

基于模式系数求解的相位解缠算法研究

庞博清^{1,2,3}, 王帅^{1,3}, 杨平^{1,3*}

¹中国科学院自适应光学重点实验室, 四川 成都 610209;

²中国科学院大学, 北京 100049;

³中国科学院光电技术研究所, 四川 成都 610209

摘要 提出一种基于波前像差模式系数求解的相位解缠算法,该算法是基于波前可利用 Zernike 多项式进行精确表示来实现的。它通过求解对应 Zernike 多项式的系数,实现快速精确的相位解缠。以基于二元像差模式测量的波前传感技术中的相位解缠为研究目标,利用数值仿真对该算法的可行性进行验证。数值仿真结果表明,相对于最小二乘法而言,该相位解缠算法在解缠绕的精度和速度等方面均实现了大幅度提升。

关键词 相位解缠; 波前像差; 波前探测; 大气湍流; Zernike 多项式; 最小二乘法

中图分类号 O436

文献标识码 A

doi: 10.3788/LOP55.111004

Phase Unwrapping Algorithm Based on Mode Coefficient Solution

Pang Boqing^{1,2,3}, Wang Shuai^{1,3}, Yang Ping^{1,3*}

¹Key Laboratory on Adaptive Optics, Chinese Academy of Sciences, Chengdu, Sichuan 610209, China;

²University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China;

³Institute of Optics and Electronics, Chinese Academy of Sciences, Chengdu, Sichuan 610209, China

Abstract A phase unwrapping algorithm is proposed based on the coefficient solution of wavefront aberration mode. The algorithm is implemented on the basis that wavefront can be accurately represented by Zernike polynomials. By solving the coefficients of the corresponding Zernike polynomials, we realized a fast and accurate phase unwrapping. Taking the phase unwrapping in the wavefront sensing based on binary aberration mode measurement as the research target, we verify the feasibility of the algorithm by numerical simulation. Numerical simulation results show that compared with the least square phase unwrapping algorithm, the proposed phase unwrapping algorithm realizes a great improvement in accuracy and speed of unwrapping.

Key words phase unwrapping; wavefront aberration; wavefront detection; atmospheric turbulence; Zernike polynomials; least-square method

OCIS codes 100.5088; 120.5050; 010.7350

1 引言

相位解缠技术是一种从缠绕相位中恢复原始相位的技术,被广泛地应用于光学测量、核磁共振成像以及合成孔径雷达等研究中。常见的相位解缠绕算法主要有两类:一类为路径跟踪解缠绕算法,该类算法通过选取合适的积分路径实现相位解缠绕,主要包括枝切法^[1-2]和质量图导向法^[3-4]等;另一类是基

于最小范数的相位解缠算法,通过将相位解缠问题转化为最优化问题进行求解,包括最小二乘法^[5-11]和网络规划法^[12]。

实际上,很多基于相位实现测量的领域都有可能涉及到相位解缠,基于二元像差模式测量的波前传感技术^[13]就是其中之一。该波前传感技术通过求解离散的 Walsh 函数^[14]系数实现光场重建,并对重建的光场进行波前提取以实现波前测量。从光场

收稿日期: 2018-03-30; 修回日期: 2018-04-18; 录用日期: 2018-05-28

基金项目: 国家重大科研装备研制项目(ZDYZ2013-2)、四川省青年创新基金(2012JQ0012)、中国科学院创新基金(CXJJ-16M208)

* E-mail: pingyang2516@163.com

中提取的相位值域被限定为 $(-\pi, \pi]$, 即该相位发生了缠绕。为了实现波前的精确探测, 需要对缠绕相位进行相位解缠。

相位解缠的思路通常是求解与真实相位相差 2π 倍数的缠绕相位, 从而实现相位解缠。而在波前探测过程中, 波前像差是一种具有较强规律性的待测目标。通常情况下, 波前可以利用一组二维多项式的线性组合进行表示。其中, Zernike 多项式是一组单位圆内正交的函数, 与 Seidel 像差项相对应, 能够有效描述光学系统中的像差。同时, Zernike 多项式能够有效表示大气湍流引入的动态波前。例如, 大气湍流引起的波前像差一般会符合 Kolmogorov 湍流模型, 可利用 Zernike 多项式进行表示^[15]。

据此, 本文提出一种波前的相位解缠方法。该波前传感技术中利用 Walsh 函数对光场进行表示, 因此求解得到的单个扇形内波前的相位值相同。该相位值可以利用单个值进行等效表示, 以降低相位解缠所需处理的数据量。然后, 利用 Zernike 多项式对“真实波前”进行表示, 并利用最小二乘法对 Zernike 多项式的系数进行求解, 利用求解得到的 Zernike 多项式系数对波前进行重建。

2 基本原理介绍

基于波前的相位解缠方法是先利用 Walsh 函数对待测光束的光场进行展开, 展开形式为

$$E(x, y) = A \cdot e^{i\varphi} = A \cdot \cos \varphi + iA \cdot \sin \varphi = \sum_{l=0}^N a_l W_l + i \cdot \sum_{l=0}^N b_l W_l = \sum_{l=0}^N B_l W_l, \quad (1)$$

式中, A 为光场的振幅, φ 为光场的相位, W_l 为第 l 项 Walsh 函数, a_l 为光场实部 $A \cos \varphi$ 的第 l 项 Walsh 函数的展开系数, b_l 为光场虚部 $A \sin \varphi$ 的第 l 项 Walsh 函数的展开系数, 且有

$$B_l = a_l + ib_l. \quad (2)$$

对光场的展开系数 B_l 进行求解, 并利用求解得到的系数对波前进行重构, 可得

$$\varphi = -i \ln(e^{i\varphi}) = -i \ln\left(\sum_{l=0}^N B_l W_l / A\right), \quad (3)$$

式中, φ 为重构得到的缠绕相位, 值域为 $(-\pi, \pi]$ 。

在自适应光学中, 待测波前的波动通常在波长数量级内, 因此缠绕相位中不满足连续性要求的相位点通常是少数, 因此可以通过让缠绕相位的差分和解缠相位的差分之间的差的平方和最小, 来实现相位解缠。即相位解缠可转化为对目标函数 J 最小值的求解:

$$J = \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=1}^N |\varphi_{m+1,n} - \varphi_{m,n} - \Delta_{m,n}^x|^2 + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^{N-1} |\varphi_{m,n+1} - \varphi_{m,n} - \Delta_{m,n}^y|^2, \quad (4)$$

式中, M 和 N 为待测波前的分辨率, $\varphi_{m,n}$ 为待测波前 φ 中点 (m, n) 的相位, 且有

$$\begin{cases} \Delta_{m,n}^x = W(\phi_{m+1,n} - \phi_{m,n}) \\ \Delta_{m,n}^y = W(\phi_{m,n+1} - \phi_{m,n}) \end{cases}, \quad (5)$$

式中: W 为缠绕运算符, 为对 2π 取模; $\Delta_{m,n}^x$ 和 $\Delta_{m,n}^y$ 表示缠绕相位的差分, 值域为 $(-\pi, \pi]$ 。利用矩阵理论可以将其转化为线性方程组解的最优化问题^[16], 即求解得到的最优解满足

$$\begin{aligned} (\varphi_{m+1,n} - 2\varphi_{m,n} + \varphi_{m-1,n}) + \\ (\varphi_{m,n+1} - 2\varphi_{m,n} + \varphi_{m,n-1}) = \rho_{m,n}, \end{aligned} \quad (6)$$

其中,

$$\rho_{m,n} = (\Delta_{m,n}^x - \Delta_{m-1,n}^x) + (\Delta_{m,n}^y - \Delta_{m,n-1}^y). \quad (7)$$

通常情况下, 待测波前可以利用 Zernike 多项式进行表示:

$$\varphi = \sum_{k=1}^K c_k Z^{(k)}, \quad (8)$$

式中, k 为波前表示中所用的 Zernike 多项式的项数, c_k 为第 k 项 Zernike 多项式的系数。将(8)式代入(6)式中可得

$$\sum_{k=1}^K c_k \{ [Z_{m+1,n}^{(k)} - 2Z_{m,n}^{(k)} + Z_{m-1,n}^{(k)}] + [Z_{m,n+1}^{(k)} - 2Z_{m,n}^{(k)} + Z_{m,n-1}^{(k)}] \} = \rho_{m,n}, \quad (9)$$

式中, $Z_{m,n}^{(k)}$ 为第 k 项 Zernike 多项式在点 (m, n) 的相位, 可以通过理论计算求得。在(9)式中, 仅有 Zernike 函数的系数 c_k 为未知量。将(9)式表示为矩阵的形式:

$$\begin{bmatrix} u_{1,1}^{(1)} & u_{1,1}^{(2)} & \cdots & u_{1,1}^{(k)} \\ u_{1,2}^{(1)} & u_{1,2}^{(2)} & \cdots & u_{1,2}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{N-1,M-1}^{(1)} & u_{N-1,M-1}^{(2)} & \cdots & u_{N-1,M-1}^{(k)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{1,1} \\ \rho_{1,2} \\ \vdots \\ \rho_{N-1,M-1} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

其中,

$$u_{m,n}^{(k)} = [Z_{m+1,n}^{(k)} - 2Z_{m,n}^{(k)} + Z_{m-1,n}^{(k)}] + [Z_{m,n+1}^{(k)} - 2Z_{m,n}^{(k)} + Z_{m,n-1}^{(k)}]. \quad (11)$$

将(10)式简写为

$$U \times c = \rho, \quad (12)$$

进而可求得

$$c = U^+ \cdot \rho, \tag{13}$$

式中, U^+ 为 U 的广义逆矩阵。将求得的 Zernike 多项式的系数 c 代入(8)式可得解缠后的波前。

3 相位等效处理

在基于二元像差模式测量的波前传感技术中, 利用 Walsh 函数进行展开并通过求解展开系数实现光场重构, 然后根据重构的光场对波前进行求解。二维极坐标下的 Walsh 函数通过在相应的扇形区域内填入 +1 或 -1 得到^[17]。其中, 扇形区域是对单位圆在半径方向和角度方向上进行切分形成的, 如图 1(a)所示。图 1(b)为生成的二维极坐标下的 Walsh 函数。

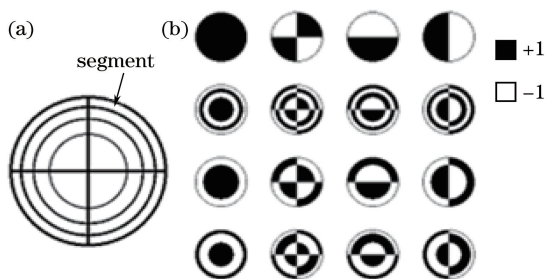


图 1 Walsh 函数。(a)切分得到的扇形单元; (b)二维极坐标下的 Walsh 函数

Fig. 1 Walsh function. (a) Sector elements generated by segmentation; (b) Walsh functions in two-dimensional polar coordinate

从图 1 可知, Walsh 函数在单个扇形单元内的值不变。因此, 在单个扇形单元区域内, 基于 Walsh 函数表示的光场的值也不变, 相应地, 根据(3)式计算得到的相位也是如此。为了缩减波前表示所用的数据量, 对波前进行了等效。单个扇形单元内的值相同, 所以采用单个相位值对扇形单元的相位进行表示。等效相位表示为矩阵形式, 如图 2 所示。其

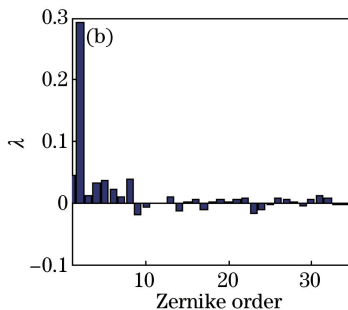
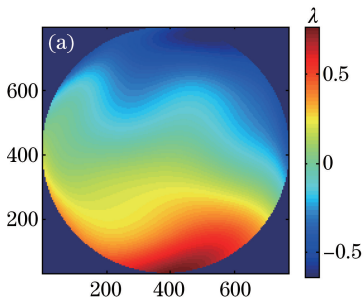


图 3 入射波前。(a)波前形状; (b) Zernike 多项式系数

Fig. 3 Incident wavefront. (a) Wavefront shape; (b) Zernike polynomial coefficients

中, 横坐标表示圆周角度, 纵坐标表示半径的平方。

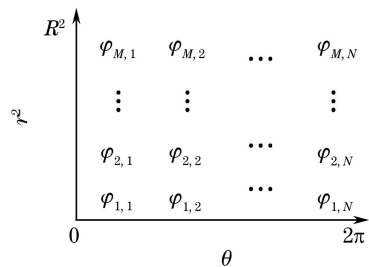


图 2 波前的等效相位

Fig. 2 Equivalent phase of wavefront

相位等效处理大幅压缩了相位表示所需的数据量, 从而减少了相位解缠中所需处理的数据量, 提升了波前重构速度。通常情况下, 波前的分辨率和所选用的空间光调制器件的分辨率相对应。空间光调制器的分辨率通常可达到数十万乃至数百万, 经过相位等效后相位矩阵的数据量可下降为数百个^[13,18]。

此外, 等效后的相位矩阵缺失了某些相邻关系的表示。例如, $\varphi_{m,1}$ 和 $\varphi_{m,N}$ 所代表的扇形区域在实际空间中是相邻的, 而等效后的矩阵却没有体现出该相邻关系; $\varphi_{1,n}$ ($n = 1, \dots, N$) 表示圆心区域扇形的相位, 空间上彼此相邻, 等效后的矩阵也没有体现此相邻关系。

4 数值仿真及分析

通过数值仿真对该相位解缠算法的可行性和有效性进行验证。首先, 根据 Kolmogorov 湍流模型, 利用 Zernike 多项式的前 35 项生成随机入射波前, 如图 3(a)所示。基于此生成的波前能够在一定程度上表征大气湍流引起的波前像差, 峰值(PV)为 1.40λ , 均方根(RMS)为 0.31λ 。图 3(b)为随机入射波前所对应的 Zernike 多项式的系数^[15]。

利用前 256 项 Walsh 函数对入射光场进行重建,并根据(3)式,对波前相位进行求解,求解得到的缠绕相位如图 4(a)所示。从图 4(a)可以看到,提取

得到的相位发生了相位缠绕,与原始の入射波前的形状不符。为实现波前的精确重构,需要对得到的缠绕相位进行相位解缠处理。

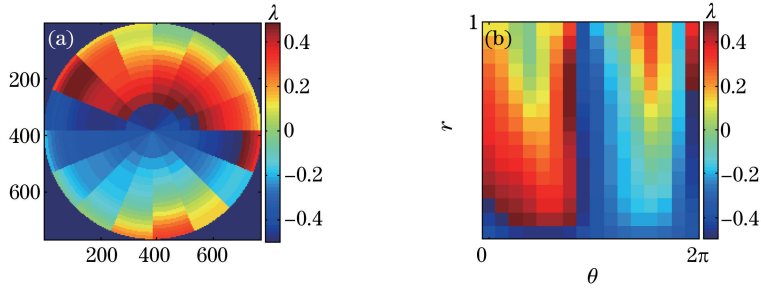


图 4 相位重构。(a)缠绕相位;(b)等效相位

Fig. 4 Phase reconstruction. (a) Wrapped phase; (b) equivalent phase

为降低相位矩阵的数据量,对提取得到的相位进行相位等效处理,如图 4(b)所示,相位的数据量从 768×768 降为 16×16 。其中, 768×768 为仿真中入射波前的分辨率,该值参照常见的空间光调制器的空间分辨率进行选取; 16×16 为波面分割形成的扇形单元的个数,与光场重构中使用的 Walsh 函数的数量相等^[13]。通过对比两个数据量的大小可以得出,波前等效处理使数据量大幅降低。将等效后相位矩阵代入(7)式可以求得 $\rho_{m,n}$,将其重写成一维列向量,即 ρ 。

在相位求解过程中对待测波前的相位进行等效,为了能够利用 Zernike 多项式对等效后的相位进行表示,对前 35 项 Zernike 多项式中的每一项分别进行离散重构,并对重构后的相位进行等效,结果如图 5 所示。其中,图 5 中的第一行为 Zernike 多项式对应的面型,第二行为相应的离散重构面型,第三行为等效相位。等效后,单项 Zernike 多项式可以利用 16×16 的矩阵进行代替。将 Zernike 多项式各项的等效相位值分别代入(11)式中,可求得

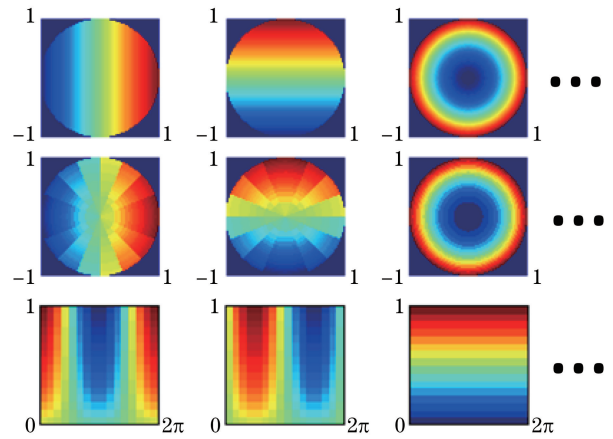


图 5 Zernike 多项式等效相位

Fig. 5 Equivalent phase of the Zernike polynomials

$u_{m,n}^{(k)}$,并将其组合可求得矩阵 U ,进而获得其广义逆 U^+ 。其中, U 是由所选取的 Zernike 多项式决定的量,其值与待测波前无关。

根据(13)式,利用求解得到的 ρ 和 U^+ 对 Zernike 多项式各项的系数进行求解,求解结果如图 6(a)所示。图 6(b)为 Zernike 多项式系数的求解误差。

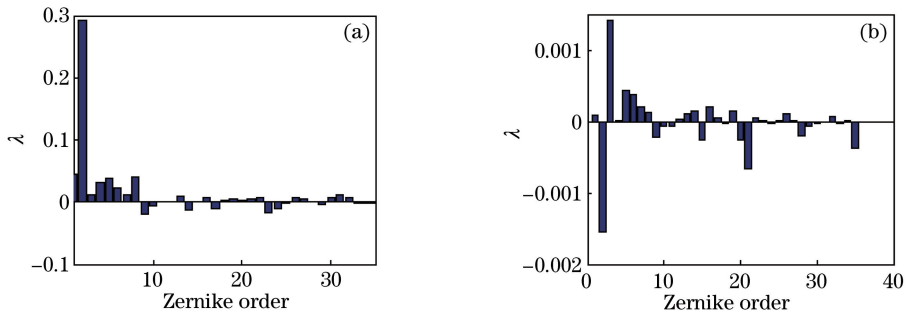


图 6 Zernike 多项式系数求解结果。(a) Zernike 多项式系数;(b) Zernike 多项式系数的求解误差

Fig. 6 Results of the Zernike polynomial coefficients. (a) Zernike polynomial coefficients; (b) error values of the retrieval Zernike polynomial coefficients

根据(8)式,利用求得的 Zernike 多项式的系数对待测波前进行重构,结果如图 7(a)所示。图 7(b)为重构误差, $x_{PV}=0.0092\lambda$, $x_{RMS}=0.0024\lambda$ 。

从仿真结果可得,通过求解模式系数来对波前进行解缠绕的方法可以实现波前的精确重构,验证了该方法的有效性。同时,通过求解 Zernike 多项

式的系数,相位解缠实现了离散波前相位的平滑^[13],避免了相位平滑过程中的时间损耗。

此外,利用等效相位矩阵代替 Zernike 多项式进行重构,可以得到待测波前的等效相位,如图 8(b)所示。图 8(a)和 8(c)分别为入射波前的等效相位和等效相位的重构误差示意图。

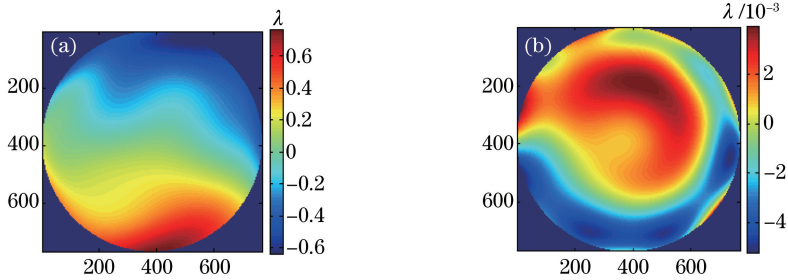


图 7 波前重构结果。(a)重构波前;(b)波前重构误差

Fig. 7 Wavefront reconstruction results. (a) Reconstructed wavefront; (b) wavefront reconstruction error

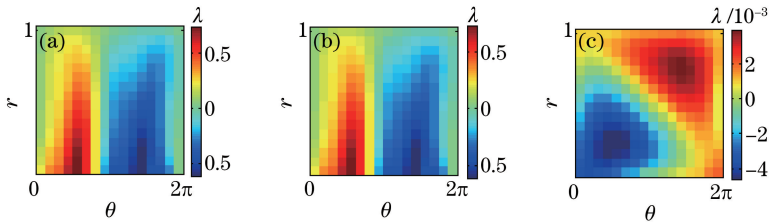


图 8 基于等效相位矩阵的相位重构结果。(a)入射波前等效相位;(b)重构波前等效相位;(c)等效相位重构误差

Fig. 8 Phase reconstruction results based on the equivalent phase matrix. (a) Equivalent phase of the incident wavefront;

(b) equivalent phase of the wavefront reconstruction; (c) error of the equivalent phase reconstruction

将入射波前的等效相位视为原始相位,Zernike 多项式的等效相位视为一组可对该等效相位进行表示的“函数”,则该相位解缠可以视为通常意义下的二维相位解缠。这说明对于原始相位可以利用有限函数精确表示相位解缠问题,该相位解缠算法同样具有一定的适用性。

波前重构的过程中,利用 Walsh 对由 Zernike 多项式生成的随机波前展开重建,得到缠绕相位,并通过求解 Zernike 多项式的系数实现波前解缠,得

到重构波前。其中,光场展开时所使用的 Walsh 函数的项数和波前解缠时所使用的 Zernike 多项式的项数都会影响波前测量的精度。为了探讨波前展开时所使用的 Walsh 函数的项数和波前解缠过程中所使用的 Zernike 多项式的项数对测量精度的影响,利用不同项数的 Walsh 函数对光场进行展开并进行求解,并在波前解缠过程中采用不同项数的 Zernike 多项式进行波前展开,结果如表 1 所示。

表 1 残余波前的均方值

Table 1 RMS of the residual wavefront

Number of Zernike function	Number of Walsh function			
	128	256	512	1024
35	0.0042 λ	0.0024 λ	0.0021 λ	0.0017 λ
65	0.0158 λ	0.0033 λ	0.0022 λ	0.0019 λ

从表 1 中可以看出,随着波前展开过程中所使用的 Walsh 函数项数的增加,求解的残余波前的 RMS 减小。当 Walsh 函数的项数大于 256 项时,由 Walsh 项数增加带来的波前精度的提升幅度减小。所以,在实验中选择前 256 项 Walsh 函数对波前进

行表示。最小二乘相位解缠算法是一种基于全局优化的相位解缠算法,解缠得到的相位并不是在缠绕波前的基础上增加 2π 倍或减小为原来的 $1/(2\pi)$ 而得到。利用最小二乘相位解缠算法对缠绕波前进行解缠时,得到的波前会在真实波前的基础上有一个

伸缩变形。当利用 65 项 Zernike 多项式进行波前解缠时,其中的第 36 项至第 65 项 Zernike 多项式会对该变形进行拟合并被记入残余波前。所以如表 1 所示,当采用 65 项 Zernike 多项式进行波前解缠时,残余波前的 RMS 反而略大。

为了对该相位解缠算法的性能进行分析,对该算法与最小二乘相位解缠算法的求解精度和速度进行对比。其中,最小二乘相位解缠算法选取的是基于快速傅里叶变换的最小二乘法。对比结果如表 2 所示。

表 2 解缠绕算法性能对比

Table 2 Performance comparison of phase unwrapping algorithm

Phase unwrapping algorithm	Time /s	RMS / λ
Least-square	0.156	0.152
Proposed algorithm	0.0008	0.0024

从仿真结果中可以发现,研究使用的基于模式系数求解的相位解缠算法的求解速度更快,精度更高。

5 结 论

研究介绍了一种通过求解像差模式系数来实现相位解缠的算法。基于先验性知识——波前像差可以利用 Zernike 多项式进行表示,该算法实现了待测波前的快速精确解缠。从仿真结果看,相比于基于快速傅里叶变换的最小二乘相位解缠算法,该算法具有更高的求解速度和求解精度。对于基于二元像差模式测量的波前传感技术来说,该相位解缠算法通过求解 Zernike 多项式的系数在实现相位解缠的同时实现了波前的平滑和波前重构速度的进一步提升。

参 考 文 献

- [1] Goldstein R M, Zebker H A, Werner C L. Satellite radar interferometry: two-dimensional phase unwrapping[J]. *Radio Science*, 1988, 23(4): 713-720.
- [2] Gutmann B, Weber H. Phase unwrapping with the branch-cut method: role of phase-field direction[J]. *Applied Optics*, 2000, 39(26): 4802-4816.
- [3] Ghiglia D C, Pritt M D. Two-dimensional phase unwrapping: theory, algorithms, and software[M]. New Jersey: Wiley Inter Science, 1998.
- [4] Quan C G, Tay C J, Chen L J, *et al.* Spatial-fringe-modulation-based quality map for phase unwrapping[J]. *Applied Optics*, 2003, 42(35): 7060-7065.
- [5] Ghiglia D C, Romero L A. Robust two-dimensional weighted and unweighted phase unwrapping that uses fast transforms and iterative methods[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 1994, 11(1): 107-117.
- [6] Ghiglia D C, Romero L A. Minimum L^p -norm two-dimensional phase unwrapping [J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 1996, 13(10): 1999-2013.
- [7] Qian X F, Rao F, Li X H, *et al.* Accurate least-squares phase unwrapping algorithm [J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2012, 39(2): 0209001.
钱晓凡, 饶帆, 李兴华, 等. 精确最小二乘相位解包裹算法[J]. *中国激光*, 2012, 39(2): 0209001.
- [8] Guo Y, Chen X T. Study of improved phase unwrapping algorithm based on least squares [J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2014, 41(5): 0508005.
郭媛, 陈小天. 基于最小二乘相位解包裹改进算法的研究[J]. *中国激光*, 2014, 41(5): 0508005.
- [9] Wu J, Zhou H, Wu D, *et al.* Study of phase unwrapping algorithm from the under sampled phase [J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2016, 53(5): 051003.
吴杰, 周皓, 吴丹, 等. 欠采样条件下相位解包裹算法的研究[J]. *激光与光电子学进展*, 2016, 53(5): 051003.
- [10] Guo Y, Yang Z, Wu Q. Unwrapping method for local high density residual point wrapped phase[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2017, 54(4): 041202.
郭媛, 杨震, 吴全. 局部高密度残差点包裹相位的解包方法[J]. *激光与光电子学进展*, 2017, 54(4): 041202.
- [11] Pritt M D, Shipman J S. Least-squares two-dimensional phase unwrapping using FFT's [J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 1994, 32(3): 706-708.
- [12] Costantini M. A novel phase unwrapping method based on network programming [J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 1998, 36(3): 813-821.
- [13] Pang B Q, Wang S, Cheng T, *et al.* Wavefront reconstruction algorithm for wavefront sensing based on binary aberration modes [J]. *Chinese Physics B*, 2017, 26(5): 054204.
- [14] Walsh J L. A closed set of normal orthogonal functions [J]. *American Journal of Mathematics*,

- 1923, 45(1): 5-24.
- [15] Noll R J. Zernike polynomials and atmospheric turbulence [J]. Journal of the Optical Society of America, 1976, 66(3): 207-211.
- [16] Hunt B R. Matrix formulation of the reconstruction of phase values from phase differences[J]. Journal of the Optical Society of America, 1979, 69(3): 393-399.
- [17] Hazra L N. Walsh filters for tailoring of resolution in microscopic imaging[J]. Micron, 2007, 38(2): 129-135.
- [18] Wang S, Yang P, Ao M W, *et al.* Wavefront sensing by means of binary intensity modulation[J]. Applied Optics, 2014, 53(35): 8342-8349.