的绝对误差保持在 0.001~0.006 pixel 之间,相对误差也基本在 1%以内,完全可以满足亚像素级微小位移测量的需求。

5 结 论

以模拟散斑图为研究对象,从亚像素测量精度和搜索速度上对自适应遗传算法、二次曲面拟合法、双三次样条插值法进行对比分析,提出一种基于自适应遗传算法的组合式 DIC 算法。实验结果表明:该算法保留了自适应遗传算法在搜索速度上的优势,又吸收了二次曲面拟合法和双三次样条插值法在测量精度上的优点,满足了 DIC 在亚像素级微小位移测量中对搜索速度和测量精度的要求。

参 考 文 献

[1] Cheng Z J, Wang Q B, Chen J A, *et al.* Digital

适应遗传算法在搜索速度上有明显的优势,而所提组合式 DIC 算法在运行速度上也比较理想。综上,组合式 DIC 算法在搜索速度、测量精度上都有较好表现,可以满足亚像素级微小位移测量的需要。

表1 几种算法的搜索时间

Table 1 Search time of several algorithms

Fitting method	Interpolation method	AGA-fitting method	AGA-interpolation method	Combinatorial DIC method
1.6	1.9	0.43	0.51	0.58

4.2 实测结果

基于计算机模拟散斑图,将组合式 DIC 算法应用于亚像素级微小位移的测量中,实测结果如表2所示。

image correlation method based on hybrid genetic algorithm [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2016, 24(10): 710-717.

程振进, 王全保, 陈吉安, 等. 基于混合遗传算法的数字图像相关方法 [J]. *光学精密工程*, 2016, 24(10s): 710-717.

[2] Liu C, Dai Y T, Dai M L, *et al.* Deformation measurement by two-dimensional multi-camera full-field digital image correlation [J]. *Acta Optica Sinica*, 2016, 36(12): 1212002.

刘聪, 戴云彤, 戴美玲, 等. 二维多相机全场数字图像相关变形测量方法 [J]. *光学学报*, 2016, 36(12): 1212002.

[3] Shi L, Li H J, Zhang L, *et al.* Application of digital image correlation method in a material tensile test [J]. *Laser Journal*, 2017, 38(7): 81-84.

石亮, 李慧娟, 张鹭, 等. 数字图像相关法在材料拉伸试验中的应用 [J]. *激光杂志*, 2017, 38(7): 81-84.

[4] Zhou H F, Yang Q X, Yang J. Integer pixel digital speckle correlation method based on improved CS algorithm [J]. *Computer Engineering and Design*,

- 2015, 36(8): 2108-2113.
- 周海芳, 杨秋翔, 杨剑. 基于改进 CS 算法的整像素数字散斑相关方法[J]. 计算机工程与设计, 2015, 36(8): 2108-2113.
- [5] Pan B, Xie H M, Xu B Q, *et al.* Development of sub-pixel displacements registration algorithms in digital image correlation[J]. *Advances in Mechanics*, 2005, 35(3): 345-352.
- 潘兵, 谢惠民, 续伯钦, 等. 数字图像相关中的亚像素位移定位算法进展[J]. 力学进展, 2005, 35(3): 345-352.
- [6] Pan B, Xie H M, Xu B Q, *et al.* Performance of sub-pixel registration algorithms in digital image correlation [J]. *Measurement Science and Technology*, 2006, 17(6): 1615-1621.
- [7] Zhang A H, Lou X P, Lü N G. Comparison of sub-pixel algorithms based on digital image correlation [J]. *Journal of Beijing Information Science & Technology University*, 2013, 28(3): 53-56.
- 张爱华, 娄小平, 吕乃光. 数字图像相关中亚像素算法的比较[J]. 北京信息科技大学学报(自然科学版), 2013, 28(3): 53-56.
- [8] Hwang S F, Horn J T, Wang H J. Strain measurement of SU-8 photoresist by a digital image correlation method with a hybrid genetic algorithm [J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2008, 46(3): 281-289.
- [9] Ma S P, Jin G C. Digital speckle correlation method improved by genetic algorithm [J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2003, 16(4): 366-373.
- [10] Wang Q, Piao Y. Depth image acquisition technology based on improved genetic algorithm [J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2018, 55(2): 021003.
- 王琦, 朴燕. 基于改进遗传算法的深度图像获取技术[J]. 激光与光电子学进展, 2018, 55(2): 021003.
- [11] Yu G S, Yu X W. An improved adaptive genetic algorithm[J]. *Mathematics in Practice and Theory*, 2015, 45(19): 259-264.
- 于光帅, 于宪伟. 一种改进的自适应遗传算法[J]. 数学的实践与认识, 2015, 45(19): 259-264.
- [12] Chang C Y, Chen D R. Active noise cancellation without secondary path identification by using an adaptive genetic algorithm[J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2010, 59(9): 2315-2327.
- [13] Rossi M, Lava P, Pierron F, *et al.* Effect of DIC spatial resolution, noise and interpolation error on identification results with the VFM [J]. *Strain*, 2015, 51(3): 206-222.
- [14] Yang S, Shao L T, Zhao B Y, *et al.* Digital image correlation search method based on particle swarm algorithm [J]. *Applied Mechanics and Materials*, 2011, 71/78: 4234-4239.
- [15] Shan B H, Huo X Y, Liu Y. A stereovision measurement method using epipolar constraint to correct digital image correlation matching [J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2017, 44(8): 0804003.
- 单宝华, 霍晓洋, 刘洋. 一种极线约束修正数字图像相关匹配的立体视觉测量方法[J]. 中国激光, 2017, 44(8): 0804003.
- [16] Zhang H J, Li G H, Liu C, *et al.* Reliable initial guess based on SURF feature matching in digital image correlation[J]. *Acta Optica Sinica*, 2013, 33(11): 1112005.
- 张华俊, 李桂华, 刘程, 等. 基于 SURF 特征匹配的数字图像相关变形初值可靠估计[J]. 光学学报, 2013, 33(11): 1112005.
- [17] Pan B, Xie H M, Wang Z Y. Equivalence of digital image correlation criteria for pattern matching [J]. *Applied Optics*, 2010, 49(28): 5501-5509.
- [18] Zhang T D, Lu R S, Yang L. Subpixel displacement registration using polynomial surface fitting in DIC [J]. *Laser Journal*, 2016, 37(11): 141-144.
- 张腾达, 卢荣胜, 杨蕾. DIC 中亚像素位移测量的多项式曲面拟合法[J]. 激光杂志, 2016, 37(11): 141-144.
- [19] Gu G Q, Wang K F, Xu X. Measurement of in-plane micro-rotations and rotation-center location of a rigid body by using digital image correlation[J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2012, 39(1): 0108004.
- 顾国庆, 王开福, 许星. 基于数字图像相关的刚体面内微小转动测量及转动中心定位[J]. 中国激光, 2012, 39(1): 0108004.
- [20] Wu J, Liu K P, Le J, *et al.* Study on harmonic analysis based on cubic spline interpolated arithmetic fourier transform [J]. *Electrical Measurement & Instrumentation*, 2016, 53(1): 15-18, 31.
- 武婕, 刘开培, 乐健, 等. 基于三次样条插值的算术傅里叶谐波分析方法[J]. 电测与仪表, 2016, 53(1): 15-18, 31.
- [21] Zhou P, Goodson K E. Subpixel displacement and deformation gradient measurement using digital image/speckle correlation [J]. *Optical Engineering*, 2001, 40(8): 1613-1620.