

# 拼接误差对拼接镜成像质量的影响

李斌<sup>1,2,3</sup>, 唐金龙<sup>1,3</sup>, 于文豪<sup>1,2,3</sup>, 陈莫<sup>1,2,3</sup>, 鲜浩<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup>中国科学院自适应光学重点实验室, 四川 成都 610209;

<sup>2</sup>中国科学院大学, 北京 100049;

<sup>3</sup>中国科学院光电技术研究所, 四川 成都 610209

**摘要** 下一代大口径望远镜有两个特点,一是主镜通过拼接而成,且是通过主动光学来控制它们之间的平移、倾斜误差;二是采用自适应光学来校正大气湍流。因此分析拼接误差对拼接镜像质的影响,对下一代望远镜发展有重要意义。通过理论及数值仿真分析了拼接式主镜中平移、倾斜误差以及边缘误差对拼接镜成像质量的影响,通过理论与仿真分析可知拼接镜平移误差与倾斜误差对拼接镜成像质量的影响是相互独立的,边缘误差对拼接镜像质的影响较小。

**关键词** 测量; 拼接望远镜; 天文学; 检测; 共相测量

**中图分类号** TH751 **文献标识码** A

**doi:** 10.3788/LOP54.071202

## Effect of Segmented Errors on Image Quality of Segmented Telescope

Li Bin<sup>1,2,3</sup>, Tang Jinlong<sup>1,3</sup>, Yu Wenhao<sup>1,2,3</sup>, Chen Mo<sup>1,2,3</sup>, Xian Hao<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup>Key Laboratory on Adaptive Optics, Chinese Academy of Sciences, Chengdu, Sichuan 610209, China;

<sup>2</sup>University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China;

<sup>3</sup>Institute of Optics and Electronics, Chinese Academy of Sciences, Chengdu, Sichuan 610209, China

**Abstract** Large-aperture optical telescope of next generation has two features. One is that the primary telescope is segmented, and the piston and tilt/tip errors of sub-mirrors are controlled by active optics. Another is that the adaptive optics is used to eliminate the influence of atmospheric turbulence. So it is very important to analyze the effect of segmented errors on image quality of segmented telescope for the development of next generation telescope. The effects of piston, tilt/tip and edge errors of segmented primary telescope on image quality of segmented telescope are analyzed by using the theory and numerical simulation. The results of theory and simulation indicate that the effects of piston error and tilt/tip error on image quality of segmented telescope are mutual independent, and the effect of edge error on image quality of segmented telescope is little.

**Key words** measurement; segmented telescope; astronomy; detection; co-phase measurement

**OCIS codes** 120.5050 ;110.6770; 350.1270; 110.2970

## 1 引言

在天文观测领域中,为了得到更多天体的信息,须提高望远镜的角分辨率。由于角分辨率与口径成反比,所以在观测波长一定的情况下,只有通过增大望远镜口径的方法来提高望远镜角分辨率。因此,无论是地基望远镜还是天基望远镜,一个共同的发展趋势就是不断增加望远镜口径。目前制作大口径望远镜有三

**收稿日期:** 2017-02-15; **收到修改稿日期:** 2017-02-24

**作者简介:** 李斌(1989—),男,博士研究生,主要从事拼接望远镜共相检测与驱动技术方面的研究。

E-mail: libingioe@126.com

**导师简介:** 鲜浩(1969—),男,研究员,博士生导师,主要从事自适应光学和光机系统设计方面的研究。

E-mail: xianhao@ioe.ac.cn(通信联系人)

种设计方案:蜂窝镜、轻质镜和拼接镜。由于制造技术、加工成本、交通运输等方面的原因,单块的望远镜不能无限增大。目前单块望远镜主镜口径极限为 8 m 级。若要制造更大口径的光学望远镜,就需用拼接的方法,如 KECKI、KECKII、GTC、TMT、E-ELT 等都采用了拼接的方法<sup>[1]</sup>。但是拼接式主镜也存在不足,如子镜间的拼接误差直接影响拼接镜的成像质量,只有保持子镜间共焦共相,其主镜的分辨率才能达到与之相当口径的衍射极限。

子镜的拼接误差主要包括:沿着 Z 轴的平移和旋转,沿 Y 轴和 X 轴平移和旋转,各个方向自由度误差都会引起系统像质的下降<sup>[2]</sup>,其中沿 Z 轴平移运动造成的平移误差与绕 Y 和 X 轴旋转造成的倾斜误差对拼接镜成像质量影响最大<sup>[3]</sup>。目前,国外 Chanan G 等<sup>[4-7]</sup>通过拼接主镜的孔径函数和点扩展函数(PSF)分析了各类误差对拼接镜成像质量的影响,但都没有分析存在多种误差下,拼接镜成像质量的变化情况,也未对边缘误差与拼接子镜口径的关系进行分析。在国内,针对光学合成孔径系统的误差和共相检测问题已经进行了广泛的分析和研究<sup>[8-12]</sup>,但对拼接式主镜的误差对拼接镜成像质量影响的分析研究较少。

本文首先通过理论分析得到拼接镜在同时存在平移误差与倾斜误差时的拼接镜斯特尔比(SR),并分析得到了边缘误差与拼接子镜口径的关系,为拼接子镜加工过程中所提出的加工误差参数值提供了一定依据。然后通过数值模拟的方法仿真分析了同时存在平移误差与倾斜误差时远场光斑的变化以及拼接镜斯特尔比随误差的变化,验证了平移误差与倾斜误差对拼接镜的影响是相互独立的。

## 2 理论基础

对于由六边形拼接而成的主镜,其基本拼接示意图( $M=2, P=19$ )如图 1 所示。假设子镜环数为  $M$  环,则每环子镜个数为  $N=6M(M>0)$ ,当  $M=0$  时子镜个数为 1,所以子镜总数为  $P=3M(M+1)+1$ 。

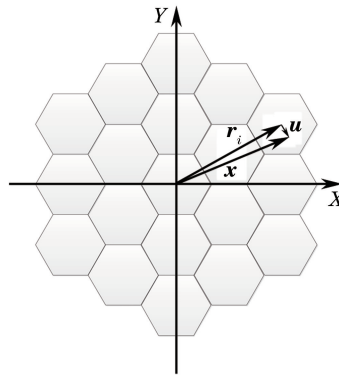


图 1 拼接主镜结构示意图

Fig. 1 Diagram of segmented primary mirror structure

假设子镜上每点坐标为  $x$ ,每块子镜的中心半径为  $r_i$ ,相对每块子镜的中心坐标为  $u$ ,则  $u = x - r_i$ ,即  $u = (x - x_i, y - y_i)$ 。

假设入射光为单位振幅平行光,则拼接主镜的孔径函数为:

$$P(x, y) = \sum_{i=1}^P P_i(x - x_i, y - y_i) = \sum_{i=1}^P A_i(x - x_i, y - y_i) \cdot \exp[j\phi_i(x - x_i, y - y_i)], \quad (1)$$

式中  $P_i(x - x_i, y - y_i)$  和  $\phi_i(x - x_i, y - y_i)$  分别为第  $i$  块子镜的孔径函数和相位函数,  $A_i(x - x_i, y - y_i)$  为第  $i$  块子镜的透射强度,则:

$$A_i(x - x_i, y - y_i) = \begin{cases} 1, & \text{inner} \\ 0, & \text{outer} \end{cases} \quad (2)$$

根据傅里叶光学<sup>[13-14]</sup>,振幅传递函数为像平面的傅里叶变换,则:

$$U(w) = \frac{1}{\lambda f} \iint P(x, y) \exp[jk/(f w x)] dx dy = \frac{1}{\lambda f} \iint \sum_{i=1}^P P_i(x - x_i, y - y_i) \exp[jk/(f w x)] dx dy, \quad (3)$$

式中  $\lambda$  为入射光波长,  $f$  为焦距,  $w$  为像平面位置向量,  $k = 2\pi/\lambda$ , 则对复振幅函数化简得:

$$\begin{aligned}
U(\mathbf{w}) &= \frac{1}{\lambda f} \iint \sum_{i=1}^P P_i(x-x_i, y-y_i) \exp[jk/(f\mathbf{w}\mathbf{x})] dx dy = \\
&= \frac{1}{\lambda f} \sum_{i=1}^P \exp[jk/(f\mathbf{w}\mathbf{r}_i)] \iint P_i(x-x_i, y-y_i) \exp\{jk/[f\mathbf{w}(\mathbf{x}-\mathbf{r}_i)]\} dx dy = \\
&= \frac{SN}{\lambda f} \frac{1}{P} \sum_{i=1}^P \exp[jk/(f\mathbf{w}\mathbf{r}_i)] \frac{1}{S} \iint P_i(\mathbf{u}) \exp[jk/(f\mathbf{w}\mathbf{u})] d^2\mathbf{u}, \quad (4)
\end{aligned}$$

式中正六边形子镜的面积为  $S$ , 假设正六边形对边长为  $d$ , 则  $S = \sqrt{3}/(2d^2)$ 。

像平面强度分布(点扩展函数)为复振幅分布的平方, 则:

$$\begin{aligned}
F_{\text{PSF}}(\mathbf{w}) &= |U(\mathbf{w})|^2 = \\
&= \left(\frac{SP}{\lambda f}\right)^2 \left| \frac{1}{P} \sum_{i=1}^P \exp[jk/(f\mathbf{w}\mathbf{r}_i)] \frac{1}{S} \iint P_i(\mathbf{u}) \exp[jk/(f\mathbf{w}\mathbf{u})] d^2\mathbf{u} \right|^2 = \\
&= \left(\frac{SP}{\lambda f}\right)^2 \left| \frac{1}{P} \sum_{i=1}^P \exp[jk/(f\mathbf{w}\mathbf{r}_i)] \frac{1}{S} \iint A_i(\mathbf{u}) \exp[j\phi_i(\mathbf{u})] \exp[jk/(f\mathbf{w}\mathbf{u})] d^2\mathbf{u} \right|^2. \quad (5)
\end{aligned}$$

首先假设所有子镜都是理想的共面, 则:  $\phi_i(\mathbf{u}) = 0, i = 0, 1, 2, \dots, P$ 。所以像平面分布可化简<sup>[2]</sup>为:

$$\begin{aligned}
F_{\text{PSF}}(\mathbf{w}) &= \left(\frac{SP}{\lambda f}\right)^2 \left| \frac{1}{P} \sum_{i=1}^P \exp[jk/(f\mathbf{w}\mathbf{r}_i)] \right|^2 \left| \frac{1}{S} \iint A_i(\mathbf{u}) \exp[jk/(f\mathbf{w}\mathbf{u})] d^2\mathbf{u} \right|^2 = \\
&= \left(\frac{SP}{\lambda f}\right)^2 2F_G(\mathbf{w}) F_{\text{PSF}_s}(\mathbf{w}), \quad (6)
\end{aligned}$$

由(6)式可知: 主镜的  $F_{\text{PSF}}$  主要跟  $F_G(\mathbf{w})$  和  $F_{\text{PSF}_s}(\mathbf{w})$  这两个函数有关。  $F_G(\mathbf{w})$  是拼接镜栅格的傅里叶变换, 叫作栅格函数, 通常它是带有尖峰的周期函数,  $F_{\text{PSF}_s}(\mathbf{w})$  为子镜的点扩展函数, 当  $\mathbf{w} = 0$  时, 由  $F_G(\mathbf{w})$  和  $F_{\text{PSF}_s}(\mathbf{w})$  表达式可知它们都为 1。

## 2.1 系统平移对像质的影响分析

假设拼接  $i$  子镜平移误差为  $\delta_i$  时, 其相位变化为  $2k\delta_i$ , 并且拼接镜平移误差与孔径函数中的  $X, Y$  无关, 则拼接镜的平移误差只影响栅格函数  $F_G(\mathbf{w})$ , 对  $F_{\text{PSF}_s}(\mathbf{w})$  函数没有影响, 即:

$$\begin{aligned}
F_{\text{PSF}}(\mathbf{w}) &= \left(\frac{SP}{\lambda f}\right)^2 \left| \frac{1}{P} \sum_{i=1}^P \exp[jk/(f\mathbf{w}\mathbf{r}_i + j2k\delta_i)] \right|^2 \left| \frac{1}{S} \iint A_i(\mathbf{u}) \exp[jk/(f\mathbf{w}\mathbf{u})] d^2\mathbf{u} \right|^2 = \\
&= \left(\frac{SP}{\lambda f}\right)^2 F'_G(\mathbf{w}) F_{\text{PSF}_s}(\mathbf{w}), \quad (7)
\end{aligned}$$

则远场中心强度为<sup>[6]</sup>:

$$\begin{aligned}
F_{\text{PSF}}(0) &= \left(\frac{SP}{\lambda f}\right)^2 \left| \frac{1}{P} \sum_{i=1}^P \exp(j2k\delta_i) \right|^2 = \\
&= \left(\frac{SP}{\lambda f}\right)^2 \left[ \sum_{i=1}^P |\exp(j2k\delta_i)|^2 + 2 \sum_{i=1}^P \sum_{l=i}^P \exp(j2k\delta_i) \exp(-j2k\delta_l) \right] = \\
&= \left(\frac{SP}{\lambda f}\right)^2 \left[ P + 2 \sum_{i=1}^P \sum_{l=i}^P \cos(2k\delta_i - 2k\delta_l) \right], \quad (8)
\end{aligned}$$

远场光斑斯特尔比  $V_{\text{SR}}$  为:

$$V_{\text{SR}} = \frac{I_\delta(0)}{I_0(0)} = \frac{\left(\frac{S}{\lambda f}\right)^2 \left[ P + 2 \sum_{i=1}^P \sum_{l=i}^P \cos(2k\delta_i - 2k\delta_l) \right]}{\left(\frac{SP}{\lambda f}\right)^2} = \frac{1}{P} \left[ 1 + \frac{2}{P} \sum_{i>l} \cos(2k\delta_i - 2k\delta_l) \right], \quad (9)$$

式中  $P$  为子镜总数,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ 。则斯特尔比  $V_{\text{SR}}$  可化简为:

$$V_{\text{SR}} = \frac{1}{P} [1 + (P-1) \cos(2k\delta_i - 2k\delta_l)]. \quad (10)$$

现假设  $\delta_i$  服从高斯  $(0, \sigma^2)$  分布, 则  $2k\delta_i$  服从  $(0, 4k^2\sigma^2)$  高斯分布,  $2k\delta_i - 2k\delta_l$  服从  $(0, 8k^2\sigma^2)$  高斯分

布,因此  $\cos(2k\delta_i - 2k\delta_j) = \exp(-4k^2\sigma^2)$ 。代入(10)式得:

$$V_{SR} = \frac{1}{P} [1 + (P-1)\exp(-4k^2\sigma^2)]。 \quad (11)$$

图2为不同拼接子镜数下,拼接镜斯特尔比  $V_{SR}$  与平移误差的关系图,其中横坐标表示拼接镜相位,单位为 rad,纵坐标表示拼接镜的斯特尔比。从图中可知要使系统的斯特尔比  $V_{SR} > 0.95$ ,子镜平移的标准差  $\sigma < 0.02\lambda$ 。

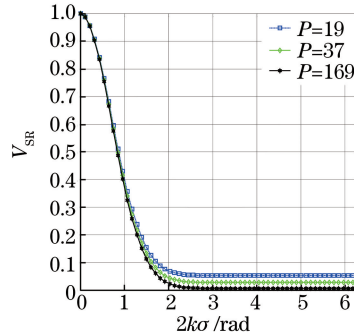


图2 子镜总数为19、37、169时系统斯特尔比与平移误差标准差  $\sigma$  的关系图

Fig. 2 System Strehl ratio as a function of standard deviation  $\sigma$  of piston errors with 19, 37, 169 sub-mirrors, respectively

## 2.2 系统倾斜误差对像质的影响分析

当拼接镜之间只存在倾斜误差时,子镜的倾斜误差只与子镜孔径函数和相位函数有关,因此倾斜误差只影响函数  $F_{PSF_s}(\mathbf{w})$ ,对栅格函数  $F_G(\mathbf{w})$  没有影响,因此可知:平移误差与倾斜误差对拼接镜成像质量的影响是相互独立的。现定义  $a_i$  为拼接子镜相位误差函数,倾斜误差角为  $\theta_i = (\alpha_i, \beta_i)$ ,则:

$$\varphi_i(\mathbf{u}) = \varphi_i(\mathbf{x} - \mathbf{r}_i) = 2k \cdot a_i(\mathbf{x} - \mathbf{r}_i) = 2k \cdot a_i(\mathbf{u}) = 2k \cdot \mathbf{u} \cdot \sin \theta_i = k u_x \sin \alpha_i / d + k u_y \sin \beta_i / d, \quad (12)$$

因此:

$$\begin{aligned} U(\mathbf{w}) &= \frac{1}{\lambda f} \iint \sum_{i=1}^P P_i(\mathbf{u}) \exp[jk/(f\mathbf{w}\mathbf{u})] d\mathbf{u}^2 = \\ &= \frac{1}{\lambda f} \sum_{i=1}^P \exp[jk/(f\mathbf{w}\mathbf{r}_i)] \iint A_i(x - x_i, y - y_i) \exp\{j\phi_i(\mathbf{x} - \mathbf{r}_i) + jk/[f\mathbf{w}(\mathbf{x} - \mathbf{r}_i)]\} dx dy = \\ &= \frac{SN}{\lambda f} \frac{1}{P} \sum_{i=1}^P \exp[jk/(f\mathbf{w}\mathbf{r}_i)] \frac{1}{S} \iint A_i(\mathbf{u}) \exp[j\phi_i(\mathbf{u}) + jk/(f\mathbf{w}\mathbf{u})] d^2\mathbf{u}, \end{aligned} \quad (13)$$

则:

$$\begin{aligned} F_{PSF}(\mathbf{w}) &= \left(\frac{S}{\lambda f}\right)^2 \left| \frac{1}{P} \sum_{i=1}^P \exp[jk/(f\mathbf{w}\mathbf{r}_i)] \right|^2 \left| \frac{1}{S} \iint A_i(\mathbf{u}) \exp[j\phi_i(\mathbf{u}) + jk/(f\mathbf{w}\mathbf{u})] d^2\mathbf{u} \right|^2 = \\ &= \left(\frac{S}{\lambda f}\right)^2 F_G(\mathbf{w}) F'_{PSF_s}(\mathbf{w}), \end{aligned} \quad (14)$$

所以<sup>[2]</sup>:

$$\begin{aligned} V_{RMS}^2 &= \frac{1}{AP} \int_A \varphi^2(x) d^2x = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^P \frac{1}{A} \iint A_i(\mathbf{u}) \phi_i^2(\mathbf{u}) d^2\mathbf{u} = \\ &= \frac{1}{P} \sum_{i=1}^P \frac{1}{A} \iint A_i(\mathbf{u}) 4(k/d)^2 (u_x \sin \alpha_i + u_y \sin \beta_i)^2 d^2\mathbf{u} = \\ &= \frac{1}{A} \iint A_i(x, y) \frac{1}{P} \sum_{i=1}^P 4(k/d)^2 (u_x \sin \alpha_i + u_y \sin \beta_i)^2 d^2\mathbf{u}, \end{aligned} \quad (15)$$

式中  $\alpha_i, \beta_i$  为第  $i$  子镜  $X$  方向倾斜误差值和  $Y$  方向倾斜误差值,  $V_{RMS}$  为波前相位均方根(RMS)。现假设  $\alpha_i$  为 0,  $\beta_i$  服从高斯  $(0, \sigma)$  分布;当  $P$  很大,  $\beta_i$  较小且服从高斯  $(0, \sigma)$  分布时<sup>[2]</sup>, 则:

$$V_{RMS}^2 = \frac{1}{S} \iint A_i(\mathbf{u}) \frac{1}{P} \sum_{i=1}^P (2k u_y \beta / d)^2 d^2\mathbf{u} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{S} \iint A_i(\mathbf{u}) \left(\frac{2k u_y}{d}\right)^2 \beta^2 d^2\mathbf{u} = (0.37 \times 2k\sigma/d)^2。 \quad (16)$$

因此系统点扩展函数可以写为:

$$F_{\text{PSF}}(\mathbf{w}) = \left(\frac{SP}{\lambda f}\right)^2 F_G(\mathbf{w}) F'_{\text{PSF}_s}(\mathbf{w}, V_{\text{RMS}}), \quad (17)$$

式中单块子镜的  $F'_{\text{PSF}_s}(\mathbf{w}, V_{\text{RMS}}) = |t(\mathbf{w}')Q(V_{\text{RMS}}, \mathbf{w} - \mathbf{w}')d\mathbf{w}'|$ , 其中  $t(\mathbf{w}')$  为子镜的振幅函数,  $Q(V_{\text{RMS}}, \mathbf{w} - \mathbf{w}')$  为子镜倾斜误差服从某种分布的函数。当倾斜误差服从高斯分布时,  $Q(V_{\text{RMS}}, \mathbf{w} - \mathbf{w}')$  表达式为<sup>[2]</sup>:

$$Q(V_{\text{RMS}}, \mathbf{w} - \mathbf{w}') = \left(\frac{2\pi}{\lambda f}\right)^2 \frac{d^2}{2\pi (2.7V_{\text{RMS}})^2} \exp\left[-\left(\frac{2\pi}{\lambda f}\right)^2 \frac{(\mathbf{w} - \mathbf{w}')^2 d^2}{2 (2.7V_{\text{RMS}})^2}\right]. \quad (18)$$

因此, 在存在倾斜误差且  $\sigma$  很小时 (即  $V_{\text{RMS}} \rightarrow 0$ ), 斯特尔比  $V_{\text{SR}}$  为:

$$V_{\text{SR}} = \frac{F_{\text{PSF}}(0, V_{\text{RMS}})}{F_{\text{PSF}}(0, 0)} \approx 1 - V_{\text{RMS}}^2 + \frac{V_{\text{RMS}}^2}{4} \left(2.34 + \frac{2}{P}\right). \quad (19)$$

图 3 为不同拼接子镜数下, 倾斜误差与拼接镜斯特尔比  $V_{\text{SR}}$  的关系图, 其中横坐标表示拼接镜相位面型误差, 单位为 rad, 纵坐标表示拼接镜的斯特尔比。从图中可得: 子镜个数对系统斯特尔比几乎没有影响, 要使系统的斯特尔比  $V_{\text{SR}} > 0.95$ ,  $V_{\text{RMS}} < 0.2$  rad, 即  $V_{\text{RMS}} < 0.2 \times (\lambda/2\pi) = 0.03\lambda$ 。

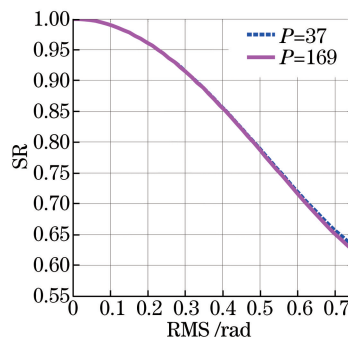


图 3 子镜数  $P$  为 37、169 时斯特尔比  $V_{\text{SR}}$  与倾斜误差 RMS 的关系图

Fig. 3 Strehl ratio  $V_{\text{SR}}$  as a function of RMS of tip/tilt errors with 37, 169 sub-mirrors respectively

### 2.3 系统边缘误差对像质的影响

在子镜加工过程中, 子镜边缘误差是需要考虑的主要因素, 并且拼接主镜是由很多子镜组成的, 因此选取恰当的边缘误差, 可以合理控制加工成本与加工进程, 所以分析边缘误差对像质的影响意义重大。在镜面加工过程中, 镜面边缘由于受力不均匀而出现偏差, 根据边缘处理的一般经验, 边缘误差轮廓曲线可以表示为<sup>[7]</sup>:

$$\phi(x, \zeta, \eta) = -\zeta x / \eta, \quad (20)$$

$$\phi(x, \zeta, \eta) = -\zeta (x/\eta)^2, \quad (21)$$

$$\phi(x, \zeta, \eta) = 2\zeta \{ \exp[-(x/\eta)^2 \ln 2] - 1 \}, \quad (22)$$

式中变量  $\zeta, \eta$  含义如图 4 所示,  $\zeta$  为抛光误差的深度, 通常  $0.2 \mu\text{m} < |\zeta| < 0.5 \mu\text{m}$ ;  $\eta$  为子镜边缘误差的宽度, 通常  $2 \text{mm} < |\eta| < 10 \text{mm}$ <sup>[7]</sup>。在实际加工中, (20) 式更接近实际加工工程, 因此相位与边缘误差和抛光误差的关系都用 (20) 式表示<sup>[7]</sup>。

在实际各子镜中, 边缘误差的深度与宽度是在某个范围随机分布的, 为了便于分析, 假设所有子镜的边

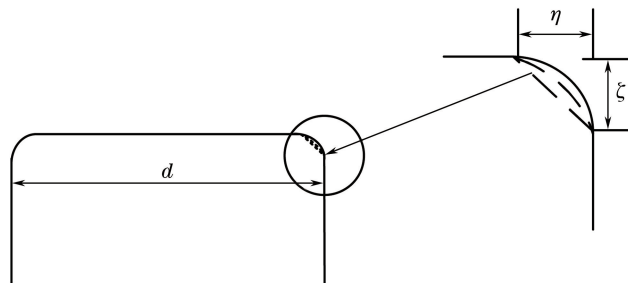


图 4 边缘误差示意图

Fig. 4 Diagram of edge error

缘误差是相同的,根据点扩展函数公式<sup>[7]</sup>:

$$F_{\text{PSF}}(\mathbf{w}) = \left(\frac{SP}{\lambda f}\right)^2 \left| \frac{1}{P} \sum_{i=1}^P \exp[jk/(f\mathbf{w}r_i)] \right|^2 \left| \frac{1}{S} \iint A_i(\mathbf{u}) \exp[2jk\phi(x, \zeta, \eta)] \exp[jk/(f\mathbf{w}\mathbf{u})] d^2\mathbf{u} \right|^2 = \left(\frac{SP}{\lambda f}\right)^2 2F_G(\mathbf{w}) F'_{\text{PSF}}(\mathbf{w}, \zeta, \eta), \quad (23)$$

现把  $\eta$  分成  $N$  等份,则:

$$F'_{\text{PSF}}(\mathbf{w}, \zeta, \eta) \approx \left| \frac{1}{S} \int A_0(\xi) \exp[2jk\phi_0(\eta, \zeta)] + \sum_{i=1}^N [A_i(\mathbf{u}) - A_{i-1}(\mathbf{u})] \times \exp[j\phi_i(\eta, \zeta)] \times \exp\left(j \frac{2\pi}{\lambda f} \mathbf{w}\mathbf{u}\right) d^2\mathbf{u} \right|^2, \quad (24)$$

式中当  $i=0$  时,子镜面积  $S_{i=0} = \sqrt{3}(d-\eta)^2/2$ ,  $A_i$  为第  $i$  份时的孔径函数,由于六边形子镜边缘被分成  $N$  等份,则  $d_i = d - 2\eta + 2i\Delta x$ 。

因此子镜面积为  $S_{i=n} = \sqrt{3}(d - 2\eta + 2n\Delta x)^2/2$ , 则:

$$F'_{\text{PSF}}(\mathbf{w}, \zeta, \eta) \approx \left| \frac{S_0}{S} \left[ \frac{1}{S_0} \int A_0(\mathbf{u}) \exp\left(j \frac{2\pi}{\lambda f} \mathbf{w}\mathbf{u}\right) d^2\mathbf{u} \right] + \sum_{i=1}^N \exp[j2k\phi_i(\eta, \zeta)] \left\{ \frac{S_i}{S} \left[ \frac{1}{S_i} \int A_i(\mathbf{u}) \exp\left(j \frac{2\pi}{\lambda f} \mathbf{w}\mathbf{u}\right) d^2\mathbf{u} \right] - \frac{S_{i-1}}{S} \left[ \frac{1}{S_{i-1}} \int A_{i-1}(\mathbf{u}) \exp\left(j \frac{2\pi}{\lambda f} \mathbf{w}\mathbf{u}\right) d^2\mathbf{u} \right] \right\} \right|^2 = \left| \frac{S_0}{S} t_0(\mathbf{w}) + \sum_{i=1}^N \exp[j2k\phi_i(\eta, \zeta)] \times \left[ \frac{S_i}{S} t_i(\mathbf{w}) - \frac{S_{i-1}}{S} t_{i-1}(\mathbf{w}) \right] \right|^2, \quad (25)$$

由于  $d(x) = d - 2\eta + 2x$ , 其中  $x \in (0, \eta)$ 。 则:

$$F'_{\text{PSF}}(\mathbf{w}, \zeta, \eta) = \left| \left[ \frac{(d-2\eta)}{d} \right]^2 t(\mathbf{w}, \eta, \zeta) + \int_0^\eta \exp[j\phi(x, \eta, \zeta)] \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{d-2\eta+2x}{d} \right)^2 t(\mathbf{w}, \eta, \zeta) \right] dx \right|^2. \quad (26)$$

则斯特尔比为:

$$V_{\text{SR}}(\eta, \zeta) = \left| \left( \frac{d-2\eta}{d} \right)^2 + 4 \int_0^\eta \frac{d-2\eta+2x}{d^2} \exp[j2k\phi(x, \eta, \zeta)] dx \right|^2. \quad (27)$$

由(27)式可知,系统斯特尔比与子镜对边长  $d$  有一定关系。图5为边缘误差与斯特尔比的关系图,从图中可得: $d$  的变化对系统斯特尔比影响较小,当  $\zeta > 0.2 \mu\text{m}$  时,系统斯特尔比几乎没有大的变化。而通常有  $0.2 \mu\text{m} < |\zeta| < 0.5 \mu\text{m}$ ,  $2 \text{mm} < |\eta| < 10 \text{mm}$ , 现假设  $\zeta$  和  $\eta$  都取最大值,则要使系统斯特尔比  $V_{\text{SR}} > 0.95$ , 子镜  $d$  需大于  $1.2 \text{m}$ 。

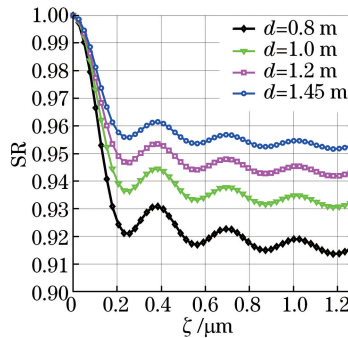


图5 在边缘误差  $\eta=10 \text{mm}$ 、子镜边长  $d=0.8, 1.0, 1.2, 1.45 \text{m}$  时,斯特尔比随边缘深度  $\zeta$  变化曲线图

Fig. 5 Strehl ratio as a function of the depth of edge  $\zeta$  with the error of edge  $\eta=10 \text{mm}$  and the diagonal distance of sub-mirror  $d=0.8, 1.0, 1.2, 1.45 \text{m}$ , respectively

### 3 仿真分析

根据理论分析可知拼接镜的平移、倾斜误差与拼接镜点扩展函数以及拼接镜斯特尔比存在一定关系。仿真中拼接子镜为正六边形,对边长为 1.45 m。首先分析了单独存在不同平移误差和倾斜误差时拼接镜的点扩展函数分布,并分析了拼接镜斯特尔比在不同平移误差和倾斜误差下,以及不同子镜数下的变化情况,最后仿真分析了同时存在平移误差和倾斜误差时系统点扩展函数的分布以及拼接镜斯特尔比随误差的变化规律。其中子镜中平移误差和倾斜误差都服从正态分布。仿真中误差都是在(3)式的基础上得到的。

#### 3.1 只存在平移误差对成像质量影响的仿真分析

图 6 为子镜总数  $P=169$  的点扩展函数的分布图,其中系统子镜平移误差服从  $(0, \sigma)$  的正态分布。从图中可知,在平移标准差  $\sigma$  较小时,系统远场光斑大小随着  $\sigma$  大小变化明显;当拼接镜的平移误差  $\sigma$  较大时,系统远场光斑大小随  $\sigma$  的变化不明显。图 7 为子镜总数不同的情况下,拼接镜斯特尔比随拼接镜平移误差  $\sigma$  变化图,图中三条曲线变化代表不同子镜数下,斯特尔比随  $\sigma$  变化的曲线,从曲线中可知,在  $\sigma$  较大时,系统的斯特尔比最后都会趋于一个很小的常数;而在  $\sigma$  较小时,子镜数对斯特尔比影响较小。要想使拼接镜的远场光斑  $V_{SR} > 0.95$ ,系统  $2k\delta < 0.25 \text{ rad}$ ,即  $\delta < 0.02\lambda$ ,并与理论  $V_{SR}$  随平移误差曲线变化对比可知,仿真曲线与理论曲线一致。

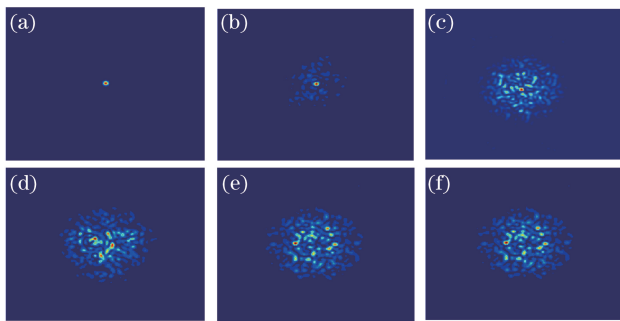


图 6 子镜总数  $P=169$ ,只存在平移误差时系统点扩展函数分布图。

(a)  $\sigma=0$ ; (b)  $\sigma=0.1\lambda$ ; (c)  $\sigma=0.2\lambda$ ; (d)  $\sigma=0.4\lambda$ ; (e)  $\sigma=0.8\lambda$ ; (f)  $\sigma=1.6\lambda$

Fig. 6 Diagram of system PSF distribution only with piston errors when  $P=169$ .

(a)  $\sigma=0$ ; (b)  $\sigma=0.1\lambda$ ; (c)  $\sigma=0.2\lambda$ ; (d)  $\sigma=0.4\lambda$ ; (e)  $\sigma=0.8\lambda$ ; (f)  $\sigma=1.6\lambda$

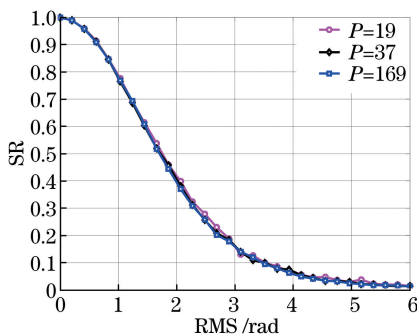


图 7 子镜总数  $P$  为 19、37、169 下,系统远场光斑斯特尔比随平移误差标准差  $\sigma$  变化的曲线图

Fig. 7 Strehl ratio of system far field spot as a function of standard deviation  $\sigma$  of piston errors with 19, 37, 169 sub-mirrors, respectively

根据图 7 与图 2 对比结果可知,仿真曲线与理论曲线非常吻合,通过该仿真实验验证了理论结果的正确性。

#### 3.2 只存在倾斜误差时对成像质量影响的仿真分析

图 8 为子镜个数为 7 的拼接镜点扩展函数分布图,子镜倾斜误差服从正态分布,并转化为波前相位 RMS。从图中可知,随着 RMS 增大,系统远场光斑越大分开得越明显。当子镜的 RMS 足够大,以致各子镜的倾斜都相差较大时,系统的远场光斑就会分开为与子镜相同个数的光斑;当 RMS 较小时,系统的远场光斑就是各子镜的远场的相互干涉图。

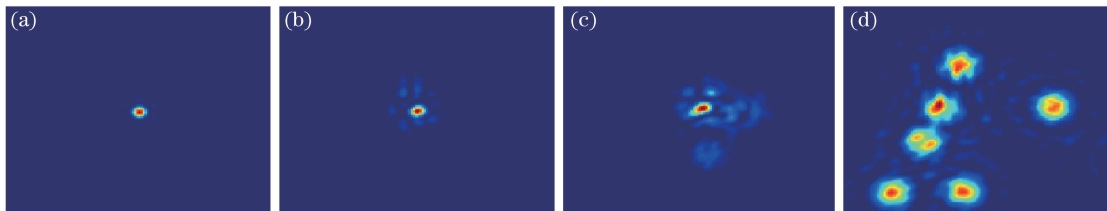


图 8 子镜总数  $P=7$ , 只存在倾斜误差下系统的点扩展函数分布图。(a)  $V_{\text{RMS}}=0.2$  rad; (b)  $V_{\text{RMS}}=2$  rad; (c)  $V_{\text{RMS}}=6$  rad; (d)  $V_{\text{RMS}}=12$  rad

Fig. 8 Diagram of system PSF distribution only with tilt/tip errors when  $P=7$ .

(a)  $V_{\text{RMS}}=0.2$  rad; (b)  $V_{\text{RMS}}=2$  rad; (c)  $V_{\text{RMS}}=6$  rad; (d)  $V_{\text{RMS}}=12$  rad

随着子镜总数的增加,各子镜间的光斑之间的叠加增多,以致最后系统的远场光斑变复杂,图 9 为子镜个数为 169 时拼接镜的点扩展函数分布图,其与子镜较少时最大的不同点是,在  $V_{\text{RMS}}$  较大时,系统远场光斑仍有一个主光强点,而不是完全分开。当  $V_{\text{RMS}}=4$  rad 时,系统开始出现了多个次光斑; $V_{\text{RMS}}>5$  rad 时,系统远场光斑的次光强点变得越来越清晰。

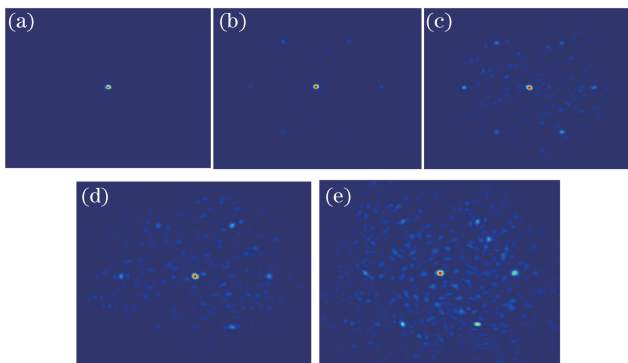


图 9 子镜总数  $P=169$ , 只存在倾斜误差下系统的点扩展函数分布图。(a)  $V_{\text{RMS}}=1$  rad; (b)  $V_{\text{RMS}}=3$  rad; (c)  $V_{\text{RMS}}=4$  rad; (d)  $V_{\text{RMS}}=5$  rad; (e)  $V_{\text{RMS}}=6$  rad

Fig. 9 Diagram of system PSF distribution only with tilt/tip error when  $P=169$ .

(a)  $V_{\text{RMS}}=1$  rad; (b)  $V_{\text{RMS}}=3$  rad; (c)  $V_{\text{RMS}}=4$  rad; (d)  $V_{\text{RMS}}=5$  rad; (e)  $V_{\text{RMS}}=6$  rad

图 10 为不同子镜数下,系统的斯特尔比随倾斜误差标准差变化的曲线图,其图横坐标表示拼接镜相位面型误差,单位为 rad,纵坐标表示拼接镜的斯特尔比。从图中可以得知,子镜个数对系统的斯特尔比几乎没有影响。在  $V_{\text{RMS}}$  较小时,与理论分析图相符合;而当  $V_{\text{RMS}}>3$  rad 时,系统斯特尔比  $V_{\text{SR}}<0.1$ ,可知该情况下倾斜误差对系统远场成像质量有非常大的影响,要使系统远场的斯特尔比  $V_{\text{SR}}>0.95$ ,系统的误差  $V_{\text{RMS}}<0.2$  rad。

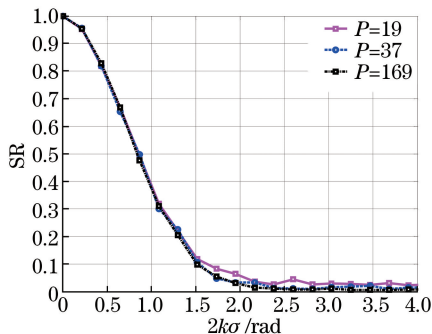


图 10 子镜总数  $P=19, 37, 169$ , 系统斯特尔比随倾斜误差标准差变化的曲线图

Fig. 10 System Strehl ratio as a function of standard deviation RMS of tip/tilt errors with 19, 37, 169 sub-mirrors, respectively



根据图 7 与图 2 对比结果可知,仿真曲线与理论曲线在  $V_{\text{RMS}} < 0.2 \text{ rad}$  时,理论曲线与仿真曲线较吻合;而当  $V_{\text{RMS}}$  较大时,仿真曲线与理论曲线相差较大。因此,在倾斜误差较小时,理论公式才成立;不满足条件时,理论公式不成立。

### 3.3 倾斜与平移误差同时存在时对成像质量影响的仿真分析

为了得到子镜同时存在平移误差与倾斜误差时对成像质量的影响,现在假定各子镜的平移误差与倾斜误差是互不相关的,假定子镜的平移误差服从  $(0, \sigma)$  的正态分布,子镜倾斜误差也服从正态分布,并转化为波前相位 RMS。在该状态下的系统点扩展函数分布如图 11 所示,从图中可知系统光斑大小随着误差的增大而增大。然后仿真了在子镜平移标准差分别为  $\sigma = 0, \sigma = 0.05\lambda, \sigma = 0.1\lambda$ , 系统斯特尔比随倾斜的 RMS 的变化曲线(图 12)。从图 12 可知,在平移误差为  $\sigma = 0, \sigma = 0.05\lambda, \sigma = 0.1\lambda$ , 拼接镜斯特尔比起点分别为 1, 0.68, 0.215;而理论分析中,在子镜总数为 169、平移标准差分别为  $\sigma = 0, \sigma = 0.05\lambda, \sigma = 0.1\lambda$  时,拼接镜斯特尔比分别为 1, 0.68, 0.214。

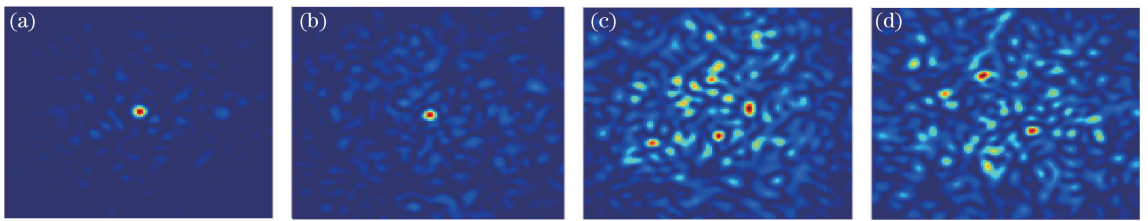


图 11 子镜总数  $P = 169$ , 同时存在平移与倾斜误差下系统的点扩展函数分布图。(a)  $\sigma = 0.1\lambda, V_{\text{RMS}} = 1.6 \text{ rad}$ ;  
(b)  $\sigma = 0.1\lambda, V_{\text{RMS}} = 2.4 \text{ rad}$ ;(c)  $\sigma = 0.2\lambda, V_{\text{RMS}} = 1.6 \text{ rad}$ ;(d)  $\sigma = 0.2\lambda, V_{\text{RMS}} = 2.4 \text{ rad}$

Fig. 11 Diagram of system PSF distribution as a function of tilt/tip error and piston error with 169 sub-mirrors.

(a)  $\sigma = 0.1\lambda, V_{\text{RMS}} = 1.6 \text{ rad}$ ; (b)  $\sigma = 0.1\lambda, V_{\text{RMS}} = 2.4 \text{ rad}$ ; (c)  $\sigma = 0.2\lambda, V_{\text{RMS}} = 1.6 \text{ rad}$ ; (d)  $\sigma = 0.2\lambda, V_{\text{RMS}} = 2.4 \text{ rad}$

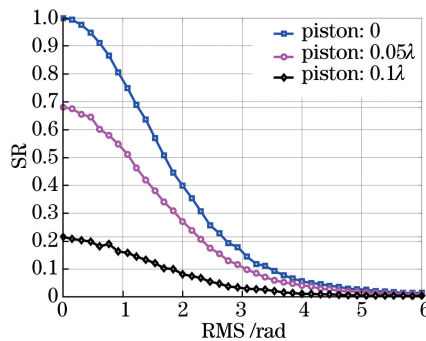


图 12 子镜总数  $P = 169$ , 平移标准差  $\sigma$  为 0, 0.05 $\lambda$ , 0.1 $\lambda$  时, 斯特尔比随倾斜标准差 RMS 变化的系统曲线图

Fig. 12 Strehl ratio as a function of standard deviation RMS of tip/tilt error with 169 sub-mirrors,  
piston standard deviation  $\sigma = 0, 0.05\lambda, 0.1\lambda$

根据该仿真结果可知,在同时存在平移误差与倾斜误差时,系统斯特尔比为单独存在平移误差和倾斜误差时斯特尔比的乘积。因此,平移误差和倾斜误差对拼接镜成像质量的影响是相互独立的。

## 4 结 论

拼接实现大口径望远镜的方式,是下一代巨型望远镜发展的前提。但拼接误差却降低了拼接式望远镜的成像质量。本文通过理论及数值仿真详细而全面地分析了拼接式主镜中平移、倾斜以及边缘误差对系统成像质量的影响。结果表明:拼接式望远镜成像质量随着拼接镜平移误差标准差  $\sigma$  增加逐渐变差,当  $\sigma < 0.02\lambda$  时,拼接式望远镜远场光斑斯特尔比  $V_{\text{SR}} > 0.95$ ;当拼接镜存在倾斜误差时,并将倾斜误差转化为波前相位 RMS,拼接式望远镜成像质量随着  $V_{\text{RMS}}$  增加逐渐变差,当  $V_{\text{RMS}} < 0.2 \text{ rad}$  时,拼接式望远镜远场光斑斯特尔比  $V_{\text{SR}} > 0.95$ ;当拼接镜同时存在平移误差与倾斜误差时,拼接式望远镜远场光斑斯特尔比为单独存在平移误差与倾斜误差时的斯特尔比之积;边缘误差在经验值下,要使拼接式望远镜远场光斑斯特尔比

$V_{SR} > 0.95$ , 子镜对边长  $d > 1.2$  m。通过拼接误差对拼接镜成像质量影响的理论与仿真分析, 为工程实际中共焦共相检测中误差的容许值提供了理论依据。

### 参 考 文 献

- [1] Su Dingqiang, Cui Xiangqun. Active optics—key technology of the new generation telescope [J]. Progress in Astronomy, 1999, 17(1): 1-14.  
苏定强, 崔向群. 主动光学—新一代大望远镜的关键技术[J]. 天文学进展, 1999, 17(1): 1-14.
- [2] Yaitskova N, Dohlen K. Tip-tilt error for extremely large segmented telescopes: detailed theoretical point-spread-function analysis and numerical simulation results[J]. J Opt Soc Am A, 2002, 19(7): 1274-1285.
- [3] Chen Rongli, Zhang Tao, Ma Zhen, *et al.* Influences of the alignment errors on image quality of large segmented mirrors[J]. Acta Photonica Sinica, 2009, 38(12): 3240-3245.  
陈荣利, 张涛, 马臻, 等. 拼接误差对拼接式大口径反射镜成像质量的影响[J]. 光子学报, 2009, 38(12): 3240-3245.
- [4] Chanan G, Troy M. Strehl ratio and modulation transfer function for segmented mirror telescope as function of segment phase error[J]. Applied Optics, 1999, 38(31): 6642-6647.
- [5] Zeiders G W. Image-based alignment of large segmented telescope[C]. SPIE, 2000, 4003: 241-249.
- [6] Yaitskova N, Dohlen K. Simulation of imaging performance for extremely large segmented telescopes[C]. SPIE, 2000, 4003: 279-290.
- [7] Yaitskova N, Dohlen K, Dierickx P. Analytical study of diffraction effects in extremely large segmented telescopes[J]. J Opt Soc Am A, 2003, 20(8): 1563-1575.
- [8] Liu Zheng, Wang Shengqian, Rao Changhui, *et al.* Analysis of comprehensive effects of piston error and sub-aperture aberrations on the image quality of sparse-optical-synthetic-aperture system[J]. Acta Physica Sinica, 2011, 60(10): 100702.  
刘政, 王胜千, 饶长辉, 等. 相位平移误差与子孔径自身像差对稀疏光学合成孔径系统成像质量的综合影响分析[J]. 物理学报, 2011, 60(10): 100702.
- [9] Zhang Wei, Deng Jian, Long Funian, *et al.* Imaging quality of segmented mirror synthetic aperture optics[J]. Optics and Precision Engineering, 2008, 16(2): 208-214.  
张伟, 邓键, 龙夫年, 等. 拼接镜面合成孔径光学系统的像质评价[J]. 光学精密工程, 2008, 16(2): 208-214.
- [10] Wang Shanshan, Zhu Qidong, Cao Genrui. Cophasing methods of segmented space telescope[J]. Acta Optica Sinica, 2009, 29(9): 2435-2440.  
王珊珊, 朱秋冬, 曹根瑞. 空间拼接主镜望远镜共相位检测方法[J]. 光学学报, 2009, 29(9): 2435-2440.
- [11] Zhang Yong, Zhang Jin, Liu Genrong, *et al.* Experimental study of segmented mirrors co-phase using dispersed fringe sensor[J]. Acta Optica Sinica, 2011, 31(2): 0212004.  
张勇, 张颀, 刘根荣, 等. 基于色散传感器的拼接镜面共相的实验研究[J]. 光学学报, 2011, 31(2): 0212004.
- [12] Meng Yuhuang, Xu Shuyan, Xu Boqian. Method of segmented mirror co-phasing based on dispersed fringe sensing technology[J]. Acta Optica Sinica, 2016, 36(9): 0911006.  
孟玉凰, 徐抒岩, 许博谦. 基于色散条纹传感技术的拼接镜共相方法[J]. 光学学报, 2016, 36(9): 0911006.
- [13] Qing Kecheng. Fourier optics introductory theory[M]. Beijing: Electronic Industry Press, 2011: 46-118.  
秦克诚. 傅里叶光学导论[M]. 北京: 电子工业出版社, 2011: 46-118.
- [14] 程景全. 天文望远镜原理和设计: 射电、红外、光学、X射线和 $\gamma$ 射线望远镜[M]. 北京: 中国科学技术出版社, 2002: 59-78.