

Tavis-Cummings 模型的能谱和量子纠缠的精确解

丛红璐¹, 任学藻²

¹北京交通大学海滨学院, 河北 黄骅 061199;

²西南科技大学理学院, 四川 绵阳 621010

摘要 在非旋波近似下,对 Tavis-Cummings 模型的能谱和量子纠缠进行了精确求解;将该非旋波近似下的能谱精确解与旋波近似下的结果进行了比较。讨论了初始时刻原子状态参数 θ , 以及光场与原子间的耦合强度对量子纠缠的影响。结果表明,当耦合强度较小时,旋波近似下的能谱与精确解相符;当耦合强度较大时,二者存在明显差异。随着 θ 的增大,纠缠度逐渐增加;随着耦合强度的增大,两原子间出现纠缠突然死亡的现象,且首次出现纠缠突然死亡的时间变短,纠缠死亡持续时间逐渐增加。

关键词 量子光学; Tavis-Cummings 模型; 非旋波近似; 能谱; 量子纠缠

中图分类号 O431.2 **文献标识码** A

doi: 10.3788/LOP54.092701

Exact Solutions of Energy Spectrum and Quantum Entanglement in Tavis-Cummings Model

Cong Honglu¹, Ren Xuezhao²

¹Haibin College, Beijing Jiaotong University, Huanghua, Hebei 061199, China;

²School of Science, Southwest University of Science and Technology, Mianyang, Sichuan 621010, China

Abstract The energy spectrum and the quantum entanglement in the Tavis-Cummings model are exactly solved, without the rotating wave approximation, and this exact solution of the energy spectrum is compared with the result under the rotating wave approximation. The influences of the atom state parameter θ and the atom-field coupling intensity at the initial time on the quantum entanglement are discussed. The results show that, when the coupling intensity is relatively weak, the energy spectrum under the rotating wave approximation is consistent with the exact solution. When the coupling intensity is relatively strong, there exist obvious differences between them. With the increase of θ , the entanglement degree increases gradually. With the increase of the coupling intensity, the phenomenon of entanglement sudden death between two atoms occurs. Moreover, the first occurrence time of entanglement sudden death becomes short and the duration of the entanglement death increases gradually.

Key words quantum optics; Tavis-Cummings model; without rotating wave approximation; energy spectrum; quantum entanglement

OCIS codes 270.5565; 270.5580; 020.5580

1 引言

量子纠缠是量子信息技术的基础,在量子计算^[1-3]、量子通信^[4]、量子超密编码^[5]等领域发挥着至关重要的作用。然而,量子系统受到环境等耗散因素的影响,不可避免地出现退纠缠现象。两纠缠原子在演化过程中纠缠度突然变为零的现象被称为纠缠的突然死亡^[6],这一现象已经被实验所证实^[7]。

在量子光学中,旋波近似由于忽略了非旋波项跃迁产生的虚光子效应而被广泛应用,特别适用于原子与

收稿日期: 2017-04-02; **收到修改稿日期:** 2017-04-14

基金项目: 教育部高等学校物理类专业教学指导委员会力学教学改革项目(JZW-16-LX-07)、河北省高等学校科学技术研究青年基金(QN2017401)、河北省创新能力提升计划软科学研究及科普专项(17K55304D)、河北省实验教学示范中心建设项目、北京交通大学海滨学院教研项目(HBJY16004)

作者简介: 丛红璐(1984—),男,硕士,讲师,主要从事量子光学方面的研究。E-mail: conghonglu@163.com

光场间耦合强度较小的情况。Wallraff 等^[8-9]利用线圈电容谐振腔、一维传输谐振器等,极大地提高了原子与光场间的耦合强度,该强度甚至达到了超高数量级^[10-11]。在这种情况下,需要考虑非旋波项对量子系统的影响。

学者们对 Jaynes-Cummings(JC)模型的精确解进行了大量研究^[12-18]。本文研究了两个二能级原子与单模光场相互作用的 Tavis-Cummings(TC)模型的能谱和量子纠缠的精确解,将旋波近似下的能谱与精确解进行比较,讨论了初始时刻原子状态参数 θ 以及耦合强度对量子纠缠的影响。

2 模型及求解

在非旋波近似下,描述两个全同二能级原子与单模光场间相互作用的哈密顿量可表示为

$$H = \omega_0 a^\dagger a + \Omega \sum_{i=1}^2 S_z^i + g(a^\dagger + a) \sum_{i=1}^2 S_x^i, \quad (1)$$

式中 a^\dagger (a) 为光场的产生(湮灭)算符, ω_0 为光场频率, Ω 为二能级原子的能级间隔, g 为光场与原子间的耦合强度, S_z^i 和 S_x^i ($i=1,2$) 为第 i 个原子的自旋算符,取约化普朗克常数 $\hbar=1$ 。为了将系统哈密顿量对角化,作变换

$$|e\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|E\rangle + |G\rangle), \quad |g\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|E\rangle - |G\rangle), \quad (2)$$

式中 $|e\rangle$ 、 $|g\rangle$ 和 $|E\rangle$ 、 $|G\rangle$ 为变换前后的原子能级。(1)式变为

$$H = \omega_0 a^\dagger a + \Omega \sum_{i=1}^2 S_x^i + g(a^\dagger + a) \sum_{i=1}^2 S_z^i. \quad (3)$$

令系统波函数为

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle |e_1\rangle |e_2\rangle + |\psi_2\rangle |e_1\rangle |g_2\rangle + |\psi_3\rangle |g_1\rangle |e_2\rangle + |\psi_4\rangle |g_1\rangle |g_2\rangle, \quad (4)$$

式中 $|\psi_1\rangle$ 、 $|\psi_2\rangle$ 、 $|\psi_3\rangle$ 和 $|\psi_4\rangle$ 为光场波函数, $|e_1\rangle |e_2\rangle$ 、 $|e_1\rangle |g_2\rangle$ 、 $|g_1\rangle |e_2\rangle$ 和 $|g_1\rangle |g_2\rangle$ 为原子波函数。将(3)、(4)式代入定态薛定谔方程 $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ 得

$$\omega_0 a^\dagger a |\psi_1\rangle + \frac{\Omega}{2} (|\psi_2\rangle + |\psi_3\rangle) + g(a^\dagger + a) |\psi_1\rangle = E |\psi_1\rangle, \quad (5)$$

$$\omega_0 a^\dagger a |\psi_2\rangle + \frac{\Omega}{2} (|\psi_1\rangle + |\psi_4\rangle) = E |\psi_2\rangle, \quad (6)$$

$$\omega_0 a^\dagger a |\psi_3\rangle + \frac{\Omega}{2} (|\psi_1\rangle + |\psi_3\rangle) = E |\psi_3\rangle, \quad (7)$$

$$\omega_0 a^\dagger a |\psi_4\rangle + \frac{\Omega}{2} (|\psi_2\rangle + |\psi_3\rangle) - g(a^\dagger + a) |\psi_4\rangle = E |\psi_4\rangle, \quad (8)$$

式中 E 为能量。

作平移变化 $A = a + \alpha$, $B = a - \alpha$, $A^\dagger = a^\dagger + \alpha$, $B^\dagger = a^\dagger - \alpha$, 其中 $\alpha = g/\omega_0$ ^[19-23]。令

$$|\psi_1\rangle = \sum_{n=0}^N c_n \frac{(A^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} \exp\left(-\alpha a^\dagger - \frac{\alpha^2}{2}\right) |0\rangle, \quad (9)$$

$$|\psi_2\rangle = \sum_{n=0}^N d_n |n\rangle, \quad (10)$$

$$|\psi_3\rangle = \sum_{n=0}^N e_n |n\rangle, \quad (11)$$

$$|\psi_4\rangle = \sum_{n=0}^N f_n \frac{(B^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} \exp\left(\alpha a^\dagger - \frac{\alpha^2}{2}\right) |0\rangle, \quad (12)$$

式中 n 为波函数展开项数,取值范围为 $0 \sim N$, c_n 、 d_n 、 e_n 和 f_n 为系统波函数展开系数, $|n\rangle$ 为 Fock 态, $|0\rangle$ 为真空态。将(9)~(12)式代入(5)~(8)式,并分别左乘 $\langle m|$ 、 $\langle m|$ 、 $\langle m|$ 和 $\langle m|$, 得

$$\omega_0 (m - \alpha^2) c_m + \frac{\Omega}{2} \sum_{n=0}^N (d_n + e_n) \langle m|n\rangle = E c_m, \quad (13)$$

$$\omega_0 m d_m + \frac{\Omega}{2} \sum_{n=0}^N (c_n \langle m | n \rangle_A + f_n \langle m | n \rangle_B) = E d_m, \quad (14)$$

$$\omega_0 m e_m + \frac{\Omega}{2} \sum_{n=0}^N (c_n \langle m | n \rangle_A + f_n \langle m | n \rangle_B) = E e_m, \quad (15)$$

$$\frac{\Omega}{2} \sum_{n=0}^N (d_n + e_n)_B \langle m | n \rangle + \omega_0 (m - \alpha^2) f_m = E f_m, \quad (16)$$

式中 m 为正交归一化后波函数展开系数对应的展开项数, $|n\rangle_A$ 和 $|n\rangle_B$ 分别为平移算符 A 和 B 对应的 Fock 态, ${}_A\langle m|$ 和 ${}_B\langle m|$ 分别为 $|n\rangle_A$ 和 $|n\rangle_B$ 的复共轭, $\langle m|$ 为 $|n\rangle$ 的复共轭, c_m 、 d_m 、 e_m 和 f_m 为正交归一化后系统波函数的展开系数, 且

$${}_A\langle m | n \rangle = \langle m | n \rangle_B = (-1)^n D_{mn}(\alpha), \quad (17)$$

$$\langle m | n \rangle_A = {}_B\langle m | n \rangle = (-1)^m D_{mn}(\alpha), \quad (18)$$

$$D_{mn}(\alpha) = \sum_{i=0}^{\min(n,m)} \frac{(-1)^i \sqrt{m! n!} \alpha^{m+n-2i}}{i! (m-i)! (n-i)!} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}\right), \quad (19)$$

式中 i 为整数常数。通过求解(13)~(19)式, 可得到系统的波函数及能谱。

图 1(a)所示为非旋波近似下系统能谱与耦合强度间的关系, 图 1(b)所示为旋波近似下与非旋波近似下能谱的比较。通过对比可以发现, 在弱耦合区(g 为 $0 \sim 0.05$), 旋波近似下的能谱与精确解完全吻合; 当耦合强度较大时, 二者之间存在较大差异, 这主要是非旋波项的贡献。非旋波项跃迁所产生的光子寿命很短, 被称为虚光子。根据海森堡能量-时间不确定关系, 非旋波项对应的跃迁过程导致系统能量发生很大改变, 因此在光场与原子相互作用的系统中, 虚光子的影响较大。当耦合强度较大时, 非旋波项的贡献不可忽略^[17-20]。

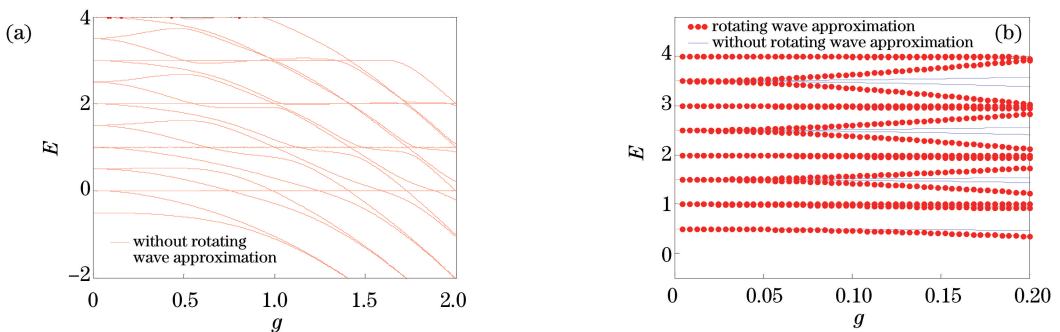


图 1 当 $\Omega/\omega_0=0.5$ 时, 系统能谱随耦合强度的变化。(a) 强耦合; (b) 弱耦合

Fig. 1 System energy spectrum versus coupling intensity when $\Omega/\omega_0=0.5$. (a) Strong coupling; (b) weak coupling

3 量子纠缠

设初始时刻原子处在贝尔态光场真空态, 系统波函数可写为

$$|\psi(0)\rangle = (\cos \theta |E_1\rangle |E_2\rangle + \sin \theta |G_1\rangle |G_2\rangle) |0\rangle, \quad (20)$$

式中 θ 为初始时刻原子状态参数, $|G_1\rangle$ 、 $|G_2\rangle$ 分别为第一个和第二个原子的基态能级, $|E_1\rangle$ 、 $|E_2\rangle$ 分别为第一个和第二个原子的激发态能级。将波函数展开得

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{i'=0}^{4N} k_{i'} \sum_{n=0}^N (c_n |n\rangle_A |e_1\rangle |e_2\rangle + d_n |n\rangle |e_1\rangle |g_2\rangle + e_n |n\rangle |g_1\rangle |e_2\rangle + f_n |n\rangle_B |g_1\rangle |e_2\rangle), \quad (21)$$

式中 $k_{i'}$ 为叠加系数, i' 为叠加系数对应的展开项数。将(2)式代入(20)、(21)式, 并分别左乘 ${}_A\langle m|$ 、 $\langle m|$ 、 $\langle m|$ 和 ${}_B\langle m|$, 整理后得

$$\sum_{i'=0}^{4N} k_{i'} c_m = \frac{1}{2} (\cos \theta + \sin \theta) {}_A\langle m | 0 \rangle, \quad (22)$$

$$\sum_{i'=0}^{4N} k_{i'} d_m = \frac{1}{2} (\sin \theta - \cos \theta) \delta_{m,0}, \quad (23)$$

$$\sum_{i'=0}^{4N} k_{i'} e_m = \frac{1}{2} (\sin \theta - \cos \theta) \delta_{m,0}, \quad (24)$$

$$\sum_{i'=0}^{4N} k_{i'} f_m = \frac{1}{2} (\cos \theta + \sin \theta) {}_B \langle m | 0 \rangle, \quad (25)$$

式中 $m=0$ 时 $\delta_{m,0}=1$, $m \neq 0$ 时 $\delta_{m,0}=0$ 。通过求解(22)~(25)式可得 $k_{i'}$, 则系统任意时刻的波函数为

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{i'=0}^{4N} k_{i'} \exp(-iE_{i'}t) \sum_{n=0}^N (c_n |n\rangle_A |e_1\rangle |e_2\rangle + d_n |n\rangle |e_1\rangle |g_2\rangle + e_n |n\rangle |g_1\rangle |e_2\rangle + f_n |n\rangle_B |g_1\rangle |e_2\rangle), \quad (26)$$

式中 $E_{i'}$ 为不同基矢对应的本征值。

根据 Wootters 的定义^[2], 两原子之间的量子纠缠度写为

$$C(\rho) = \max(0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}), \quad (27)$$

式中 λ_z ($z=1, 2, 3, 4$) 为矩阵 $\xi = \rho_a (\sigma^1 \otimes \sigma^2) \rho_a^* (\sigma^1 \otimes \sigma^2)$ 的本征值, 其中 $\sigma^{(1,2)}$ 为泡利矩阵, ρ_a^* 为 ρ_a 的复共轭, ρ_a 为两原子的约化密度矩阵, 可写为

$$\rho_a = \sum_{i', j=0}^N k_{i'} k_j \exp[-i(E_{i'} - E_j)t] \cdot \sum_{n,m=0}^N \begin{bmatrix} c_m c_m & c_n d_m \langle m | n \rangle_A & c_n e_m \langle m | n \rangle_A & c_n f_m {}_B \langle m | n \rangle_A \\ d_n c_m {}_A \langle m | n \rangle & d_m d_m & d_m e_m & d_n f_m {}_B \langle m | n \rangle \\ e_n c_m {}_A \langle m | n \rangle & e_m d_m & e_m e_m & e_n f_m {}_B \langle m | n \rangle \\ f_n c_m {}_A \langle m | n \rangle_B & f_n d_m \langle m | n \rangle_B & f_n e_m \langle m | n \rangle_B & f_m f_m \end{bmatrix}, \quad (28)$$

式中 t 为演化时间, j 为矩阵列项数。纠缠度 $C(\rho)$ 的最大值为 1, 最小值为 0; $C(\rho)=0$ 表明两原子处于非纠缠态, $C(\rho)>0$ 表明两原子处于纠缠状态。

图 2 所示为在失谐量 $\Delta=0$ 和 $g=0.02$ 下, 当 θ 取不同值时, 纠缠随时间的变化关系, 可以明显看到, 纠缠演化曲线具有较强的周期性。这是由于当光场与原子间的耦合强度以及光场初始状态相同时, 纠缠会以相同的周期进行振荡。随着 θ 的增大, 纠缠演化曲线整体上移, 初始时刻的纠缠度逐渐增大, 当 $\theta=\pi/4$ 时, 初始时刻纠缠度已达到最大值。随着 θ 的改变, TC 模型中没有出现纠缠突然死亡现象, 这与双 JC 模型中量子纠缠的演化结果有明显差异^[20]。

图 3 所示为在 $\Delta=0$ 和 $\theta=\pi/12$ 下, 当耦合强度 g 取不同值时, 纠缠随时间的变化关系, 可以看到, 随着耦合强度的增大, 纠缠演化曲线的振幅逐渐增大但周期性逐渐消失; 虽然不同情况下的耦合强度不同, 但初始时刻具有相同的纠缠度。当耦合强度较大时 ($g=0.5, 1$), 纠缠出现突然死亡现象, 说明此时两原子之间发生了退纠缠现象; 随着耦合强度的增加, 首次出现纠缠突然死亡的时间变短, 而纠缠死亡的持续时间逐渐增加; 通过纠缠演化曲线还可以发现, 纠缠经过突然死亡后依然能够达到最大纠缠度。

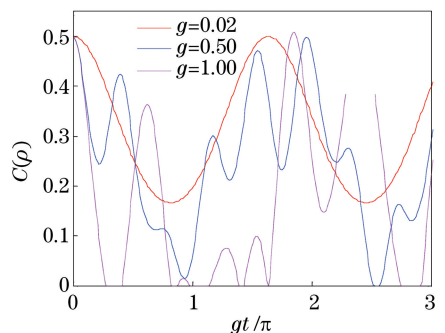
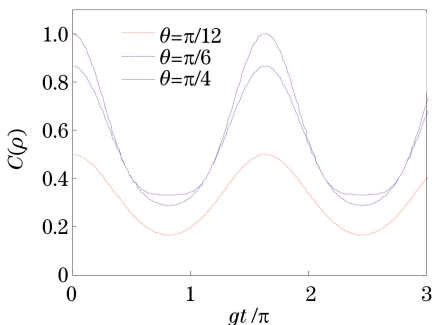


图 2 $\Delta=0, g=0.02$ 时, 量子纠缠的演化

图 3 当 $\Delta=0, \theta=\pi/12$ 时, 量子纠缠的演化

Fig. 2 Evolution of quantum entanglement when $\Delta=0$ and $g=0.02$

Fig. 3 Evolution of quantum entanglement when $\Delta=0$ and $\theta=\pi/12$

4 结 论

在非旋波近似下,对 TC 模型的能谱和量子纠缠进行了精确求解。通过数值计算发现,在弱耦合情况下,能谱在非旋波近似下的结果与在旋波近似下的结果吻合较好;当耦合强度较大时,二者存在明显差异。当初态 θ 取不同值时,纠缠的周期不变但纠缠度改变。随着耦合强度的增大,两原子出现纠缠突然死亡现象,并且首次出现纠缠突然死亡的时间变短,而纠缠死亡的持续时间逐渐增加。

参 考 文 献

- [1] Nielsen M A, Chuang I L. Quantum computation and quantum information[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2010: 1-59.
- [2] Wootters W K. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits[J]. Phys Rev Lett, 1998, 80(10): 2245.
- [3] Hill S, Wootters W K. Entanglement of a pair of quantum bits[J]. Phys Rev Lett, 1997, 78(26): 5011-5025.
- [4] Bennett C H, Divincenzo D P, Smolin J A. Mixed-state entanglement and quantum error correction[J]. Phys Rev A, 1996, 54(5): 3824-3851.
- [5] Bennett C H, Wiesner S J. Communication via one-and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states[J]. Phys Rev Lett, 1992, 69(20): 2881.
- [6] Yu T, Eberly J H. Quantum open system theory: Bipartite aspects[J]. Phys Rev Lett, 2004, 97(14): 140404.
- [7] Almeida M P, de Melo F, Hor-Meyll M, *et al.* Environment-induced sudden death of entanglement[J]. Science, 2007, 316(5824): 579-582.
- [8] Wallraff A, Schuster D I, Blais A, *et al.* Strong coupling of a single photon to a superconducting qubit using circuit quantum electrodynamics[J]. Nature, 2004, 431(7005): 162-167.
- [9] Johansson J, Saito S, Meno T, *et al.* Vacuum Rabi oscillations in a macroscopic superconducting qubit oscillator system[J]. Phys Rev Lett, 2006, 96(12): 127006.
- [10] Anappara A A, de Liberato S, Tredicucci A, *et al.* Light-matter excitations in the ultra-strong coupling regime[J]. Phys Rev B, 2009, 79(20): 201303.
- [11] Bourassa J, Gambetta M, Abdumalikov A A, *et al.* Ultrastrong coupling regime of cavity QED with phase-biased flux qubits[J]. Phys Rev A, 2009, 80(3): 032109.
- [12] Jia Fei, Xie Shuangyuan, Yang Yaping. Interaction of an atom with a field with varying frequency without rotating-wave approximation[J]. Acta Physica Sinica, 2006, 55(11): 5835-5841.
贾 飞, 谢双媛, 羊亚平. 非旋波近似下频率变化的场与原子的相互作用[J]. 物理学报, 2006, 55(11): 5835-5841.
- [13] Chen Q H, Liu T, Zhang Y Y, *et al.* Solution to the Jaynes-Cummings model without the rotating-wave approximation[J]. EPL, 2011, 96(1): 14003.
- [14] Cong Honglu, Ren Xuezhao, Liao Xu. Quantum properties of two-photon Jaynes-Cummings model without rotating wave approximation[J]. Acta Optica Sinica, 2015, 35(7): 0727002.
丛红璐, 任学藻, 廖 旭. 非旋波近似下双光子 Jaynes-Cummings 模型的量子特性[J]. 光学学报, 2015, 35(7): 0727002.
- [15] Ren Xuezhao, Jiang Daolai, Cong Honglu, *et al.* Exact calculations of the energy spectra and the dynamical properties of a two-level system[J]. Acta Physica Sinica, 2009, 58(8): 5406-5411.
任学藻, 姜道来, 丛红璐, 等. 精确计算非旋波近似下二能级系统的能谱和动力学性质[J]. 物理学报, 2009, 58(8): 5406-5411.
- [16] Mirzaee M, Batavani M. Atom-field entanglement in the Jaynes-Cummings model without rotating wave approximation[J]. Chin Phys B, 2015, 24(4): 040306.
- [17] Liao Qinghong, Zheng Qinghua, Yan Qiurong, *et al.* Study on entropy squeezing of the atom in an atom-cavity-optomechanical system[J]. Chinese J Lasers, 2016, 43(2): 0218001.
廖庆洪, 郑庆华, 鄢秋荣, 等. 原子-腔光力学系统中原子熵压缩的研究[J]. 中国激光, 2016, 43(2): 0218001.
- [18] Wang Liping, Meng Shuo, Tan Fengling, *et al.* Coherent control of population transfer in asymmetric double quantum wells[J]. Acta Optica Sinica, 2016, 36(9): 0927002.
汪利平, 孟 硕, 谭凤玲, 等. 不对称双量子阱中电子布居转移的相干控制研究[J]. 光学学报, 2016, 36(9):

0927002.

- [19] Cong Honglu, Ren Xuezhao, Jiang Daolai, *et al.* An exact solution of evolution of the field entropy in a system of three-level cascade type atom interacting with single-mode coherent field[J]. *Acta Physica Sinica*, 2010, 59(5): 3221-3227.
丛红璐, 任学藻, 姜到来, 等. 精确求解级联型三能级原子与单模相干态光场熵的演化特性[J]. *物理学报*, 2010, 59(5): 3221-3227.
- [20] Cong Honglu, Ren Xuezhao. An exact solution of quantum properties of the binomial states field interacting with a Λ -type atom[J]. *Acta Optica Sinica*, 2017, 37(2): 0227001.
丛红璐, 任学藻. 精确求解与 Λ 型原子作用二项式光场的量子特性[J]. *光学学报*, 2017, 37(2): 0227001.
- [21] Cong Honglu, Cheng Shuang, Liu Xuehua, *et al.* Quantum entanglement of a two-mode field interacting with a cascade three-level atom without rotating wave approximation[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2015, 44(9): 0927003.
丛红璐, 成爽, 刘雪华, 等. 双膜光场与级联三能级原子在非旋波近似下的量子纠缠[J]. *光子学报*, 2015, 44(9): 0927003.
- [22] Ren X Z, Jiang D L, Cong H L, *et al.* Exact solution of entanglement of the double Jaynes-Cummings model without rotating wave approximation[J]. *Chin Phys B*, 2010, 19(9): 090309.
- [23] Cong Honglu, Ren Xuezhao, Liao Xu. Quantum properties of two-photon Jaynes-Cummings model without rotating wave approximation[J]. *Acta Optica Sinica*, 2015, 35(7): 0727002.
丛红璐, 任学藻, 廖旭. 非旋波近似下双光子 Jaynes-Cummings 模型的量子特性[J]. *光学学报*, 2015, 35(7): 0727002.