

# 基于 Zernike 多项式光滑优化的均匀方斑透镜设计

张航\*\*, 陆建东\*, 刘锐, 马佩服

浙江工业大学理学院光电子智能化技术研究所, 浙江 杭州 310000

**摘要** 采用二次支撑面法(SQM)设计了一种均匀方斑透镜,建立了 Zernike 正交多项式曲面插值重构算法。在初始基面上对每一个子面选择映射守恒点,并按照相邻关系划分 9 点系统。针对 9 点系统,利用多项式的低阶项建立了线性方程组,并根据其唯一解构造了部分曲面。将所有部分曲面拼接,得到了完整的连续光滑的优化曲面。该算法可在一定程度上简化 SQM 初始基面的后期优化,得到良好的均匀方斑透镜设计效果。

**关键词** 光学设计; 非成像光学; 曲面光滑优化; Zernike 多项式; 二次支撑面法

中图分类号 O435

文献标识码 A

doi: 10.3788/LOP55.102202

## Design of Uniform Square Spot Lens Based on Smooth Optimization of Zernike Polynomials

Zhang Hang\*\*, Lu Jiandong\*, Liu Rui, Ma Peifu

*Institute of Optoelectronics Intelligent and Technology, College of Science, Zhejiang University of Technology, Hangzhou, Zhejiang 310000, China*

**Abstract** A uniform square spot lens is designed by the supporting quadratic method (SQM) and an algorithm for the interpolation and reconstruction of the curved surfaces based on the Zernike polynomials is developed. The mapping conservation points are chosen on the initial base surface for each sub-surface and the 9-point system is partitioned according to the adjacency relationship. As for this 9-point system, the linear equation group is established by using the lower order terms included in the polynomials and the partial curved surface is constructed with its unique solution. All the partial curved surfaces are spliced together and thus a complete and continuously smooth curved surface is obtained. This algorithm can simplify the later optimization of the initial base surfaces in SQM to a certain extent, which can ensure a good design effect of the uniform square spot lens.

**Key words** optical design; non-imaging optics; smooth optimization of curved surface; Zernike polynomials; supporting quadratic method

**OCIS codes** 220.4298; 220.2945; 220.3630

## 1 引言

与二维光学设计相比,三维光学设计的适用范围更广,技术难度更高,难度也更大。常见的均匀方斑透镜的设计方法众多,利用多焦点叠加的非涅耳透镜和矩形阵列式发光二极管(LED)透镜等均可得到良好的效果,但是这些方法对光源特性及光效等的限制较大<sup>[1-2]</sup>。单自由曲面透镜的曲面灵活、角度大、整体度高且便于加工,接受度较高<sup>[3]</sup>,但由于映射关系不可积以及目标光斑非旋转对称等原因,其

往往无法得到理想的结果。使用配焦椭流面法或偏微分方程(PDE)方法设计矩形光斑透镜<sup>[4-6]</sup>时,所得的光斑未经复杂优化始终无法达到高均匀度的效果,光斑内部的交叉亮区域及边界误差难以消除。

二次支撑面法(SQM)是最不依赖于映射关系的方法之一,实际上它是包括支撑抛物面(SP)、支撑椭球面(SE)、支撑卵形线(SO)等方法在内的一种二次曲面法的总称,最早由 Olikier 等<sup>[7]</sup>提出。SQM 根据光源和目标面离散点之间的位置关系,利用光程常数求解子面,并根据不同子面之间的相互

收稿日期: 2018-04-11; 修回日期: 2018-05-06; 录用日期: 2018-05-23

基金项目: 国家自然科学基金(61474100)

\* E-mail: lujdzjut@163.com; \*\* E-mail: physzhang@zjut.edu.cn

叠加包覆来获得最外部分的初始基面。

初始基面由不同子面机械拼接而成,本身并非连续光滑,很难在实际照明设计中加工并应用。本文针对该问题,提出了一种基于 Zernike 多项式的曲面优化算法,在初始基面上利用重心算法寻找型值点,在 9 点系统内通过多项式的低阶项建立线性方程组并构造部分曲面,拼接部分可获得整体连续光滑的优化曲面。这种新型的优化算法原理简单,方便快捷,效果良好,可以简化 SQM 的后期优化过程,适用于均匀方斑透镜的设计。

## 2 SQM 原理及其优化

SO 方法常用于透镜设计,其基于笛卡儿卵形线本身的光学性质:从光源  $O$  点发出的光线经卵形

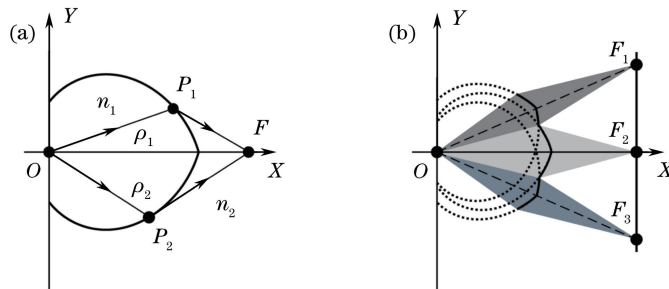


图 1 SO 方法原理。(a) 卵形线定义;(b) SO 方法

Fig. 1 Principle of SO method. (a) Oval definition; (b) SO method

初始基面本身凹凸不平,虽然其映射关系可以得到良好的保证,但不便于实际应用。SQM 的后期优化重点是在保证映射关系不变的前提下,使曲面整体连续光滑,光斑呈连续分布。Ma 等<sup>[8]</sup>提出了一种混合优化设计方法,在 SQM 的基础上,利用折反射定律和能量守恒定律,建立了椭圆形的 Monge-Ampère 非线性偏微分方程,在边界条件限定的情况下可求得方程的唯一解。但该方法适用范围不大且原理复杂、耗时冗长。

## 3 优化算法

### 3.1 Zernike 多项式

Zernike 多项式是光学设计中常用的多项式之一,由于其各项系数与不同像差之间的对应关系,在成像光学中它也常被用于拟合波前来分析光学表面的像差类型和大小<sup>[9-10]</sup>。Zernike 多项式的定义满足

$$\begin{cases} Z_n^m(\rho, \varphi) = R_n^m(\rho) \cos(m\varphi), & \text{odd number} \\ Z_n^{-m}(\rho, \varphi) = R_n^m(\rho) \sin(m\varphi), & \text{even number} \end{cases} \quad (2)$$

式中  $n-m$  的值的奇偶性决定了方程的奇偶性; $n$  和

线表面  $P$  点折射之后必定落在目标面的第二焦点  $F$  上,如图 1(a)所示,其中  $OXY$  为坐标系, $P_1$ 、 $P_2$  为卵形线表面的折射点, $\rho_1$ 、 $\rho_2$  分别为  $P_1$ 、 $P_2$  点到  $O$  点的距离。

笛卡儿卵形线的光程常数  $K$  定义为

$$n_1 |OP| + n_2 |PF| = K, \quad (1)$$

式中  $n_1$  和  $n_2$  分别为空间不同的折射率。(1)式表示卵形线上任意一点  $P$  与两焦点连线的长度和对应折射率的乘积之和为常数  $K$ ,称作光程常数。如图 1(b)所示,目标面上不同的焦点  $F_1$ 、 $F_2$ 、 $F_3$  均可构造属于它们的子面,这些子面相互交错叠加覆盖,最终露出在外的有效部分组成初始基面。为了使各个像素点上的通量满足预设值,可以通过调整光程常数来改变对应子面的大小,有效部分所占的通量也会改变。

$m$  均为非负整数, $n$  为多项式主阶层, $m$  为亚阶层; $\rho$  为径向距离, $0 < \rho < 1$ ;  $\varphi$  为方位角;参量  $R_n^m(\rho)$  为

$$R_n^m(\rho) = \sum_{k=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^k (n-k)!}{k! \left(\frac{n+m}{2} - k\right)! \left(\frac{n-m}{2} - k\right)!} \rho^{n-2k}. \quad (3)$$

当  $n-m$  的值为偶数时,(3)式成立, $k=0,1,2,\dots,(n-m)/2$ ;当  $n-m$  为奇数时,(3)式等号右边恒等于 0。

Zernike 多项式由无穷数量的多项式完全集组成,在单位圆内部是连续正交的<sup>[11]</sup>。初始基面上的型值点数目巨大,一次性建立庞大的方程组并求解优化曲面不现实。但 Zernike 多项式的低阶项曲面形态比较简单,适用于小系统内部的曲面插值。Zernike 多项式的定义方式类似于直角坐标系,故在优化之初需要将 SQM 初始基面转换到同一坐标系下。被选择的适用项的表达式见表 1。

表 1 中  $Z_i$  ( $i=1,2,3,4,5,9,10,16,17$ ) 是指该项在 Zernike 多项式定义中的排序,将其从前到后

重新排序得到  $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_9\}$ 。其表达式可以转换为  $x, y$  形式, 其中  $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$ 。在 9 点系统中, 由于各个子面焦点的位置、通量分布不同,

表 1 Zernike 多项式的适用项

Table 1 Applicable terms of Zernike polynomials

$m$	1	2	3	4
Applicable term	$Z_1 = \rho \cos \varphi,$ $Z_2 = \rho \sin \varphi$	$Z_3 = -1 + 2\rho^2,$ $Z_4 = \rho^2 \cos(2\varphi),$ $Z_5 = \rho^2 \sin(2\varphi)$	$Z_9 = \rho^3 \cos(3\varphi),$ $Z_{10} = \rho^3 \sin(3\varphi)$	$Z_{16} = \rho^4 \cos(4\varphi),$ $Z_{17} = \rho^4 \sin(4\varphi)$

### 3.2 重心算法求型值点

初始基面上的型值点用于曲面插值, 一方面是将型值点作为优化曲面构造过程中的标记点, 用于建立方程组; 另一方面是为了保证映射关系, 映射关系不仅指光线与目标面落点之间的位置关系, 也包含了所有光线在目标面上的通量分布。由边光原理可知, 一旦优化曲面的求解完成, 由于其连续光滑特性, 由部分恒定点所围区域的光线必然会在该区域内扩散形成连续光斑, 而连续光斑的通量分布决定了照明设计的最终效果<sup>[12]</sup>。为了保证光通量在像素区域内的均匀分布, 采用类重心算法来求解型值点的位置。

对于某一子面在初始基面上的有效部分  $A$ , 可以将其视作一曲面薄片, 则子面受光源照射的一个微小闭区域  $d\sigma$  内的通量分布为面密度。该曲面薄片的型值点位置  $Q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  的计算公式为

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x} = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_A x \Phi(x, y, z) d\sigma}{\iint_A \Phi(x, y, z) d\sigma} \\ \bar{y} = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_A y \Phi(x, y, z) d\sigma}{\iint_A \Phi(x, y, z) d\sigma} \\ \bar{z} = \frac{M_z}{M} = \frac{\iint_A z \Phi(x, y, z) d\sigma}{\iint_A \Phi(x, y, z) d\sigma} \end{array} \right. \quad (4)$$

式中  $M$  为区域  $A$  对应的总通量,  $M_x, M_y, M_z$  分别为总质量  $M$  在  $x, y, z$  三个方向上的静矩元素,  $\Phi(x, y, z)$  为节点对应的光通量, 其表达式为

$$\Phi = \iint \Omega I_0 \cos \theta d\Omega, \quad (5)$$

式中  $I_0$  为光源中心光强,  $\theta$  为俯仰角,  $\Omega$  为单位空间角。

在实际计算过程中, 一般会按照网格划分方式

曲面形态各异。表 1 中 9 项多项式的线性组合可以表示绝大多数可见的曲面形态, 且它们之间相互正交, 故方程组的解唯一。

将曲面片看作是由许多质点组成的。直接利用数值方式求解这些离散质点系的重心即可。如图 2 所示, 曲面片的重心一般位于曲面片靠中间的位置, 一方面它所处的位置正好使通量在周边区域分布均匀, 有利于保证像素点区域的光线扩展; 另一方面, 曲面片上各个点的曲率并不一致, 重心位置一般略微突出, 曲率变化平缓, 便于曲面插值和曲面构造的优化。

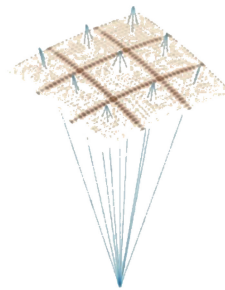


图 2 子面的重心位置

Fig. 2 Orthocenter of sub-surface

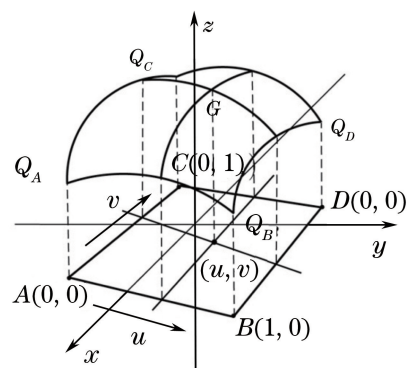


图 3 双参数曲面拼接

Fig. 3 Splicing with two-parameter surfaces

### 3.3 曲面插值与拼接

9 点系统是按型值点之间的位置关系来划分的, 通常由中心点  $Q$  及与其相邻的八点共同组成 (边界点不能作为中心点)。由于 Zernike 多项式的正交区域是单位圆, 9 点系统必须经过坐标平移及归一化。一般以中心点对应的  $(x, y, 0)$  作为新的原

点,并在其余 8 点的  $XOY$  平面投影中取与原点距离最远点的间距作为归一化区域的半径并求解归一化常数。系统的归一化是指网格划分、型值点坐标

位置等均按照归一化常数的比例作放缩。在已知 9 点坐标的情形下,总能找到唯一的一组系数  $\mathbf{c} = \{c_1, c_2, \dots, c_9\}$ ,使其满足

$$\begin{cases} z_1(x_1, y_1) = c_1 Z_1(x_1, y_1) + c_2 Z_2(x_1, y_1) + \dots + c_9 Z_9(x_1, y_1) \\ z_2(x_2, y_2) = c_1 Z_1(x_2, y_2) + c_2 Z_2(x_2, y_2) + \dots + c_9 Z_9(x_2, y_2) \\ \vdots \\ z_9(x_9, y_9) = c_1 Z_1(x_9, y_9) + c_2 Z_2(x_9, y_9) + \dots + c_9 Z_9(x_9, y_9) \end{cases}, \quad (6)$$

式中  $z_i(x_i, y_i)$  为型值点  $Q_i$  归一化之后的位置坐标。(6)式可用于构建部分优化曲面,实际的部分曲面只需还原到原来的坐标系中即可。(6)式的解可表示为

$$\mathbf{c} = \mathbf{Z}/\mathbf{z}, \quad (7)$$

式中

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_1(x_1, y_1) & Z_2(x_1, y_1) & \dots & Z_9(x_1, y_1) \\ Z_1(x_2, y_2) & Z_2(x_2, y_2) & \dots & Z_9(x_2, y_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_1(x_9, y_9) & Z_2(x_9, y_9) & \dots & Z_9(x_9, y_9) \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1(x_1, y_1) \\ z_2(x_2, y_2) \\ \vdots \\ z_9(x_9, y_9) \end{bmatrix}. \quad (9)$$

部分曲面可表示为

$$S(x, y) = c_1 Z_1(x, y) + c_2 Z_2(x, y) + \dots + c_9 Z_9(x, y). \quad (10)$$

部分曲面的有效区域仅在 9 点系统内部,将该部分曲面的信息标记在中心型值点上。由于选用的 Zernike 多项式的曲面特性,在 origin 位置即中心点上可以保证部分曲面相切。依次以所有非边界型值点为中心,重复以上计算过程可以得到所有的部分曲面。

曲面拼接是光学设计中常用的方法,但是常用的机械拼接无法完成预期目标。为了保证最终整体曲面的连续光滑特性,借助微分几何中的曲面双参

数化来表示各个部分曲面,如图 3 所示,其中  $xyz$  为坐标系,  $(u, v)$  为双参数,  $Q_A, Q_A, Q_A, Q_A$  为型值点,  $A, B, C, D$  为型值点在  $XOY$  平面上的投影点。在四个相邻型值点所围成的四边形区域内,任意一点  $G$  的坐标表示为

$$G(z) = [1-u \quad u] \begin{bmatrix} S_A(z) & S_B(z) \\ S_C(z) & S_D(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}, \quad (11)$$

式中  $S_A$  为型值点  $Q_A$  对应的部分曲面,其余同理。(11)式表示按照  $G$  点与型值点的距离远近,利用双参数来表示四个部分曲面对最终优化曲面的影响力的大小。用(11)式反求可以得到四个型值点在  $XOY$  平面上的投影点  $A, B, C, D$  坐标。

## 4 仿真结果与讨论

利用 SQM 设计均匀方斑透镜时,一般将目标面分离成离散的像素点,且每一个像素点对应的通量相等,通过迭代的方式调整光程常数,求解满足通量分布的初始基面。均匀方斑透镜的光斑大小为  $200 \text{ mm} \times 200 \text{ mm}$ ,分离成  $11 \text{ pixel} \times 11 \text{ pixel}$ 。仿真光源为  $1 \text{ mm} \times 1 \text{ mm}$  的朗伯光源,光源距目标面距离为  $1000 \text{ mm}$ 。透镜高度为  $50 \text{ mm}$ ,内表面是以光源中心为球心的球面,外表面为 SQM 生成的初始基面。透镜可用角度为  $60^\circ$ 。利用非成像光学设计仿真软件 TracePro 所建立的光学系统如图 4(a)

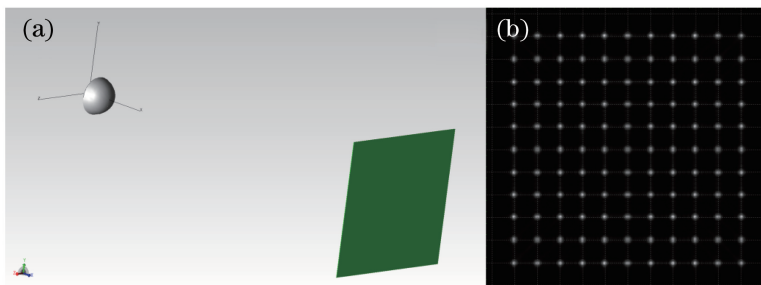


图 4 TracePro 仿真。(a)光学系统;(b)离散点光斑

Fig. 4 TracePro simulation. (a) Optical system; (b) discrete spots



所示,初始透镜的仿真效果如图 4(b)所示,离散点的通量分布基本均匀。

经过优化后的曲面所成的透镜如图 5(a)所示。图 5(b)、(c)分别为优化透镜和初始透镜同一位置的局部视图。可以看出,视觉上优化透镜的表面连续光滑,无由子面叠加造成的沟壑。透镜仿真效果如图 6 所示,与图 4(b)相比,光斑不再是

离散的点状而是一副连续图像,根据边光原理可以证明优化曲面的光滑特性;光斑内部的均匀度大于 0.9,基本达到预期目标;光斑的边界呈正方形,但其照度比光斑内部的更大,且四个顶点上存在亮点。边界照度处理有待进一步优化,但是该算法整体可以达到均匀方斑透镜设计的预期效果。



图 5 透镜表面对比。(a)完整的;(b)优化的;(c)初始的

Fig. 5 Lens surface contrast. (a) Complete; (b) optimized; (c) initial

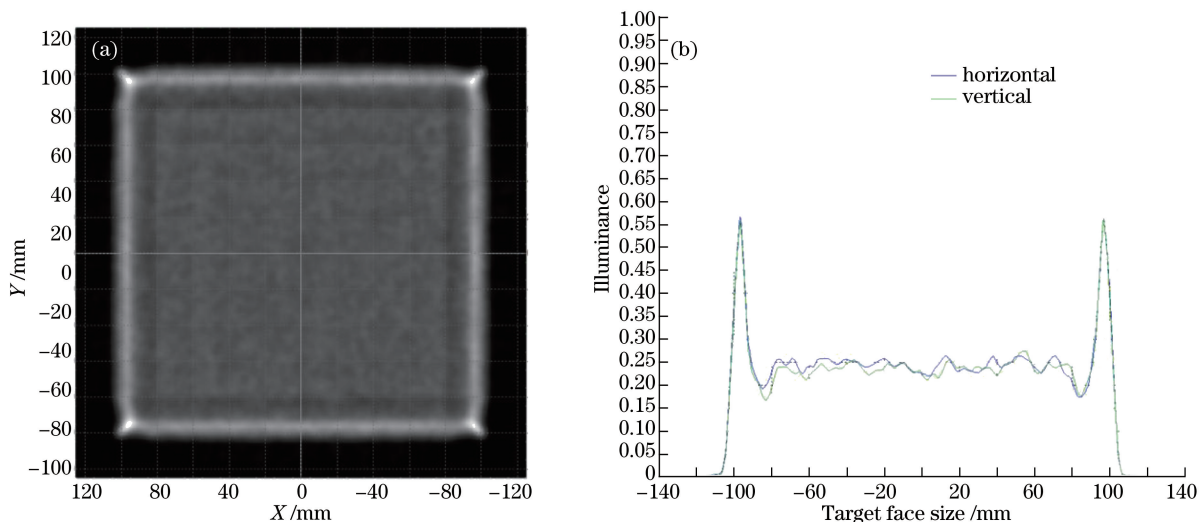


图 6 透镜仿真效果。(a)光斑;(b)照度分布曲线

Fig. 6 Simulation effects of lens. (a) Spots; (b) distribution curve of illuminance

## 5 结 论

在 SQM 设计均匀方斑的基础上,提出了一种基于 Zernike 多项式的初始基面优化算法,该算法通过曲面插值的方式,利用重心算法所得的恒定点构造部分曲面,并将这些部分曲面拼接成优化曲面。通过仿真实验发现,优化曲面整体连续光滑,光斑呈连续性,形状保持正方形,照度分布基本均匀。虽然该算法还有待进一步优化,但其简便易行且效果好,为均匀方斑的设计提供了一种新的思路,有望应

用于图像级配光。

## 参 考 文 献

- [1] Wang J J, Wang X, Ning D. Design of Fresnel lens with square uniform concentration of sub-region multi-focus superposition [J]. Acta Optica Sinica, 2017, 37(3): 0322001.  
王进军, 王侠, 宁铎. 分区域多焦点叠加方形光斑均匀聚光菲涅耳透镜设计[J]. 光学学报, 2017, 37(3): 0322001.
- [2] Zhang H, Wu M Y, Ma Y F, *et al.* Symmetrical

- analysis of uniform illumination design of rectangular arrayed light emitting diode sources[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2015, 52(10): 102205.  
张航, 吴梦荧, 马宇飞, 等. 矩形阵列 LED 均匀配光的对称性分析[J]. *激光与光电子学进展*, 2015, 52(10): 102205.
- [3] Liang W Y, Li Y X, Long Y B, *et al.* Design of freeform surface lens with chip on board LED sources for uniform illumination[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2017, 54(1): 012202.  
梁文跃, 李远兴, 龙拥兵, 等. 板上芯片型 LED 光源均匀照明自由曲面透镜设计[J]. *激光与光电子学进展*, 2017, 54(1): 012202.
- [4] Fournier F R, Cassarly W J, Rolland J P. Fast freeform reflector generation using source-target maps[J]. *Optics Express*, 2010, 18(5): 5295-5304.
- [5] Ding Y, Gu P F, Lu W, *et al.* Using numerical solutions of differential equations to form free reflector[J]. *Journal of Zhejiang University (Engineering Science)*, 2007, 41(9): 1516-1518.  
丁毅, 顾培夫, 陆巍, 等. 利用微分方程数值解构造自由曲面反光器[J]. *浙江大学学报(工学版)*, 2007, 41(9): 1516-1518.
- [6] Ding Y, Liu X, Zheng Z R, *et al.* Freeform LED lens for uniform illumination[J]. *Optics Express*, 2008, 16(17): 12958-12966.
- [7] Oliker V I. Designing freeform lenses for intensity and phase control of coherent light with help from geometry and mass transport[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 2011, 201(3): 1013-1045.
- [8] Ma Y F, Zhang H, Su Z Y, *et al.* Hybrid method of freeform lens design for arbitrary illumination target[J]. *Applied Optics*, 2015, 54(14): 4503-4508.
- [9] Cao Z L, Liao W H, Shen J X. A new algorithm for human eye's wave front aberration fitting with Zernike polynomial[J]. *Optics and Precision Engineering*, 2006, 14(2): 308-314.  
曹正林, 廖文和, 沈建新. Zernike 多项式拟合人眼波前像差的一种新算法[J]. *光学精密工程*, 2006, 14(2): 308-314.
- [10] Ye J F, Gao Z S, Liu X L, *et al.* Freeform surfaces reconstruction based on Zernike polynomials and radial basis function[J]. *Acta Optica Sinica*, 2014, 34(8): 0822003.  
叶井飞, 高志山, 刘晓莉, 等. 基于 Zernike 多项式和径向基函数的自由曲面重构方法[J]. *光学学报*, 2014, 34(8): 0822003.
- [11] Chen L X, Hu X C, Han K, *et al.* Improvement method for fitting high-frequency phase by Zernike polynomials[J]. *Acta Optica Sinica*, 2016, 36(3): 0314001.  
陈丽霞, 胡小川, 韩开, 等. Zernike 多项式对空间高频相位拟合的改进方法[J]. *光学学报*, 2016, 36(3): 0314001.
- [12] Chaves J. Introduction to non-imaging optics [M]. Boca Raton: CRC Press, 2008: 8-17.