

## 一种基于 Tsallis 相对熵的图像分割阈值选取方法

聂方彦<sup>1,2</sup>, 李建奇<sup>1</sup>, 张平凤<sup>2</sup>, 屠添翼<sup>1,2</sup><sup>1</sup>湖南文理学院洞庭湖生态经济区建设与发展湖南省协同创新中心, 湖南 常德 415000;<sup>2</sup>湖南文理学院计算机科学与技术学院, 湖南 常德 415000

**摘要** 在工业实践中, 成像环境恶劣且难以控制, 导致图像复杂。对复杂成像条件下的图像实施分割并不容易, 针对这一问题, 结合 Tsallis 相对熵及高斯分布提出一种新的图像阈值分割方法。该方法运用高斯分布拟合分割后图像直方图分布信息, 将 Tsallis 相对熵做为分割前后图像直方图信息损失的度量工具。在对图像实施分割时, 通过在图像灰度级范围内对自定义的准则函数最小化获取最佳分割阈值。最终将该方法与已有方法在工业无损检测及合成孔径雷达图像的分割实验中进行对比。结果表明, 该方法获得的结果视觉效果好、分割精度高、误差小而且算法耗时较少, 因此具有较好的应用推广前景。

**关键词** 图像处理; 图像分割; 直方图阈值化; 复杂图像; Tsallis 相对熵

**中图分类号** TP391.41 **文献标识码** A

**doi:** 10.3788/LOP54.071002

## A Threshold Selection Method for Image Segmentation Based on Tsallis Relative Entropy

Nie Fangyan<sup>1,2</sup>, Li Jianqi<sup>1</sup>, Zhang Pingfeng<sup>2</sup>, Tu Tianyi<sup>1,2</sup><sup>1</sup>Hunan Province Cooperative Innovation Center for The Construction and Development of Dongting

Lake Ecological Economic Zone, Hunan University of Arts and Science, Changde, Hunan 415000, China;

<sup>2</sup>School of Computer Science and Technology, Hunan University of Arts and Science, Changde, Hunan 415000, China

**Abstract** In the field of industrial practice, the images are complicated because the conditions of imaging are usually poor and difficult to control. The image segmentation for complex imaging conditions is not easy. To solve this problem, a new threshold segmentation method is proposed based on Tsallis relative entropy and Gaussian distribution. In the method, the gray level histogram of image after segmentation is fitted by Gaussian distribution, and the difference between the histogram of original image and the fitted histogram is measured by Tsallis relative entropy. The optimal threshold is determined by minimizing the Tsallis relative entropy. Finally, the performance of the proposed method is compared with the several methods on segmentation of non-destructive testing images and synthetic aperture radar image. The results demonstrate that the proposed method has better visual effect, higher precision of segmentation, smaller segmentation error and less computational time. Thus, the proposed method has a good prospect in further applications.

**Key words** image processing; image segmentation; histogram thresholding; complex image; Tsallis relative entropy

**OCIS codes** 100.2000; 110.2960; 100.3008; 150.1135

## 1 引言

在工业应用场景中, 经常需要用到图像处理技术来辅助生产实践。例如场景监控<sup>[1]</sup>、工业流水线产品的无损检测<sup>[2]</sup>、基于医学图像处理技术的辅助诊断<sup>[3]</sup>、合成孔径雷达(SAR)图像分析<sup>[4]</sup>等。图像分割是图像处

**收稿日期:** 2017-02-09; **收到修改稿日期:** 2017-03-10

**基金项目:** 国家自然科学基金(61403136)、湖南省教育厅科学研究项目(14B124, 14C0790)、湖南文理学院重点(建设)学科(计算机应用技术)建设项目

**作者简介:** 聂方彦(1977—), 男, 博士, 副教授, 主要从事复杂图像处理、机器视觉及智能优化算法等方面的研究。

E-mail: niefyan@163.com

理技术中常见的步骤<sup>[5-7]</sup>,且对整个图像处理流程有着重要影响。工业生产和生活实践场景中的成像环境非常复杂且多变,成像结果会受到很多因素的影响,如红外成像中的目标物体热辐射量、显微成像中的放大倍数、X射线成像中的噪声电子信号的干扰等,因此对图像实施有效分割并非易事。基于图像直方图阈值化的技术具有算法实现简单、效率较高以及实时性好等契合常用工业图像处理任务需求的优点,因此成为工业实践中最常用的分割技术之一。

经典的图像阈值分割方法有最大类间方差(Otsu)法<sup>[8]</sup>、基于信息熵的方法<sup>[9]</sup>以及最小误差法<sup>[10]</sup>等。信息熵具有良好的物理热力学解释,因此该类方法在阈值化技术中大放异彩,其典型代表有基于香农熵的最大熵法<sup>[9]</sup>、最小交叉熵法<sup>[11]</sup>以及在此基础上泛化出的广义熵法(如基于 Renyi 熵<sup>[12]</sup>、Tsallis 熵<sup>[13]</sup>等)。Tsallis 熵能处理物理系统中存在的非广延特性,且图像为典型的具有非广延特性的物理系统<sup>[13]</sup>,因此它在图像分割中受到了特别的关注<sup>[14-17]</sup>。

由于图像成像条件的复杂性以及图像分割结果的特定应用目的性,目前还没有普适的分割技术,因此,针对特定分割任务的特点和性质,仍然需要提出改进或更合适的分割方法或技术方案。Tsallis 相对熵<sup>[18-19]</sup>是 Tsallis 在 Tsallis 熵基础上提出来的一种用于不同信息系统一致性测试的工具,两系统一致性越高,则 Tsallis 相对熵值越小。基于这一思想,提出了一种新的图像阈值分割方法,并与几种阈值化方法比较,在此基础上,将之运用于工业无损检测(NDT)图像与 SAR 图像的分割,实验结果初步验证了该方法的有效性及其在复杂工业图像处理任务中的应用潜能。

## 2 Tsallis 相对熵

为度量非线性热力学系统中存在的非广延特性,Tsallis 在香农熵基础上提出一种泛化的广义熵——非广延熵,其后诸多文献中也将该广义熵称为 Tsallis 熵。在此基础上,Tsallis 还定义了一种用于不同系统之间一致性测试的相对熵准则,即 Tsallis 相对熵。令  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  和  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  为两个离散有限概率向量且  $a_i, b_i \geq 0$  满足  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = 1$ , 则 Tsallis 定义的广义相对熵测度表达式为<sup>[18]</sup>

$$D(A | B) = \frac{1}{q-1} \left[ \sum_{i=1}^n b_i (a_i/b_i)^q - 1 \right], \quad (1)$$

式中参数  $q$  称为 Tsallis 相对熵的非广延指数,它是一个用于刻画系统非广延性的参数,同时参数  $q > 0$  且  $q \neq 1$ , 当  $q \rightarrow 1$  时,该广义相对熵收敛于 Kullback 和 Leibler 定义的传统相对熵测度。从(1)式可以看出,如果  $a_i$  与  $b_i$  越相似,则(1)式获得的值也就越小。在应用 Tsallis 相对熵进行系统一致性测试时,还可以通过调节参数  $q$  的取值来更好地刻画系统之间的信息差异性,这也是 Tsallis 相对熵相对传统相对熵的优势。(1)式定义的广义相对熵测度是非对称的,即  $D_q(A | B) \neq D_q(B | A)$ , 为了更好地刻画不同系统之间的信息差异性,将该广义相对熵的对称版本作为图像阈值化的准则函数,即

$$J_q(A | B) = D_q(A | B) + D_q(B | A) = \frac{1}{q-1} \left\{ \sum_{i=1}^n [b_i (a_i/b_i)^q + a_i (b_i/a_i)^q] - 2 \right\}. \quad (2)$$

在图像处理过程中,将原始图像看成一个像素灰度级的概率分布系统。运用 Tsallis 相对熵作为图像分割的准则,找到一个分割后图像的像素灰度级概率分布。如果找到的分割后图像的像素灰度级概率分布与原始图像像素灰度级概率分布进行一致性测试时,使得 Tsallis 相对熵值越小,即灰度级概率分布与原始图像灰度级概率分布越匹配,则分割后得到的图像与原始图像越相似,丢失的细节信息越少,分割精确性也就越高。根据这一原理,提出了一种用于图像阈值分割的方法。

## 3 图像分割原理

定义  $I$  为一待分割图像,大小为  $m \times n$ ,最大灰度级为  $L-1$ ,其像素灰度级用集合  $G = \{0, 1, 2, \dots, L-1\}$  表示,用  $f(x, y)$  表示坐标  $(x, y)$  处的像素灰度值,则  $I$  可表示为  $I = \{f(x, y) | x = 1, 2, \dots, m; y = 1, 2, \dots, n\}$ 。用  $n_i$  表示图像  $I$  中灰度级值为  $i$  的像素数目,  $h_i = n_i / m \times n$  表示灰度级  $i$  在图像  $I$  中的出现频率,则图像的灰度级直方图  $H$  可表示为  $H = \{h_i | i = 0, 1, \dots, L-1\}$ 。在应用阈值化方法对图像进行分割时,假设  $t$  为一

分割阈值,则  $t$  将图像像素分为两类:1) 背景类  $C_B = \{0, 1, \dots, t\}$ ; 2) 目标类  $C_O = \{t+1, t+2, \dots, L-1\}$ 。

将  $H$  看作原始图像灰度级的信息分布,在应用 Tsallis 相对熵对图像实施分割时,需要找到一个合适的用于表达分割后图像的灰度级信息分布。在自然场景中,很多信号的分布形态可用正态分布,即高斯分布进行模拟,选用高斯分布来拟合分割后图像的灰度级分布,然后用(2)式所示的 Tsallis 相对熵准则定义图像阈值化函数。

为构造分割后图像的灰度级高斯拟合分布,首先定义关于  $C_B$  和  $C_O$  的类概率

$$P_B = \sum_{i=0}^t h_i, P_O = \sum_{i=t+1}^{L-1} h_i. \quad (3)$$

对于一幅待定的分割图像来说,这里有  $P_B + P_O = 1$ 。依据高斯分布构造方法,同时也定义关于  $C_B$  和  $C_O$  的灰度级类均值

$$\mu_B = \sum_{i=0}^t ih_i / P_B, \mu_O = \sum_{i=t+1}^{L-1} ih_i / P_O. \quad (4)$$

以及关于  $C_B$  和  $C_O$  的类方差  $\sigma_B^2$  和  $\sigma_O^2$  及灰度级  $i$  关于  $C_B$  和  $C_O$  的类概率  $p_B^i$  和  $p_O^i$

$$\sigma_B^2 = \sum_{i=0}^t (i - \mu_B)^2 / P_B, \sigma_O^2 = \sum_{i=t+1}^{L-1} (i - \mu_O)^2 / P_O, \quad (5)$$

$$p_B^i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_B} \exp\left[-\frac{(i - \mu_B)^2}{2\sigma_B^2}\right], p_O^i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_O} \exp\left[-\frac{(i - \mu_O)^2}{2\sigma_O^2}\right], i = 0, 1, \dots, L-1. \quad (6)$$

基于以上定义,可以给出关于分割后图像灰度级的拟合高斯分布

$$R = \{r_i \mid r_i = \frac{P_B \cdot p_B^i + P_O \cdot p_O^i}{\sum_{j=0}^{L-1} (P_B \cdot p_B^j + P_O \cdot p_O^j)}, i = 0, 1, \dots, L-1\}. \quad (7)$$

由此,可以通过(2)式定义关于图像的阈值化准则函数

$$J_q(H \mid R) = \frac{1}{q-1} \left\{ \sum_{i=0}^{L-1} [h_i (r_i/h_i)^q + r_i (h_i/r_i)^q] - 2 \right\}. \quad (8)$$

应用 Tsallis 相对熵对两系统间信息量作一致性测试时,其对应得到的值越小,则两系统相似性越高。因此,在对图像实施分割时,如果能找到一个使(8)式所示 Tsallis 相对熵取得最小值的灰度级  $t$ ,则  $t$  为最佳分割阈值,最佳分割阈值  $t^*$  的获取函数为

$$t^* = \operatorname{argmin}_{t \in G} [J_q(H \mid R)]. \quad (9)$$

在图像灰度级  $G = \{0, 1, \dots, L-1\}$  范围内,搜索使  $J_q(H \mid R)$  获得最小值的灰度级值,则可得到(9)式的解。对于 8 位数字图像来说,  $L = 256$ , 采用穷尽法求解(9)式。据此获取最优阈值  $t^*$  后,对图像  $I$  实施分割的函数为

$$f_{t^*}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{if } f(x, y) \leq t^* \\ 255, & \text{if } f(x, y) > t^* \end{cases}, \quad (10)$$

式中  $f(x, y)$  表示待分割图像坐标  $(x, y)$  处的像素灰度值,  $f_{t^*}(x, y)$  表示分割后图像坐标  $(x, y)$  处的像素灰度值。对各步骤进行整理,图像分割的整个算法流程如图 1 所示。

## 4 实验结果与分析

为了验证该方法在复杂图像分割上的有效性,将该方法与一些经典的阈值化法,如 Otsu 法<sup>[8]</sup>、最小交叉熵法(MCE)<sup>[11]</sup>、二维最大 Tsallis 熵法(2DMTE)<sup>[14]</sup>以及最近由唐英干等<sup>[16]</sup>提出的二维最小 Tsallis 交叉熵法(2DMTCE)和文献[2]提出的迭代 Otsu 法进行了对比实验。为便于叙述,将以上方法简称为 Otsu、MCE、2DMTE、2DMTCE、文献[2]方法。这些方法在工业实践中应用非常广泛,或与提出方法在所基于的理论基础上有相似之处。所有方法在实验过程中都用 Matlab 语言实现,编程硬件条件为 Intel(R) Core (TM)2 Duo CPU T8100 2.10GHz,内存为 2G,操作系统为 Windows XP 的个人 PC 机。实验中所有方法的 Tsallis 相对熵参数  $q$  的设置通过实验比较设定为 0.8。

实验首先选用 Sezgin<sup>[20]</sup>提供的工业 NDT 图像作为客观性能评估测试图像,Sezgin 提供的这些图像不仅有原始待分割图,也有专家手工分割的结果,因此很方便用于评估比较各方法的性能。对于图像分割算法

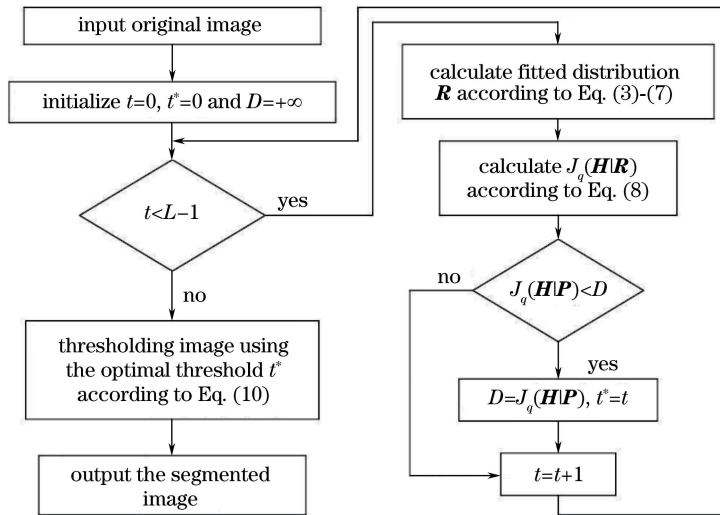


图1 分割算法实现流程图

Fig. 1 Flow chart of segmentation algorithm

的性能客观评估,并没有金标准,因此,选用文献中常用到的分割误差  $S_e$  作为评估标准,该评估准则用分割过程中被错误归类的像素数  $N_m$  与图像全部像素数  $N_t$  的比率来描述<sup>[21]</sup>,即

$$S_e = \frac{N_m}{N_t}. \quad (11)$$

图2~4分别列出了三幅不同成像条件下的 NDT 图像,其中图2(a)是有缺陷的玻璃纤维增强塑料超声成像图像,图3(a)是一幅有缺陷的涡流图像,图4(a)是有缺陷的工件材料图像;图2(b)、图3(b)、图4(b)分别为对应图2(a)、图3(a)、图4(a)的专家真实分割结果;图2(c)、图3(c)、图4(c)分别为对应图2(a)、图3(a)、图4(a)的灰度级直方图。

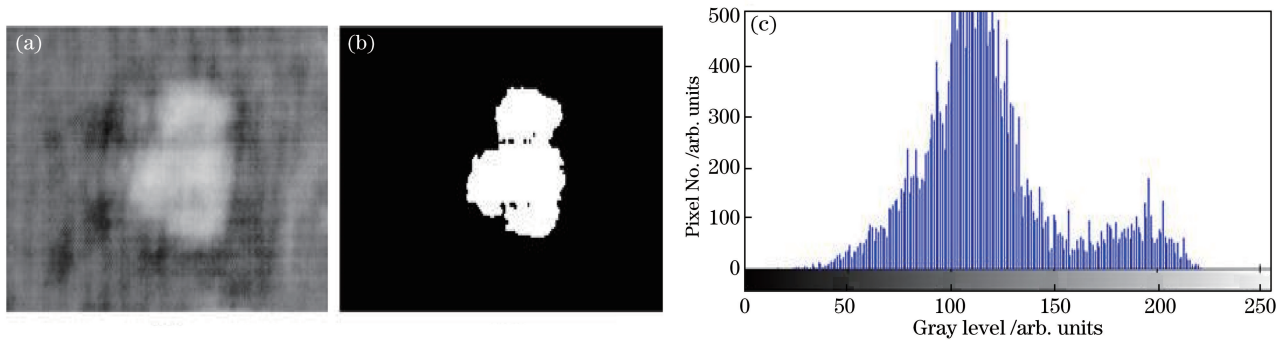


图2 玻璃纤维增强塑料超声图像。(a)原始图像;(b)真实分割图像;(c)灰度级直方图

Fig. 2 Ultrasonic images of fiberglass reinforced plastics. (a) Original image;

(b) real segmentation image; (c) gray level histogram

图5列出了不同方法对超声图像进行分割时获得的结果。从图5可以看出,在对超声图像的分割中,本文方法获得了最好的分割结果,2DMTCE方法获得的结果最差,Otsu法获得的结果劣于本文方法,但优于其他方法。

图6列出了不同方法对涡流图像进行分割时获得的结果。在对涡流图像的分割中,本文方法、Otsu法、MCE方法和文献[2]方法获得的结果类似。但仔细比较这四种方法获得的结果可以看出,Otsu法和本文方法获得的结果更佳,这两种方法获得的结果图像残留的噪声点信息更少。相对于最大 Tsallis 熵方法,2DMTE方法和2DMTCE方法获得的结果要差一些,尤其是2DMTCE方法。

图7列出了各方法对工件材料图像进行分割时获得的结果。从图7可以看出,本文方法获得的结果最好,其次是Otsu法,其他四种方法获得的结果与专家分割结果相比较要差的多。

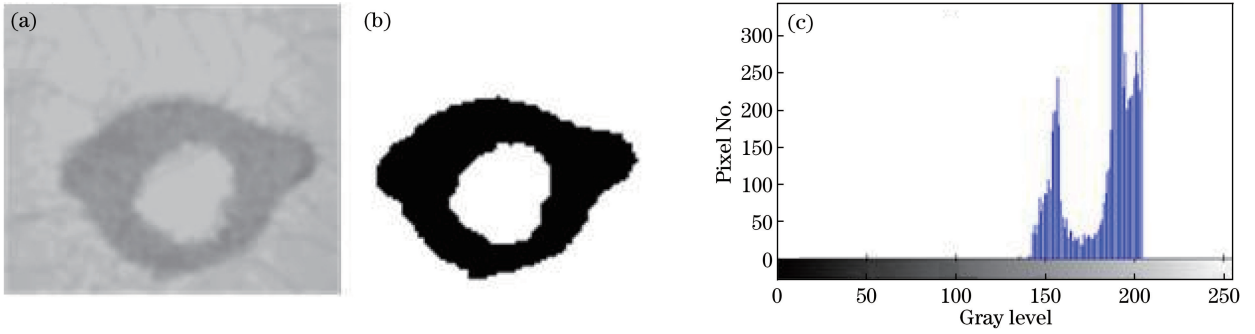


图 3 涡流图像。(a)原始图像;(b)真实分割图像;(c)灰度级直方图

Fig. 3 Images of eddy current. (a) Original image; (b) real segmentation image; (c) gray level histogram

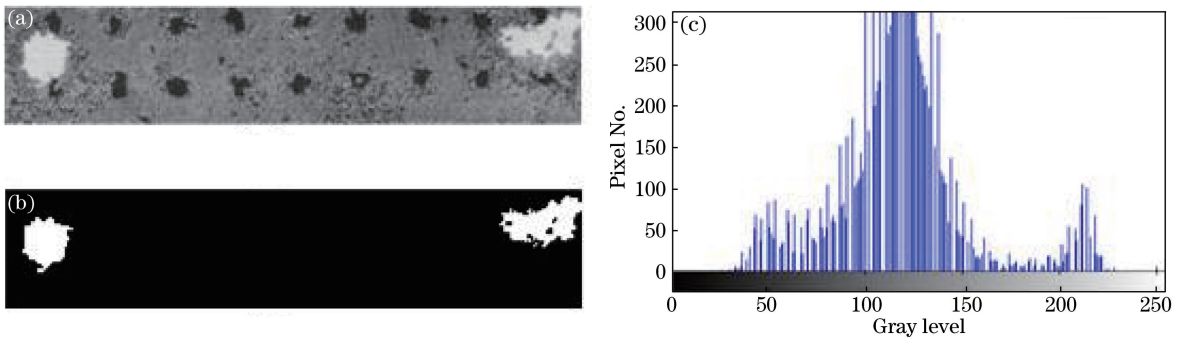


图 4 工件材料图像。(a)原始图像;(b)真实分割图像;(c)灰度级直方图

Fig. 4 Images of work material. (a) Original image; (b) real segmentation image; (c) gray level histogram

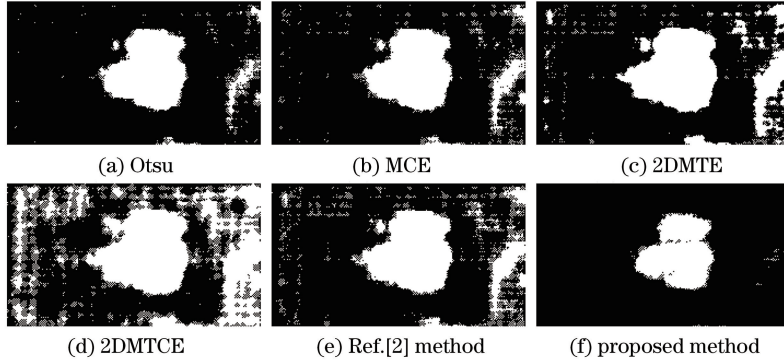


图 5 超声图像的分割结果

Fig. 5 Segmented results of ultrasonic image

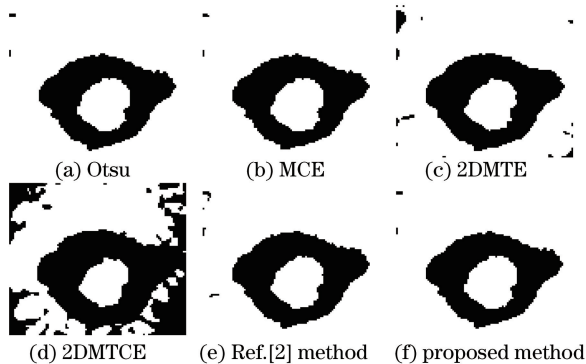


图 6 涡流图像的分割结果

Fig. 6 Segmented results of eddy current image

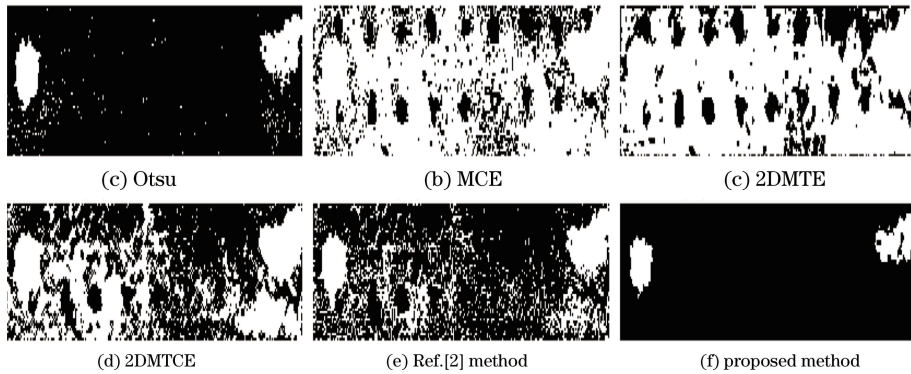


图 7 工件材料图像的分割结果

Fig. 7 Segmented results of work material image

表 1 列出了不同方法对测试 NDT 图像进行分割时获得的最佳阈值。比较表 1 中各方法获得的最佳阈值与图 2~4 中各 NDT 图像灰度级直方图分布,可以看出,本文方法获得的最佳阈值更接近于图像灰度直方图分布的谷点附近。例如,对于超声图像而言,从图 2(c)可以看出,该图像直方图分布的最佳分割点位于灰度值 160 附近,在相比较的 6 种方法中,本文方法获得的结果与该最佳分割点最接近。

表 1 不同方法对 NDT 图像的分割阈值比较

Table 1 Comparison of segmentation thresholds on NDT images by different methods

Image	Otsu	MCE	2DMTE	2DMTCE	Ref. [2] method	Proposed method
Ultrasonic image	141	134	[130,127]	[116,116]	128	164
Eddy current image	175	174	[184,183]	[191,191]	178	175
Work material image	151	102	[121,104]	[123,122]	127	187

表 2 列出了不同方法对 NDT 图像进行分割时获得的分割结果和与专家分割结果比较得出的分割误差值。从表 2 可以看出,本文方法获得的  $S_e$  值除了在涡流图像上大于 MCE 方法获得的  $S_e$  值外,在另两幅图像上都小于其他方法的  $S_e$  值。

表 2 不同方法对 NDT 图像的分割误差值比较

Table 2 Comparison of segmentation error values on NDT images by different methods

Image	Otsu	MCE	2DMTE	2DMTCE	Ref. [2] method	Proposed method
Ultrasonic image	0.0633	0.0940	0.1489	0.3274	0.1435	0.0145
Eddy current image	0.0048	0.0036	0.0371	0.1921	0.0124	0.0048
Work material image	0.0218	0.7057	0.7121	0.4095	0.2289	0.0066

一般在图像处理任务中,时间性能也是影响算法实用性的一个重要指标。比较各方法可知,2DMTE 方法和 2DMTCE 方法是二维直方图图像分割方法,对图像实施分割的耗时较长,表 3 列出了不同方法对 NDT 图像实施分割时的耗时比较。在 2DMTE 方法实现过程中,应用一种快速算法求取最佳分割阈值,2DMTCE 方法采用原文献中设计的粒子群优化算法(PSO)加速求取最佳阈值。从表 3 可以看出,本文方法的耗时小于 0.1 s,按照这个时间需求,1 s 能处理 10 多幅图像。所有算法均用 Matlab 语言实现,如果改用更底层的程序设计语言,其耗时将更少,因此从时间性能上来说,本文方法也是可以满足一般图像处理的实时性能需求的。

表 3 不同方法对 NDT 图像的分割耗时比较

Table 3 Comparison of segmentation time on NDT images by different methods

Image	Otsu	MCE	2DMTE	2DMTCE	Ref. [2] method	Proposed method
Ultrasonic image	0.0467	0.0237	0.3545	20.7748	0.0239	0.0805
Eddy current image	0.0514	0.0149	0.1843	21.1376	0.0197	0.0306
Work material image	0.0498	0.0228	0.1848	21.2786	0.0246	0.0906

为了验证本文方法的应用潜能,在 SAR 图像上也对该方法进行了比较实验。图 8 列出了实验所用 SAR 图像及其灰度级直方图,该 SAR 图像尺寸为 230 pixel $\times$ 345 pixel。从图 8 可以看出,该 SAR 图像中

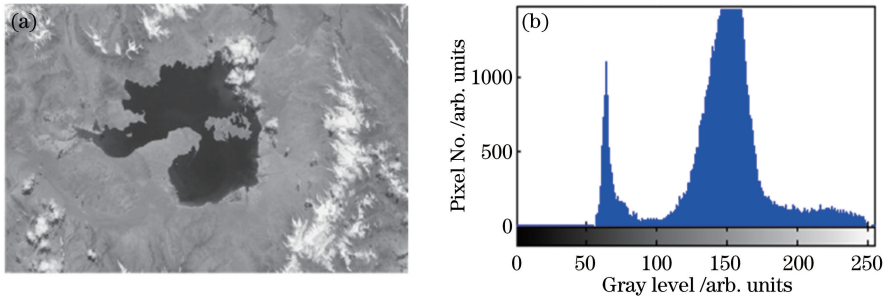


图 8 (a) 实验用 SAR 图像; (b) 其灰度级直方图

Fig. 8 (a) Tested SAR image; (b) gray level histogram

的目标区域范围较小,其灰度级直方图呈不规则的双峰分布形态,要较好地分离目标并不容易。

图 9 给出了该 SAR 图像各方法的分割结果。从图 9 可以看出,本文方法获得的结果优于其他方法获得的结果,在对这幅 SAR 图像的分割上,最大 Tsallis 熵法和 2DMTCE 方法获得的结果较差。

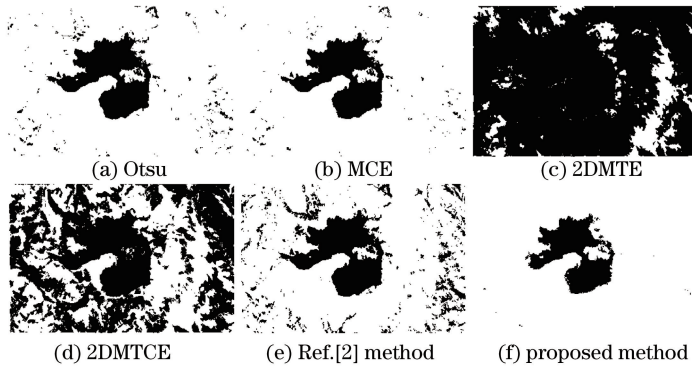


图 9 SAR 图像各方法分割结果

Fig. 9 Segmented results of SAR image

综合分析各方法在实验图像上的分割结果可以看出,本文方法在对多种形态的图像进行分割时能获得较好的分割结果,可以用于相关的图像处理应用中。

## 5 结 论

由于成像场景、条件、方式等因素不同,所成图像的形态一般较为复杂。针对特定的图像处理应用,仍然需要通过改造或提出更适合的技术方案来适应不同的分割任务。将图像分割看作两个信息系统的信息匹配问题,基于系统间信息一致性测试的度量工具 Tsallis 相对熵以及高斯分布,提出了一种用于复杂图像分割的阈值化方法。在工业 NDT 及 SAR 图像的分割方面,将该方法与几种经典的方法进行了比较实验。实验结果表明,该方法在对图像的分割上能取得比其他方法更好的视觉效果,分割得出的结果图像边缘更光滑、目标更完整,在使用客观评价指标的基础上得到的分割误差值也小于其他方法,在实验所采用的软硬件环境中算法耗时小于 0.1 s,满足常用工业实践图像处理应用需求。初步实验结果表明,该方法具有较好的应用潜能,可以作为一种实用的方法应用于工程实践,为该方法应用于结合工业图像处理的具体应用场景提供了必要的前提。

## 参 考 文 献

- [1] Yang Aiping, Bai Huanguang. Nighttime image defogging based on the theory of Retinex and dark channel prior[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2017, 54(4): 041002.  
杨爱萍, 白煌煌. 基于 Retinex 理论和暗通道先验的夜间图像去雾算法[J]. 激光与光电子学进展, 2017, 54(4): 041002.
- [2] Cai H, Yang Z, Cao X, *et al.* A new iterative triclass thresholding technique in image segmentation[J]. IEEE

Transactions on Image Processing, 2014, 23(3): 1038-1046.

- [3] Wang Sukai, Pan Jinxiao, Chen Ping. Adaptive segmentation algorithm for CT image sequence based on structure continuity as prior information[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2016, 53(11): 111006.  
王苏恺, 潘晋孝, 陈平. 基于结构连续先验的CT图像序列自适应分割算法[J]. 激光与光电子学进展, 2016, 53(11): 111006.
- [4] Moser G, Serpico S B. Generalized minimum-error thresholding for unsupervised change detection from SAR amplitude imagery[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2006, 44(10): 2972-2982.
- [5] Li Andong, Lin Zaiping, An Wei, *et al.* Infrared small target detection in compressive domain based on self-adaptive parameter configuration[J]. Chinese J Lasers, 2015, 42(10): 1008003.  
李安冬, 林再平, 安玮, 等. 基于自适应改进的压缩域红外弱小目标检测[J]. 中国激光, 2015, 42(10): 1008003.
- [6] Su Juan, Li Bing, Wang Yanzhao. Infrared image enhancement based on PCNN segmentation and fuzzy set theory[J]. Acta Optica Sinica, 2016, 36(9): 0910001.  
苏娟, 李冰, 王延钊. 结合PCNN分割和模糊集理论的红外图像增强[J]. 光学学报, 2016, 36(9): 0910001.
- [7] Wang Bo, Wan Lei, Li Ye, *et al.* Underwater laser image segmentation method based on adaptive pulse coupled neural networks[J]. Acta Optica Sinica, 2015, 35(4): 0410004.  
王博, 万磊, 李晔, 等. 基于自适应脉冲耦合神经网络的水下激光图像分割方法[J]. 光学学报, 2015, 35(4): 0410004.
- [8] Otsu N. A threshold selection method from gray-level histograms[J]. IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics, 1979, 9(1): 62-66.
- [9] Kapur J N, Sahoo P K, Wong A K C. A new method for gray-level picture thresholding using the entropy of the histogram[J]. Computer Vision Graphics and Image Processing, 1985, 29(3): 273-285.
- [10] Kittler J, Illingworth J. Minimum error thresholding[J]. Pattern Recognition, 1986, 19(1): 41-47.
- [11] Li C H, Lee C K. Minimum cross entropy thresholding[J]. Pattern Recognition, 1993, 26(4): 617-625.
- [12] Sahoo P, Wilkins C, Yeager J. Threshold selection using Renyi's entropy[J]. Pattern Recognition, 1997, 30(1): 71-84.
- [13] Albuquerque M P D, Esquef I A, Mello A R G, *et al.* Image thresholding using Tsallis entropy[J]. Pattern Recognition Letters, 2004, 25(9): 1059-1065.
- [14] Sahoo P K, Arora G. Image thresholding using two-dimensional Tsallis-Havrda-Charvát entropy[J]. Pattern Recognition Letters, 2006, 27(6): 520-528.
- [15] Tang Y G, Di Q Y, Guan X P. Fast recursive algorithm for two-dimensional Tsallis entropy thresholding method[J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2009, 20(3): 619-624.
- [16] Tang Yinggan, Di Qiuyan, Zhao Lixing, *et al.* Image thresholding segmentation based on two-dimensional minimum Tsallis-cross entropy[J]. Acta Physica Sinica, 2009, 58(1): 9-15.  
唐英干, 邸秋艳, 赵立兴, 等. 基于二维最小Tsallis交叉熵的图像阈值分割方法[J]. 物理学报, 2009, 58(1): 9-15.
- [17] Wu Shihua, Wu Yiquan, Zhou Jianjiang. Thresholding for remote sensing images of rivers based on a fast iterative algorithm of two-dimensional Tsallis cross entropy[J]. Journal of Signal Processing, 2016, 32(5): 598-607.  
吴诗姘, 吴一全, 周建江. 基于Tsallis交叉熵快速迭代的河流遥感图像分割[J]. 信号处理, 2016, 32(5): 598-607.
- [18] Tsallis C. Generalized entropy-based criterion for consistent testing[J]. Physical Review E, 1998, 58(2): 1442-1445.
- [19] Furuichi S, Yanagi K, Kuriyama K. Fundamental properties of Tsallis relative entropy[J]. Journal of Mathematical Physics, 2004, 45(12): 4868-4877.
- [20] Sezgin M. Automatic image thresholding software[EB/OL]. [2017-02-09]. <http://mehmetsezgin.net>.
- [21] Guo Y, Cheng H D. New neutrosophic approach to image segmentation[J]. Pattern Recognition, 2009, 42(5): 587-595.