

基于贝叶斯学生 t 分布混合的稳健点集匹配

杨丽娟¹, 田铮^{1,2}, 温金环¹, 延伟东¹

¹西北工业大学应用数学系, 陕西 西安 710129;

²中国科学院遥感科学国家重点实验室, 北京 100101

摘要 针对点集匹配中异常值的干扰问题, 提出了一种基于贝叶斯学生 t 分布混合模型(SMM)的稳健仿射点集匹配方法。在贝叶斯框架下, 该算法将点集匹配问题模型化为利用 SMM 进行概率密度估计的问题。通过引入模型参数的近似变分后验分布, 目标函数转化为最大化完全数据对数似然的变分下界, 利用变分贝叶斯期望最大化(VBEM)算法迭代估计模型参数的变分后验分布。对于学生 t 分布的自由度参数, 通过最大化完全数据的对数似然进行迭代更新, 并利用斯特林公式近似计算。通过模拟点集和光学遥感图像的配准实验, 验证了该方法的有效性。

关键词 遥感; 点集匹配; 变分贝叶斯; 学生 t 分布混合模型; 异常值; 稳健性

中图分类号 TP391 文献标识码 A

doi: 10.3788/LOP55.012801

Robust Point Set Registration Based on Bayesian Student's t Mixture Model

Yang Lijuan¹, Tian Zheng^{1,2}, Wen Jinhuan¹, Yan Weidong¹

¹Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an, Shaanxi 710129, China;

²State Key Laboratory of Remote Sensing Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100101, China

Abstract For the interference problem of outliers on the point set registration, a robust affine point set registration method based on Bayesian student's t mixture model (SMM) is proposed. Under Bayesian framework, the point set registration problem is formularized as the probability density estimation problem by using the SMM. By introducing the approximate variational posterior distribution, the objective function is converted to maximize the variational lower bound of complete data log-likelihood, and the variational Bayesian expectation maximization (VBEM) method is used to estimate the variational posterior distribution of model parameters iteratively. The free degree of student t distribution is estimated by maximizing the complete data log-likelihood, and it is approximated by using the Stirling formula. Registration experiments on simulated point sets and optical remote sensing images verify the effectiveness and feasibility of the proposed method.

Key words remote sensing; point set registration; variational Bayesian; student's t mixture model; outliers; robustness

OCIS codes 280.4788; 100.5010; 110.2960

1 引言

点集匹配在图像分析、图像配准和形状匹配等

领域中已获得广泛的应用^[1-3], 通过搜索点集之间的对应关系, 估计它们之间的空间变换模型。特征点集的质量直接影响匹配的效果。在实际应用中, 由

收稿日期: 2017-08-08; 收到修改稿日期: 2017-08-18

基金项目: 国家自然科学基金青年科学基金(61201323, 61301196)、国家自然科学基金面上项目(60972150)、遥感科学国家重点实验室开放基金(OFSLRSS201206)、陕西省自然科学基金基础研究计划资助项目(2017JM6026)

作者简介: 杨丽娟(1987—), 女, 博士研究生, 主要从事遥感图像配准及模式识别方面的研究。

E-mail: yanglijuan1987@163.com

导师简介: 田铮(1946—), 女, 教授, 博士生导师, 主要从事图像处理及时间序列等方面的研究。

E-mail: zhtian_nwpu@qq.com

于图像质量或特征提取方法的不精确,提取的特征点集通常存在大量异常值,因此稳健的点集匹配方法研究备受关注。

近年来,概率匹配方法获得广泛的应用,其中最显著的是高斯混合模型(GMM)。Jian 等^[4]将点集配准问题转化了两个 GMM 的对准问题,通过最小化两个 GMM 之间的统计差异确定点集对应关系。一致性点漂移(CPD)方法^[5]将点集匹配问题模型化为最大似然框架下的概率密度估计问题,在强制 GMM 质心(一个点集)做一致性运动的同时保持点集的全局拓扑结构。在 CPD 方法中,额外的均匀分布用于处理异常值。目前,已经提出了很多改进方法以提高 CPD 方法的匹配性能^[6-7]。该方法本质上仍是最小平方问题,而且在最大似然框架下,一个不可避免的问题是奇异性,这限制了该方法的应用,但是贝叶斯框架可有效解决这个问题^[8-10]。曲寒冰等^[11-13]提出了一种贝叶斯框架下的点集匹配算法(VBPSM),两个 GMM 分别用于模型化聚类和回归过程,通过引入一个转移变量将聚类和回归结合起来。为了提高异常值的稳健性,在混合模型中增加额外的混合成分。但该方法估计的变换参数是针对转移变量和模型点集之间的对应,并不是模型点集和数据点集。相比于高斯分布,学生 t 分布是厚尾分布,对异常值更加稳健。Zhou 等^[14]用学生 t 分布混合模型(SMM)代替 GMM 模型化点集之间的非刚性匹配问题,通过最大化参数的条件期望,获得配准参数的闭型解,但它只允许各向同性协方差。本文尝试在贝叶斯框架下用 SMM 直接模型化点集之间的匹配问题。

贝叶斯 SMM 已被广泛应用于密度估计、聚类和模型选择等问题中^[15-16]。Archambeau 等^[16]充分考虑潜在变量之间的相关性,并利用变分贝叶斯期望最大化(VBEM)算法迭代更新变分后验以获得更紧致的下界。Baldacchino 等^[17]将变分贝叶斯 SMM 用于非线性系统识别中的稳健估计,两个不同的 SMM 构成专家混合模型,其使数据中的噪声、异常值和非正态性更加稳健。

综上,针对存在大量异常值的点集匹配问题,本文提出了一种基于贝叶斯 SMM 的稳健仿射点集匹配算法,直接处理模型点集和数据点集之间的匹配问题。通过引入近似后验分布,点集匹配问题转化为最大化完全数据对数似然的变分下界,利用变分期望最大化(EM)算法结合由粗到精的匹配策略来估计变换参数的不确定性。对于学生 t 分布的自由

度参数,由于没有先验知识,可通过最大化完全数据的对数似然进行更新,并用斯特林公式^[18]避免了非线性方程的求解。模拟点集和光学遥感图像的配准实验结果验证了所提方法的有效性。

2 贝叶斯 SMM

2.1 多变量学生 t 分布

多变量学生 t 分布的概率密度可定义为:

$$S(\mathbf{x} | \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Lambda}, \nu) = \Gamma\left(\frac{d + \nu}{2}\right) (\nu\pi)^{-d/2} |\boldsymbol{\Lambda}|^{1/2} \times \left[1 + \frac{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Lambda} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})}{\nu}\right]^{-(d+\nu)/2} / \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right), \quad (1)$$

式中 d 是数据维数, $\boldsymbol{\mu}$ 和 $\boldsymbol{\Lambda}$ 分别是均值和精度, $\Gamma(\cdot)$ 表示伽马函数。当自由度参数 $\nu \rightarrow \infty$ 时, (1) 式中的学生 t 分布收敛到高斯分布。

为了便于处理,学生 t 分布可表示为具有相同均值、不同精度的尺度高斯分布的无限混合,即:

$$S(\mathbf{x} | \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Lambda}, \nu) = \int_0^\infty N[\mathbf{x} | \boldsymbol{\mu}, (u\boldsymbol{\Lambda})^{-1}] G\left(u \left| \frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2} \right.\right) du, \quad (2)$$

式中 u 为尺度变量, $N(\mathbf{x} | \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Lambda}^{-1})$ 是高斯分布:

$$N(\mathbf{x} | \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Lambda}^{-1}) = |\boldsymbol{\Lambda}|^{1/2} (2\pi)^{-d/2} \times \exp\left[-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Lambda} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right], \quad (3)$$

$G(u | \nu/2, \nu/2)$ 是伽马分布:

$$G\left(u \left| \frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2} \right.\right) = \Gamma^{-1}\left(\frac{\nu}{2}\right) \left(\frac{\nu}{2}\right)^{\nu/2} u^{\nu/2-1} \exp\left(-\frac{\nu}{2}u\right). \quad (4)$$

2.2 贝叶斯学生 t 分布混合

给定数据点集 $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^N$ 和模型点集 $\mathbf{Y} = \{\mathbf{y}_m\}_{m=1}^M$, 其中 N 和 M 为点集大小, 数据点的维数记为 D 。齐次坐标点集记为 $\bar{\mathbf{Y}} = \{\bar{\mathbf{y}}_m\}_{m=1}^M$, 变换点集的位置可表示为 $\mathbf{A}\mathbf{y}_m$, 其中 \mathbf{A} 表示点集之间的仿射变换矩阵。则数据点集的条件概率可表示为:

$$p(\mathbf{x}_n | \mathbf{y}_m, \boldsymbol{\Theta}) = \sum_{m=1}^M \pi_m S(\mathbf{x}_n | \mathbf{A}\mathbf{y}_m, \boldsymbol{\Lambda}_m, \nu_m), \quad (5)$$

式中模型变量记为 $\boldsymbol{\Theta} = \{\mathbf{A}, \{\boldsymbol{\Lambda}_m\}, \{\pi_m\}, \{\nu_m\}\}$ 。为了方便进行变分处理, 引入离散二值指示变量 $\mathbf{Z} = \{z_n\}_{n=1}^N$ 和尺度变量 $\mathbf{U} = \{u_n\}_{n=1}^N$, 记为潜在变量 $\boldsymbol{\Theta}^L = \{\mathbf{U}, \mathbf{Z}\}$, 其中 $z_{nm} \in \{0, 1\}$, 且 $\sum_{m=1}^M z_{nm} = 1, \forall n$, 给定 z_{nm} 的条件下, 尺度变量 u_{nm} 是未观测, 则 M 成分 SMM 的潜在变量模型可表示为:

$$p(\mathbf{x}_n | \mathbf{y}_m, \mathbf{u}_n, \mathbf{z}_n, \Theta) = \prod_{m=1}^M N[\mathbf{x}_n | \mathbf{A}\mathbf{y}_m, (\mathbf{u}_{nm}\mathbf{\Lambda}_m)^{-1}]^{z_{nm}}, \quad (6)$$

$$p(\mathbf{z}_n | \Theta) = \prod_{m=1}^M \pi_m^{z_{nm}}, \quad (7)$$

$$p(\mathbf{u}_n | \mathbf{z}_n, \Theta) = \prod_{m=1}^M G\left(\mathbf{u}_{nm} \left| \frac{\mathbf{v}_m}{2}, \frac{\mathbf{v}_m}{2} \right.\right)^{z_{nm}}. \quad (8)$$

利用指数分布族的共轭先验特性,变分贝叶斯变量 $\Theta^{\text{VB}} = \{\mathbf{A}, \mathbf{\Lambda}, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{v}\}$ 的先验分布按以下方式选择:1) 混合比例系数 $\boldsymbol{\pi}$ 的先验分布服从狄利克雷分布 $\text{DIR}(\boldsymbol{\pi} | \boldsymbol{\kappa}_0)$, 其中 $\boldsymbol{\kappa}_0$ 是先验样本大小(称为超参数);2) 每个混合成分的精度 $\mathbf{\Lambda}_m$ 服从威沙特先验分布, $W(\mathbf{\Lambda}_m | \boldsymbol{\gamma}_0, \mathbf{S}_0)$, 其中 $\boldsymbol{\gamma}_0$ 和 \mathbf{S}_0 分别为自由度和尺度矩阵;3) 仿射变换矩阵 \mathbf{A} 的每列元素服从零均值、精度参数 \mathbf{v} 的高斯先验;4) 精度参数向量 \mathbf{v} 服从伽马分布, 其中 a_0 和 b_0 分别是先验形状和先验逆尺度参数。在实际应用中,可根据经验确定超参数的初始值。通过变分推断,可获得变量 $\{\Theta^{\text{L}}, \Theta^{\text{VB}}\}$ 的后验分布, 详见下节。参数 $\mathbf{v} = \{v_m\}$ 没有先验, 可通过最大化数据的对数似然进行估计, 记为 $\Theta^{\text{ML}} = \{\mathbf{v}\}$ 。

数据和变量之间的联合分布层次表示为:

$$p(\mathbf{X}, \Theta^{\text{L}}, \Theta^{\text{VB}} | \mathbf{Y}) = p(\mathbf{X} | \mathbf{Y}, \mathbf{U}, \mathbf{Z}, \Theta^{\text{VB}}) \times p(\mathbf{U} | \mathbf{Z}) p(\mathbf{Z} | \boldsymbol{\pi}) p(\boldsymbol{\pi}) p(\mathbf{\Lambda}) p(\mathbf{A} | \mathbf{v}) p(\mathbf{v}). \quad (9)$$

图1中的有向无环图(DAG)^[8]描述了变量和参数之间层次概率依赖关系, 图中圆表示变量, 方块表示超参数, 虚线圆表示可调参数。

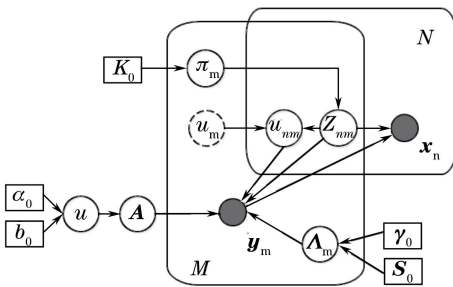


图1 点集匹配的有向无环图

Fig. 1 Directed acyclic graph of point set registration

3 贝叶斯 SMM 的变分推断

在贝叶斯框架下,通过变分推断可估计模型参数。考虑某近似后验 $q(U, Z, \Theta^{\text{VB}})$, 对数似然可表示为

$$\ln p(\mathbf{X} | \mathbf{Y}) = \mathcal{L}(q) + KL[q(U, Z, \Theta^{\text{VB}}) \| p(U, Z, \Theta^{\text{VB}} | \mathbf{X}, \mathbf{Y})], \quad (10)$$

式中 $KL[q(U, Z, \Theta^{\text{VB}}) \| p(U, Z, \Theta^{\text{VB}} | \mathbf{X}, \mathbf{Y})]$ 是真实后验分布 $p(U, Z, \Theta^{\text{VB}} | \mathbf{X}, \mathbf{Y})$ 和近似后验 $q(U, Z, \Theta^{\text{VB}})$ 之间的库尔贝克-莱布勒(KL)散度, 满足条件 $KL(q \| p) \geq 0$, 当且仅当 $q(U, Z, \Theta^{\text{VB}}) = p(U, Z, \Theta^{\text{VB}} | \mathbf{X}, \mathbf{Y})$ 时等式成立。因此有 $\mathcal{L}(q) \leq \ln p(\mathbf{X} | \mathbf{Y})$, 即 $\mathcal{L}(q)$ 是 $\ln p(\mathbf{X} | \mathbf{Y})$ 的近似下界。通过依次对 $\mathcal{L}(q)$ 的各个变量取变分, 可获得变量 $\{\Theta^{\text{L}}, \Theta^{\text{VB}}\}$ 的变分后验概率。

3.1 参数的变分后验估计

所有变量的变分后验概率可分解为:

$$q(\mathbf{U}, \mathbf{Z}, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{\Lambda}, \mathbf{A}, \mathbf{v}) = q(\mathbf{U}, \mathbf{Z}) q(\boldsymbol{\pi}) q(\mathbf{\Lambda}) q(\mathbf{A}) q(\mathbf{v}), \quad (11)$$

式中 $q(\Theta^{\text{VB}}) = q(\boldsymbol{\pi}) q(\mathbf{\Lambda}) q(\mathbf{A}) q(\mathbf{v})$, 关于 $q(\mathbf{U}, \mathbf{Z})$ 和 $q(\Theta^{\text{VB}})$ 最大化 $\mathcal{L}(q)$, 可获得下面的 VBEM 算法。在第 k 次迭代中, 更新准则为:

$$\text{VBE-step: } q(\mathbf{U}, \mathbf{Z})_k \propto$$

$$\exp[\langle \ln p(\mathbf{X}, \mathbf{U}, \mathbf{Z} | \mathbf{Y}, \Theta^{\text{VB}}) \rangle_{q(\Theta^{\text{VB}})_{k-1}}], \quad (12)$$

$$\text{VBM-step: } q(\Theta^{\text{VB}})_k \propto p(\Theta^{\text{VB}}) \times$$

$$\exp[\langle \ln p(\mathbf{X}, \mathbf{U}, \mathbf{Z} | \mathbf{Y}, \Theta^{\text{VB}}) \rangle_{q(\mathbf{U}, \mathbf{Z})_k}], \quad (13)$$

式中 $\langle \cdot \rangle$ 表示关于变量的变分后验的期望。在变分贝叶斯期望步骤(VBE-step)中, 用变分贝叶斯变量 Θ^{VB} 的当前估计来计算潜在变量的后验分布; 在变分贝叶斯最大化步骤(VBM-step)中, 固定潜在变量, 重新计算变量 Θ^{VB} 上的变分后验分布。

1) 潜在变量 \mathbf{U}, \mathbf{Z} 。潜在变量 \mathbf{U} 和 \mathbf{Z} 的联合后验概率的对数形式如下:

$$\begin{aligned} \ln q(\mathbf{U}, \mathbf{Z}) \propto & \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M z_{nm} \times \\ & \left[\langle \ln \pi_m \rangle + \frac{\mathbf{v}_m}{2} \ln \left(\frac{\mathbf{v}_m}{2} \right) - \right. \\ & \ln \Gamma \left(\frac{\mathbf{v}_m}{2} \right) + \left(\frac{\mathbf{v}_m + D}{2} - 1 \right) \ln u_{nm} \times \\ & \left. \frac{1}{2} \langle \ln |\mathbf{\Lambda}_m| \rangle - \frac{u_{nm}}{2} (\mathbf{v}_m + \bar{\omega}_{nm}) \right], \quad (14) \end{aligned}$$

式中 $\bar{\omega}_{nm} = \langle (\mathbf{x}_n - \mathbf{A}\mathbf{y}_m)^\top \mathbf{\Lambda}_m (\mathbf{x}_n - \mathbf{A}\mathbf{y}_m) \rangle$, 指示变量的后验分布 $q(z_{nm}=1)$ 可表示为:

$$q(z_{nm}=1) =$$

$$\Gamma \left(\frac{\mathbf{v}_m + D}{2} \right) / \Gamma \left(\frac{\mathbf{v}_m}{2} \right) \langle \pi_m \rangle \times$$

$$\langle |\mathbf{\Lambda}_m| \rangle^{1/2} (\mathbf{v}_m)^{-D/2} \left(1 + \frac{\bar{\omega}_{nm}}{\mathbf{v}_m} \right)^{-\mathbf{v}_m + D/2}. \quad (15)$$

在这个过程中, 考虑了尺度变量上的不确定性。规范化后, 指示变量的期望可定义为:

$$\langle z_{nm} \rangle = \frac{q(z_{nm}=1)}{\sum_{m=1}^M q(z_{nm}=1)}, \quad \forall n, \forall m. \quad (16)$$

以指示变量 $z_{nm} = 1$ 为条件, 尺度变量 u_{nm} 的后验分布仍然服从伽马分布, $q(u_{nm} | z_{nm} = 1) \sim G(u_{nm} | \alpha_{nm}, \beta_{nm})$, 其中:

$$\alpha_{nm} = \frac{v_m + D}{2}, \quad (17)$$

$$\beta_{nm} = \frac{v_m + \bar{\omega}_{nm}}{2}, \quad (18)$$

另外, 有: $\langle u_{nm} \rangle = \alpha_{nm} / \beta_{nm}$, $\langle \ln u_{nm} \rangle = \psi(\alpha_{nm}) - \ln \beta_{nm}$, 其中 $\psi(\cdot)$ 是 Digamma 分布。

2) 仿射变换矩阵 \mathbf{A} 。仿射变换矩阵 \mathbf{A} 的第 q 行元素的后验分布是高斯分布, 后验均值 $\hat{\mu}_{A_q}$ 和后验协方差矩阵 $\hat{\Sigma}_{A_q}$ 可表示为:

$$\hat{\Sigma}_{A_q}^{-1} = \text{diag}(\langle v \rangle) + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \mathbf{y}_m \langle z_{nm} u_{nm} \mathbf{A}_m(q, q) \rangle \mathbf{y}_m^T, \quad (19)$$

$$\hat{\mu}_{A_q} = \left[\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \langle z_{nm} u_{nm} \mathbf{A}_m(q, q) \rangle \mathbf{x}_{nq} \mathbf{y}_m^T \right] \hat{\Sigma}_{A_q}, \quad (20)$$

式中 $\text{diag}(\langle v \rangle)$ 表示由 $\langle v \rangle$ 中元素构成的方阵。

3) 仿射变换的精度 \mathbf{v} 。精度 \mathbf{v} 的后验分布仍然是伽马分布, 第 l 个元素的后验形状参数和后验逆尺度参数为:

$$a_l = a_0 + \frac{D}{2}, \quad (21)$$

$$b_l = b_0 + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^D \langle \mathbf{A}_{q_l}^2 \rangle. \quad (22)$$

4) 精度矩阵 $\mathbf{\Lambda}$ 。对于第 m 个混合成分, 精度矩阵 \mathbf{A}_m 的后验分布仍然是威沙特分布, 后验自由度和后验尺度矩阵为:

$$\gamma_m = \sum_{n=1}^N \langle z_{nm} \rangle + \gamma_0, \quad (23)$$

$$\mathbf{S}_m^{-1} = \mathbf{S}_0^{-1} + \sum_{n=1}^N \langle z_{nm} u_{nm} \rangle \langle (\mathbf{x}_n - \mathbf{A}_m \mathbf{y}_m) (\mathbf{x}_n - \mathbf{A}_m \mathbf{y}_m)^T \rangle, \quad (24)$$

如果选择各向同性的协方差矩阵, 则精度矩阵的后验分布为伽马分布。

5) 混合比例 $\boldsymbol{\pi}$ 。混合比例参数 $\boldsymbol{\pi}$ 的后验分布仍是狄利克雷分布, 第 m 个混合成分的后验样本大小 κ_m 为:

$$\kappa_m = \sum_{n=1}^N \langle z_{nm} \rangle + \kappa_0. \quad (25)$$

3.2 自由度参数 \mathbf{v} 的优化

由于没有自由度参数 $\{v_m\}$ 的先验信息, 可通过最大化对数似然函数迭代更新, 令对应梯度为零, 解(独立)非线性方程:

$$\ln\left(\frac{v_m}{2}\right) + 1 - \psi\left(\frac{v_m}{2}\right) + \frac{\sum_{n=1}^N \langle z_{nm} \rangle (\langle \ln u_{nm} \rangle - \langle u_{nm} \rangle) / \sum_{n=1}^N \langle z_{nm} \rangle}{\sum_{n=1}^N \langle z_{nm} \rangle} = 0. \quad (26)$$

为了简化数值计算, 在本研究中不进行非线性方程求解, 而是利用斯特林公式 $\ln \Gamma(z) \approx z \ln z - z + 1/2 \ln 2\pi/z$, 有:

$$v_m = \frac{1}{1 + 1 / \left(\sum_{n=1}^N \langle z_{nm} \rangle \sum_{n=1}^N \langle z_{nm} \rangle (\langle \ln u_{nm} \rangle - \langle u_{nm} \rangle) \right)}. \quad (27)$$

通过上述处理步骤大大简化了计算。参数更新的目的是最大化变分下界 $\mathcal{Q}(q)$, 但因为在计算 $\mathcal{Q}(q)$ 过程中可能涉及到的大的矩阵, 这会大大增加计算量, 故在本算法的每次迭代中, 只计算 $\mathcal{Q}'(q) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \langle z_{nm} u_{nm} (\mathbf{x}_n - \mathbf{A}_m \mathbf{y}_m)^T \mathbf{A}_m (\mathbf{x}_n - \mathbf{A}_m \mathbf{y}_m) \rangle$ 来检查算法是否收敛。算法 1 给出了基于贝叶斯 SMM 的点集匹配算法, 简记为 VBSMM, 通过结合 VBEM 和由粗到精^[11-13]的匹配策略, 实现点集匹配。

算法 1: 基于贝叶斯 SMM 的仿射点集匹配算法

- 1) 输入: $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^M, \mathbf{Y} = \{\mathbf{y}_m\}_{m=1}^M$, 容忍误差 $\epsilon_{\mathcal{Q}}$;
- 2) 初始化。先验参数: $a_0, b_0, \kappa_0, \gamma_0, \mathbf{S}_0$; 仿射变换参数: \mathbf{A} ;
- 3) for \mathbf{S}_0 上由粗到精 do;
- 4) repeat
 - VBE-step: 根据(15)、(16)式推断指示变量 \mathbf{Z} ;
 - 根据(17)、(18)式推断尺度变量 \mathbf{U} ;
 - VBM-step: 根据(25)式更新混合比例参数 $\boldsymbol{\pi}$ 的 $\boldsymbol{\kappa}$, 根据(19)、(20)式推断仿射变换矩阵 \mathbf{A} , 根据(21)、(22)式更新精度 \mathbf{v} 的 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} , 根据(23)、(24)式更新 $\mathbf{\Lambda}$ 的 $\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{S}$, 根据(27)式更新自由度参数 \mathbf{v} , 计算第 t 步中的下界 \mathcal{Q}' ;
 - 5) until $|\mathcal{Q}'_t - \mathcal{Q}'_{t-1}| < \epsilon_{\mathcal{Q}}$;
 - 6) end for.

算法的时间复杂度主要由(15)和(24)式决定。在每次迭代中, 计算这两个公式的时间复杂度分别近似为 $O(D^3 NM)$ 和 $O[D^2(N+D)M]$ 。一般情况下, 点集的坐标维数 D 为 2 或 3, 因为 $D \ll N, M$, 故在仿射情况中, 算法总的时间复杂度可近似为

$O(NM)$ 。表 1 比较了本算法与 CPD 方法^[5]、GMM-L2 方法^[4]和各向异性协方差(VBPSM)方法^[11-13]的计算时间,其中 ISO 和 ANI 分别表示选择各向同性和各向异性协方差,迭代次数设定为

表 1 4 种算法计算时间的比较

Table 1 Comparison of computational time between four algorithms

Dataset	Points	CPD /s	GMM-L2 /s	VBPSM/s	VBSMM (ISO) /s	VBSMM(ANI) /s
Fish	91	0.8456	0.4416	5.7015	1.7833	3.1224
Face	392	33.2969	5.1300	28.1384	11.7993	18.0541
Bunny	453	24.4319	3.6829	32.8840	15.0191	21.9498

4 实验结果

本节实验分为两部分,首先进行模拟点集匹配实验,并将本方法与 CPD 方法、GMM-L2 方法和 VBPSM 方法进行了比较,然后将该方法应用于光学遥感图像的配准中。在本节的实验中,超参数的初始值设置如下:1)超参数 a_0 和 b_0 均设置为 0.01;2) κ_0 中各个元素设置为 M ;3) γ_0 设置为 $2 \times (D+1)$,对于选择各向同性协方差的情况, S_0 设置为标量 1,对于选择各向异性协方差的情况, S_0 设置为单位矩阵 I 。

4.1 模拟点集匹配实验

在模拟点集实验中选择三组模型点集,分别为 fish 点集(包含 91 个二维数据点)、face 点集(包含 392 个三维数据点)和 bunny 点集(包含 453 个三维数据点)^[5]。数据点集的生成包括两部分,首先进行随机仿射变换,然后增加不同比例的异常值。

仿射变换参数为服从均匀分布的随机值,取值范围分别为:1) 平移参数 $[-5,5]$;2) 尺度 $[0.5,1.5]$;3) 剪切 $[0.1,0.5]$;4) 旋转 $[-45^\circ,45^\circ]$ 。加入均匀分

布的异常值,与模型点的比例分别为 0.0,0.5,1.0,1.5 和 2.0,并对每个异常值水平进行 50 次匹配实验。召回率被用于评价点集匹配性能,即算法找到的正确匹配数和真实匹配数的比例。其中 CPD 方法中均匀分布的权重参数统一设置为 0.5;GMM-L2 方法中的匹配对应关系按照最小距离准则确定;针对各向同性和各向异性协方差的两种选择,本方法分别记为 VBSMM(ISO)和 VBSMM(ANI)。

图 2 比较了不同方法在不同异常值比例下的平均召回率。由图 2 可知,在随机仿射变换和存在不同比例异常值的情形下,本算法明显优于其他方法。对二维 fish 点集,GMM-L2 方法的匹配效果最差,随着异常值比例的增加,召回率曲线快速下降。在匹配三维点集中,随着异常值比例的增加,其他三种算法都快速失效,VBPSM 方法尤其严重。图 3 给出了本方法[VBSMM(ANI)]匹配含不同水平异常值的二维 fish 点集的结果示例,从左到右异常值比例依次增加。图 4 和图 5 分别给出了三维 face 点集和 bunny 点集的匹配结果示例。

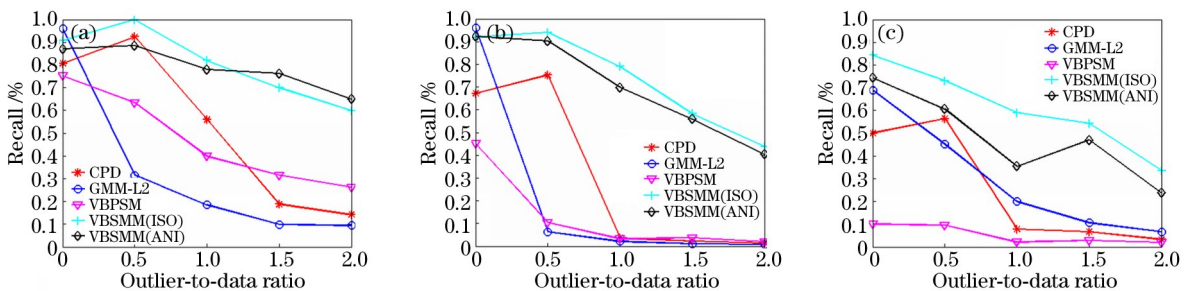


图 2 递增异常值比例的召回率对比。(a) Fish 点集;(b) face 点集;(c) bunny 点集

Fig. 2 Comparison of recall rate of increasing outlier-to-data ratio. (a) Fish point set; (b) face point set; (c) bunny point set

4.2 光学遥感图像配准实验

为了验证本方法解决真实图像特征点匹配的能力,本节采用两幅来自于 Landsat 卫星的专题制图仪(TM)遥感图像进行实验,图 5(a)、(b)分别为参考图像和待配准图像。首先分别提取两幅图像的显

著特征集^[6,19],分别构成模型点集(含 140 个特征点)和数据点集(含 143 个特征点)。判定特征点之间的对应需同时满足两个条件:1) 最大后验准则;2) 变换模型点集和数据点集之间欧氏距离小于某阈值,这里选择阈值为 1。

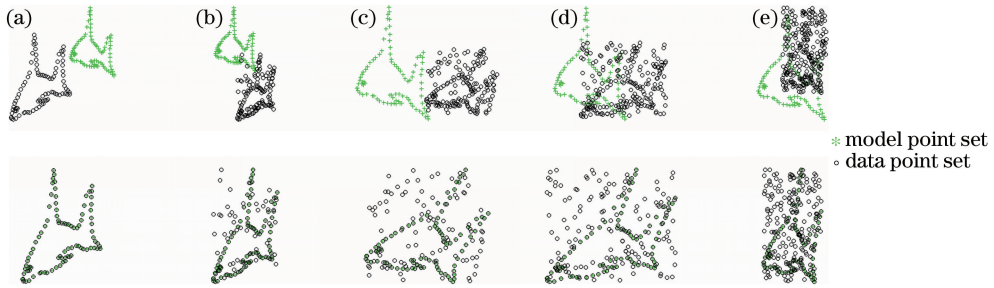


图3 针对二维 fish 点集,异常值比例分别为(a) 0;(b) 0.5;(c) 1.0;(d) 1.5;
(e) 2.0 时本方法的匹配结果示意图(第一行是初始点集,第二行是点集对准结果)

Fig. 3 Diagram of the matching results of the proposed method aiming at two-dimensional fish point sets with the outlier-to-data ratio of (a) 0; (b) 0.5; (c) 1.0; (d) 1.5; (e) 2.0, respectively (the first line show the initial point sets, the second line show the point set alignment results)

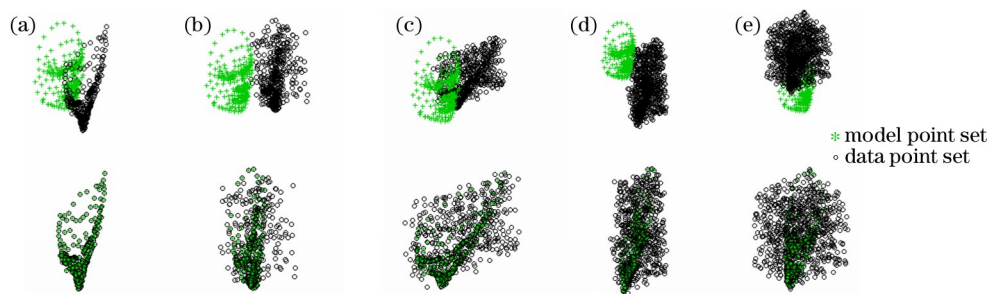


图4 针对三维 face 点集,异常值比例分别为

(a) 0;(b) 0.5;(c) 1.0;(d) 1.5;(e) 2.0 时本方法的匹配结果示意图(第一行是初始点集,第二行是点集对准结果)

Fig. 4 Diagram of the matching results of the proposed method aiming at three-dimensional face point sets with the outlier-to-data ratio of (a) 0; (b) 0.5; (c) 1.0; (d) 1.5; (e) 2.0, respectively (the first line show the initial point sets, the second line show the point set alignment results)

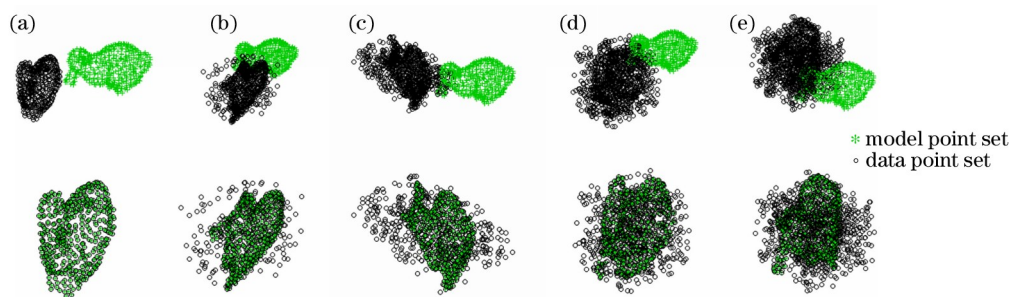


图5 针对三维 bunny 点集,异常值比例分别为

(a) 0;(b) 0.5;(c) 1.0;(d) 1.5;(e) 2.0 时本方法的匹配结果示意图(第一行是初始点集,第二行是点集对准结果)

Fig. 5 Diagram of the matching results of the proposed method aiming at three-dimensional bunny point sets with the outlier-to-data ratio of (a) 0; (b) 0.5; (c) 1.0; (d) 1.5; (e) 2.0, respectively (the first line show the initial point sets, the second line show the point set alignment results)

在各向异性和各向同性协方差两种情况下,本方法获得了 68 对和 72 对匹配结果,其中模型点和数据点之间的匹配误差分别为 0.2613 和 0.2629。图 6(c)给出了利用本方法最终获得的 72 对匹配结果,图 6(d)给出了本算法的配准结果。相比之下,由于从参考图像和待配准图像中提取的两个特征点集中均存在大量异常值,从而导致 CPD 方法、

GMM-L2 方法和 VBPSM 方法均匹配失效,其中 GMM-L2 方法结果最差,这与 4.1 节的实验结果一致。

5 结 论

针对异常值对点集匹配的干扰问题,提出了基于贝叶斯 SMM 模型的点集匹配方法。选择 SMM

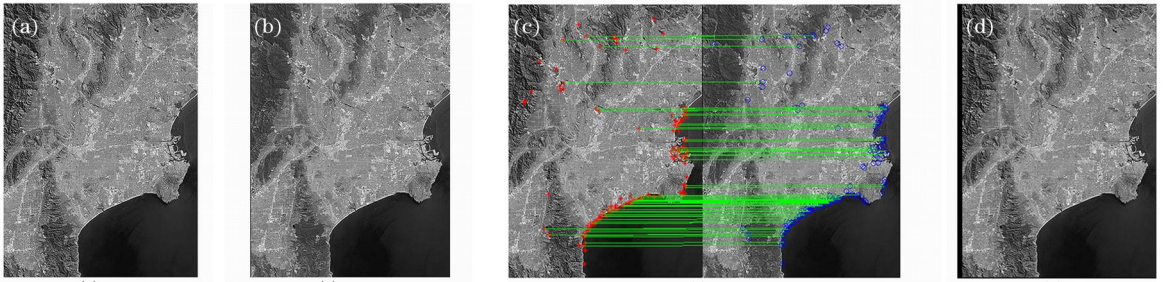


图6 光学遥感图像配准。(a)参考图像;(b)待配准图像;(c)匹配结果;(d)配准结果

Fig. 6 Registration of optical remote sensing images.

(a) Reference image; (b) image to be registered; (c) matching result; (d) registration result

直接模型化点集之间的匹配对应关系,增加异常值的稳健性。在贝叶斯框架下,充分考虑变量之间的相关性,利用VBEM算法结合由粗到精的匹配策略估计参数的变分后验。在学生t分布的自由度参数的迭代更新中,利用斯特林公式获得近似解,避免了非线性方程的求解,提高了算法效率。最后,模拟点集和光学遥感图像配准实验验证了本方法处理异常值问题的有效性和可行性。

参 考 文 献

- [1] Brown L G. A survey of image registration techniques[J]. ACM Computing Surveys, 1992, 24(4): 325-376.
- [2] Goshtasby A A. 2-D and 3-D image registration: for medical, remote sensing, and industrial applications [M]. New Jersey: John Wiley & Sons, 2005.
- [3] Wang X J, Xing F, Liu F. Stereo matching of objects with same features based on Delaunay triangulation and affine constraint[J]. Acta Optica Sinica, 2016, 36(11): 1115004.
王向军,邢峰,刘峰. Delaunay三角剖分和仿射约束的特征相同多物体同名点立体匹配[J]. 光学学报, 2016, 36(11): 1115004.
- [4] Jian B, Vemuri B C. Robust point set registration using Gaussian mixture models [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2011, 33(8): 1633-1645.
- [5] Myronenko A, Song X B. Point set registration: coherent drift [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2010, 32(12): 2262-2275.
- [6] Yang L J, Tian Z, Zhao W, et al. Robust image registration using adaptive coherent point drift method [J]. Journal of Applied Remote Sensing, 2016, 10(2): 025014.
- [7] He F Y, Zhao W. Registration of synthetic aperture radar image including body of water[J]. Acta Optica Sinica, 2017, 37(9): 0928001.
贺飞跃,赵伟. 含水体的合成孔径雷达图像配准[J]. 光学学报, 2017, 37(9): 0928001.
- [8] Bishop C M. Pattern recognition and machine learning[M]. New York: Springer, 2006.
- [9] Li J, Qian W X, Chen Q, et al. An efficient stereo matching method based on Bayesian theory[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2014, 51(10): 101001.
李娇,钱惟贤,陈钱,等. 一种基于贝叶斯理论的高效立体匹配方法[J]. 激光与光电子学进展, 2014, 51(10): 101001.
- [10] Gu Y, Hu Y H, Hao S Q, et al. Application of variational Bayesian deconvolution method in laser reflective tomography imaging [L]. Acta Optica Sinica, 2016, 36(6): 0611003.
谷雨,胡以华,郝士琦,等. 变分贝叶斯解卷积法在激光反射层析成像中的应用[J]. 光学学报, 2016, 36(6): 0611003.
- [11] Qu H B, Chen X, Wang S T, et al. Forward affine point set matching under variational Bayesian framework [J]. Acta Automatica Sinica, 2015, 41(8): 1482-1494.
曲寒冰,陈曦,王松涛,等. 基于变分贝叶斯逼近的前向仿射变换点集匹配方法研究[J]. 自动化学报, 2015, 41(8): 1482-1494.
- [12] Qu H B, Wang J Q, Li B, et al. Probabilistic graphical model for robust point set matching [J]. Acta Automatica Sinica, 2015, 41(4): 694-710.
曲寒冰,王加强,李彬,等. 基于概率图模型的点集匹配方法研究[J]. 自动化学报, 2015, 41(4): 694-710.
- [13] Qu H B, Wang J Q, Li B, et al. Probabilistic model for robust affine and non-rigid point set matching [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2017, 39(2): 371-384.
- [14] Zhou Z Y, Zheng J, Dai Y K, et al. Robust non-

- rigid point set registration using student's-t mixture model[J]. PloS One, 2014, 9(3): e91381.
- [15] Svensén M, Bishop C M. Robust Bayesian mixture modelling[J]. Neurocomputing, 2005, 64(1): 235-252.
- [16] Archambeau C, Verleysen M. Robust Bayesian clustering[J]. Neural Networks, 2007, 20(1): 129-138.
- [17] Baldacchino T, Worden K, Rowson J. Robust nonlinear system identification: Bayesian mixture of experts using the t-distribution [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2017, 85: 977-992.
- [18] Impens C. Stirling's series made easy [J]. The American Mathematical Monthly, 2003, 110(8): 730-735.
- [19] Yang L J, Tian Z, Zhao W, *et al.* Description of salient features combined with local self-similarity for SAR image registration [J]. Journal of the Indian Society of Remote Sensing, 2017, 45(1): 131-138.